Álgebra Linear Avançada

Subespaços Vetoriais

Daniel Miranda Machado

23 de Setembro

UFABC

Subespaços

Subespaços

Na maioria das estruturas algébricas podemos definir subestruturas e os espaços vetoriais não são exceções. Suponha que V seja um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Definição (Subespaço Vetorial)

Um subconjunto não vazio W de V é um ***subespaço vetorial*** *de V se W for um espaço vetorial com as mesmas operações de adição de vetores e multiplicação escalar que V.*

A seguinte proposição apesar de simples é extremamente útil.

Proposição

Um subconjunto W de V é um subespaço vetorial se W se for fechado em relação às operações de adição de vetores e multiplicação escalar de V.

Demonstração. Exercício. $\triangleleft$

Exemplo

O conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n é subespaço de $\mathbb{K}[x]$. Esse espaço vetorial será denotado por $\mathbb{K}_n[x]$.

Exemplos

Os conjuntos $C([a,b])$, $C^k([a,b])$, e $\mathcal{R}([a,b])$ são todos os subespaços de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

Exemplo

O conjunto

$$(\mathbb{K}^{\infty})_0 = \{(a_1, a_2, \cdots,) \,|a_i \in \mathbb{K} \text{ com um número finito de termos não nulos } \}$$

é um subespaço de $\mathbb{K}^{\infty}$

Códigos

Considere o espaço vetorial $(\mathbb{Z}_2)^n$ sobre $\mathbb{Z}_2$. Definimos o peso $\mathcal{W}(v)$ de um vetor $v \in (\mathbb{Z}_2)^n$ como o número de coordenadas diferentes de zero em v.

Por exemplo, $\mathcal{W}(101010) = 3$. Seja P_n o conjunto de todos os vetores em $(\mathbb{Z}_2)^n$ de peso par. Então P_n é um subespaço de $(\mathbb{Z}_2)^n$.

Ao transmitir informações, o canal geralmente introduz erros na mensagem. Por exemplo, comunicando-se com uma estação espacial ou apenas usando a internet com uma recepção wi-fi ruim. Portanto, um dos problemas que surge é como detectamos erros na mensagem e como os corrigimos.

O primeiro passo é escolher um conjunto de palavras em um alfabeto, por exemplo só transmitimos palavras no subespaço de peso par. Se recebermos uma mensagem com uma palavra que não seja uma delas, por exemplo, 10101101, poderemos detectar que pelo menos um erro ocorreu.

Agora temos que tentar corrigir o erro, uma ideia simples é enviar o vetor com erro para um vetor no alfabeto. Isso envolve alguma noção de "próximo"que discutiremos numa seção posterior. Esse conjunto de ideias dá origem aos códigos corretores de erros.

De modo geral, qualquer subespaço do espaço vetorial $(\mathbb{F}_q)^n$ é denominado de código linear. Os códigos lineares estão entre os tipos de códigos mais importantes e mais estudados, porque sua estrutura permite codificação e decodificação eficiente de informações.

Intersecção de Subespaços

Se tivermos uma coleção $\mathcal{S} = \{W_i \,|\, i \in I\}$ de subespaços de V, então existem algumas maneiras óbvias de formar um novo subespaço a partir de $\mathcal{S}$.

Seja $\mathcal{S} = \{W_i \,|\, i \in I\}$ uma coleção de subespaços de V. A interseção, $\bigcap_{i \in I} W_i$, dos subespaços em $\mathcal{S}$ é um subespaço vetorial de V.

Se $\mathcal{S}$ possuir a propriedade de que, para cada $i, j \in I$, existe um $k \in I$ tal que $W_i \cup W_j \subseteq W_k$, então claramente $\bigcup_{i \in I} W_i$ é um subespaço de V.

Porém destacamos que em geral, a união de dois subespaços de V não é um subespaço vetorial de V. De fato, se W_1 e W_2 são subespaços de V, então $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial se e somente se $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$. Este fato é fácil de provar e será deixado como exercício.

