Álgebra Linear Avançada

Espaços com Produto Interno

Daniel Miranda Machado

6 de Outubro

UFABC

Definição (Produto Escalar)

Sejam $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \cdots, u_n]^t, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \cdots, v_n]^t$ *dois vetores de* $\mathbb{R}^n$*. Então o produto escalar de* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *é dado por* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$.

É o produto escalar que permite introduzir noções como o comprimento (norma, magnitude) de um vetor, bem como o ângulo entre dois vetores.

As propriedades básicas do produto escalar são enumeradas a seguir:

Teorema

Seja $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *vetores de* $\mathbb{R}^n$ *e* λ *em qualquer escalar. Em seguida, segure o seguinte:*

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ *e* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ *se e somente se* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. *Dizemos que o produto escalar é positivo definido.*
2. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$. *Dizemos que o produto escalar é simétrico.*
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{uw} + \mathbf{vw}$. *Dizemos que o produto escalar é aditivo no primeiro argumento.*
4. *Para todos os* $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}\, cdot \mathbf{v})$. *Dizemos que o produto escalar é homogêneo em relação aos escalares.*

Tomaremos as propriedades do produto escalar como base para nossa definição de um espaço com produto interno. Como a definição abrange espaços reais e complexos, as condições são ligeiramente modificadas. Em especial queremos que a norma seja um número real, isso se manifesta na propriedade de conjugação.

Produto Interno

Passamos agora a uma discussão de espaços vetoriais reais e complexos que possuem uma estrutura adicional, denominado produto interno, conforme descrito na definição a seguir. Os produtos internos permitem introduzir e definir diversos conceitos geométricos nos espaços vetoriais. Em espaços munidos de produtos internos podemos definir o comprimento de um vetor ou o ângulo entre dois vetores. Eles também fornecem os meios para definir a ortogonalidade entre vetores e mesmo a projeção num subespaço.

Neste capítulo, $\mathbb{K}$ denotará o corpo real ou complexo. Além disso, o complexo conjugado de $\lambda \in \mathbb{C}$ será indicado por $\overline{\lambda}$.

Definição (Produto Interno)

Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Um ***produto interno*** *em V é uma função $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ com as seguintes propriedades:*

a **Linear na primeira coordenada**: *para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$*

$$\langle \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v},\ \mathbf{w} \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{u},\ \mathbf{w} \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{v},\ \mathbf{w} \rangle$$

b **Simétrico**:

$$\langle \mathbf{u},\ \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} \quad \textit{(simetria Hermitiana)}$$

c **Positivo definido**: *Para todo $\mathbf{v} \in V$,*

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \text{ e } \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ se e somente se } \mathbf{v} = 0.$$

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a condição de simetria se reduz a

$$\langle \mathbf{u},\ \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v},\ \mathbf{u} \rangle \quad \text{(simetria)}\ .$$

Um espaço vetorial V, munido de um produto interno, é denominado espaço com produto interno.

Observe que um subespaço vetorial S de um espaço com produto interno V também é um espaço com produto interno com a restrição do produto interno de V a S.

Proposição

a. *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então o produto interno é linear em ambas as coordenadas, ou seja, o produto interno é bilinear.*

b. *No entanto, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então o produto interno é linear na primeira coordenada e linear conjugado na segunda, isto é*

$$\langle \mathbf{w}, \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v} \rangle = \overline{\lambda_1} \langle \mathbf{w},\ \mathbf{u} \rangle + \overline{\lambda_1} \langle \mathbf{w},\ \mathbf{v} \rangle$$

c. $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0.$

Demonstração. Vamos provar apenas $\boxed{b}$. Nesse caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e

$$\langle \mathbf{w}, \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle} = \overline{\lambda_1}\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle} + \overline{\lambda_2}\overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle} = \overline{\lambda_1}\langle \mathbf{w}, \ \mathbf{u} \rangle + \overline{\lambda_1}\langle \mathbf{w}, \ \mathbf{v} \rangle$$

$\triangleleft$

Assim, um produto interno complexo é linear na primeira coordenada e linear conjugado na segunda coordenada. Nesse caso dizemos que um produto interno complexo é sesquilinear (sesqui significa uma vez e meia).

Exemplo

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é um espaço com produto interno com o produto escalar, definido por

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

O espaço com produto interno $\mathbb{R}^n$ é geralmente denominado espaço euclidiano n-dimensional.

Exemplo

O espaço vetorial $\mathbb{C}^n$ é um espaço com produto interno com o produto escalar definido por

$$\langle (x_1, \ \ldots, \ x_n), \ (x_1, \ \ldots, \ x_n) \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n$$

Esse espaço com produto interno costuma ser denominado espaço hermitiano n-dimensional.

Exemplo

Se o espaço vetorial V possui uma base $\underline{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, então

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = [\mathbf{x}]_{\underline{B}}^T [\overline{\mathbf{y}}]_{\underline{B}}$$

define um produto interno em V.

Exemplo

Para $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ definimos

$$\langle A,\ B\rangle = \mathrm{tr}(A^t\overline{B})\ .$$

Então $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ conhecido como produto interno da Frobenius.