Teorema

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo infinito $\mathbb{K}$. Então V não pode ser a união de um número finito de subespaços próprios.

Precisaremos do seguinte fato sobre cardinalidade:

Lema

Sejam A e B conjuntos, e suponha $|A| = \infty$. Se, para cada $x \in A$, tivermos um conjunto finito de $I_x \subseteq B$ então $|A| \geq \left| \bigcup_{x \in A} I_x \right|$.

Demonstração

Suponha que $W_1, \ldots, W_n$ sejam subespaços próprios de V, tais que $V = W_1 \cup \cdots \cup W_n$. Mostraremos que tal fato é impossível. Lembramosque um subespaço vetorial W de V é próprio se $W \neq V$. Assim, $V \setminus W \neq \emptyset$ para um subespaço vetorial W de V.

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $W_1 \subsetneq W_2 \cup \cdots \cup W_n$. Sejam $\mathbf{x} \in W_1 \setminus \bigcup_{i=2}^{n} W_i$ e $\mathbf{y} \in V \setminus W_1$. Como o corpo $\mathbb{K}$ é infinito e $\mathbf{y}$ não é o vetor nulo, $I = \{\mathbf{x} + \lambda_1 \mathbf{y} \,|\, \lambda_1 \in \mathbb{K}\}$ é um subconjunto infinito de V. Como existem apenas finitos subespaços W_i, existem $\{\, 1, \ldots, n\}$ de forma que $I \cap W_j$ seja infinito. Suponha que $j \in \{2, \ldots, n\}$.

Então, existem dois escalares diferentes de zero $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, de modo que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\mathbf{x} + \lambda_1\mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} \in W_j$. Como W_j é um subespaço vetorial,

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{x} = \lambda_2(\mathbf{x} + \lambda_1\mathbf{y}) - \lambda_1(\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y}) \in W_j$$

Como $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, concluímos $\mathbf{x} \in W_j$. Mas esse fato é contrário à nossa escolha de $\mathbf{x} \notin W_2 \cup \cdots \cup W_n$. Assim, $j = 1$.

Agora, se $j = 1$, novamente existem dois escalares diferentes de zero $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ de modo que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\mathbf{x} + \lambda_1\mathbf{y}, \mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y} \in W_1$. Então

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{y} = (\mathbf{x} + \lambda_1\mathbf{y}) - (\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y}) \in W_1.$$

Como $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0, \mathbf{y} \in W_1$.

Mas isso é impossível, pois o vetor $\mathbf{y}$ foi escolhido em $V \setminus W_1$. Concluímos assim que V não pode ser igual à união de $W_1, \ldots, W_n$.

Exemplo

Se $\mathbb{K}$ é finito, então o teorema anterior é falso em geral. Por exemplo, seja $V = (\mathbb{Z}_2)^2$. Então $V = W_1 \cup W_2 \cup W_3$, em que $W_1 = \{(0,0),(1,0)\}$, $W_2 = \{(0,0),(0,1)\}$ e $W_3 = \{(0,0),(1,1)\}$.

Subespaço Gerado

Definição

Dado um subconjunto S de um espaço vetorial V o menor subespaço de V contendo S

$$\langle S \rangle \triangleq \bigcup \{W \mid W \text{ um subespaço de } V, W \supseteq S\}$$

*é denominado **subespaço gerado** por S.*

Denotaremos por $\mathscr{P}(V)$ o conjunto de todos os subconjuntos de V e $\mathcal{S}(V)$ o conjunto de todos os subespaços de V. Então $\mathcal{S}(V) \subseteq \mathscr{P}(V)$ e temos uma função natural $\langle \cdot \rangle : \mathscr{P}(V) \to \mathcal{S}(V)$, que envia um subconjunto $S \in \mathscr{P}(V)$ para o subespaço vetorial $\langle S \rangle \in \mathcal{S}(V)$. Claramente, $\langle \cdot \rangle$ é uma aplicação sobrejetiva cuja restrição a $\mathcal{S}(V)$ é a identidade.

Combinação Linear

Definição (Combinação Linear)

Seja $B = \{\mathbf{v}_i \mid i \in I\}$ *subconjunto de* V. *Um vector* $v \in V$ *é uma combinação linear dos vetores em* B *se houver um conjunto escalares* $\{c_i\}$, *com apenas um número* ***finito*** *desses diferentes de* 0 *de modo que:*

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in I} c_i \mathbf{v}_i .$$

Se escolhermos todos $c_i = 0$, obteremos

$$\mathbf{0} = \sum c_i \mathbf{v}_i.$$

Esta é a combinação linear trivial dos vetores em B. Qualquer outra combinação linear é não trivial.

No caso, $B = \emptyset$, a única combinação linear que temos é a combinação linear vazia, cujo valor consideramos $0 \in V$ e que consideramos uma combinação linear trivial.

Teorema

A função $\langle \cdot \rangle : \mathscr{P}(V) \to \mathcal{S}(V)$ *possui as seguintes propriedades*

a. *Para* $S \in \mathscr{P}(V)$, $\langle S \rangle$ *é o subespaço de* V *de todas as combinações lineares finitas de vetores de* S*. Assim,*

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{x}_i \mid x_i \in \mathbb{K}, \mathbf{x}_i \in S, n \geq 0 \right\}$$

b. *Se* $S_1 \subseteq S_2$, $\langle S_1 \rangle \subseteq \langle S_2 \rangle$.

c. *Se* $\mathbf{x} \in \langle S \rangle$*, existe um subconjunto finito* $S' \subseteq S$ *de modo que* $\mathbf{x} \in \langle S' \rangle$.

d. $S \subseteq \langle S \rangle$ *para todos os* $S \in \mathscr{P}(V)$.

e. *Para cada* $S \in \mathscr{P}(V)$, $\langle \langle S \rangle \rangle = \langle S \rangle$.

f. *Se* $\mathbf{y} \in \langle S \cup \{\mathbf{x}\} \rangle$ *e* $\mathbf{y} \notin \langle S \rangle$*, então* $\mathbf{x} \in \langle S \cup \{\mathbf{y}\} \rangle$*. Aqui* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ *e* $S \in \mathscr{P}(V)$.

a Como $\langle S\rangle$ é subespaço então $\langle S\rangle$ é fechado em relação a combinações lineares e assim $\{\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{x}_i \mid x_i \in \mathbb{K}, \mathbf{x}_i \in S, n \geq 0\} \subset \langle S\rangle$.

Como $\{\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{x}_i \mid x_i \in \mathbb{K}, \mathbf{x}_i \in S, n \geq 0\}$ é um espaço vetorial contendo S, a igualdade segue.

f . Se $\mathbf{y} \in \langle S \cup \{\mathbf{x}\}\rangle - \langle S\rangle$, então $\mathbf{y}$ será uma combinação linear finita de vetores de $S \cup \{\mathbf{x}\}$. Além disso, $\mathbf{x}$ deve ocorrer com um coeficiente diferente de zero em tal combinação linear. Caso contrário, $\mathbf{y} \in \langle S\rangle$.

Portanto, existem vetores $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in S$ e escalares diferentes de zero $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{K}$ de modo que $\mathbf{y} = x_1\mathbf{x}_1 + \cdots + x_n\mathbf{x}_n + x_{n+1}\mathbf{x}$. Como $x_{n+1} \neq 0$, podemos escrever $\mathbf{x}$ como uma combinação linear de $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Ou seja, $\mathbf{x} = x_{n+1}^{-1}\mathbf{y} - x_{n+1}^{-1}x_1\mathbf{x}_1 - x_{n+1}^{-1}x_n\mathbf{x}_n$. Assim, $\mathbf{x} \in \langle S \cup \{\mathbf{y}\}\rangle$.

Comentários Finais.