Exemplo

O espaço vetorial $C^1[a,\ b]$ de todas as funções com a primeira derivada contínua de valor complexo no intervalo fechado $[a,\ b]$ é um espaço complexo de produto interno com

$$\langle f,\ g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} + f'(x)\overline{g'(x)}dx$$

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ o produto interno usual é definido da seguinte forma:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$$

Exemplo (ℓ^2)

Um dos exemplos de espaços de produto interno mais fundamentais é o espaço vetorial ℓ^2 de todas as sequências reais (ou complexas) (s_n) com a propriedade que

$$\sum |s_n|^2 < \infty$$

munido do produto interno

$$\langle (s_n),\ (t_n) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \overline{t_n} \tag{1}$$

Tais sequências são denominadas quadrado somáveis. Para que o produto interno esteja bem definido a soma à direita na Equação ?? deve convergir. Para provar isso, observamos que, se $(s_n), (t_n) \in \ell^2$, então

$$0 \leq (|s_n| - |t_n|)^2 = |s_n|^2 - 2|s_n||t_n| + |t_n|^2$$

Exemplo (Matriz de Gram)

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e base $\underline{\mathrm{B}} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$,. Sejam $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$ e $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{v}_j$ vetores em V. Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_j} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \begin{bmatrix} a_1, \cdots, a_n \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

onde $G = [g_{ij}]$ é a matriz definida por $g_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$ para $1 \leq i, j \leq n$. A matriz G é conhecida como matriz de Gram na base $\underline{\mathrm{B}}$.

Definição (Ângulo)

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ *dois vetores não nulos. O* ***ângulo*** *entre* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *é definido como*

$$]\cos\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

Figura 1: Ângulo entre vetores

Definição (Vetores Ortogonais)

Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ *vetores no espaço com produto interno* V*. Esses vetores são ditos* ***ortogonais*** *ou* ***perpendiculares*** *se* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$*. Nesse caso escrevemos* $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

$\mathbf{u}$

Figura 2: Vetores ortogonais

O seguinte resultado simples é bastante útil.

Proposição

Se V é um espaço com produto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle$ para todo $\mathbf{x} \in V$, então $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Normas

Se V for um espaço com produto interno, a **norma** ou **comprimento** (associada ao produto interno) de $\mathbf{v} \in V$ é definida como

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

Um vetor $\mathbf{v}$ é dito **unitário** se $\|\mathbf{v}\| = 1$.

Teorema

a $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ *e* $\|\mathbf{v}\| = 0$ *se e somente se* $\mathbf{v} = 0$.

b *Para todos* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $\mathbf{v} \in V$,

$$\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$$

c *(Pitágoras) Se* $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$, *temos*

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2$$

d *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky) Para todos* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,

$$|\langle \mathbf{u},\ \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

com igualdade se e somente se **u** *e* **v** *forem múltiplo escalar um do do outro.*

e *(Desigualdade triangular) Para todos* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,

Demonstração. Para demonstrar Pitágoras observamos que

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{v}+\mathbf{u},\ \mathbf{v}+\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{v},\ \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{v},\ \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{u},\ \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{u},\ \mathbf{u}\rangle = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2,$$

pois $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ são ortogonais.

Para demonstrar Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky, se $\mathbf{u}$ ou $\mathbf{v}$ for o vetor zero, o resultado é imediato, assim podemos assumir que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq 0$. Então, para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\mathbf{u} - \lambda \mathbf{v}\|^2 \\ &= \langle \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v},\ \mathbf{u} - \lambda \mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{u},\ \mathbf{u}\rangle - \overline{\lambda}\langle \mathbf{u},\ \mathbf{v}\rangle - \lambda[\langle \mathbf{v},\ \mathbf{u}\rangle - \overline{\lambda}\langle \mathbf{v},\ \mathbf{v}\rangle] \end{aligned}$$

Escolhendo $\overline{\lambda} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle / \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$ fazemos a expressão entre colchetes se anular e logo

$$0 \leq \langle \mathbf{u},\ \mathbf{u}\rangle - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\quad} = \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle|^2}{\quad}$$

Podemos generalizar o conceito de norma de modo a torna-lo independente do produto interno.

Definição (Norma)

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma ***norma*** *em V é uma aplicação $\| \; \| : V \to [0, \infty)$ satisfazendo às seguintes propriedades:*

a) $\|\mathbf{v}\| > 0$ *se* $\mathbf{v} \neq 0$;

b) $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$, *para* $\lambda \in \mathbb{K}$;

c) $\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|$.

Se V possui uma norma, dizemos que V é um espaço normado.

Exemplo

Seja V um espaço com produto interno. Então $\|\mathbf{v}\| := \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{1/2}$ r define uma norma em V.

Exemplos

1. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes normas

   a) Norma do Máximo: $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \; ; \; 1 \leq i \leq n\}$

   b) Norma do Táxi: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

2. No espaço vetorial real $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})(\mathbb{R})$. temos as seguintes normas

   a) $\|A\|_\infty = \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \; ; \; 1 \leq i \leq n\}$

   b) $\|A\|_1 = \max\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \; ; \; 1 \leq j \leq n\}$

Observamos que nem todas as normas provem de um produto interno.

É interessante observar que o produto interno em V pode ser recuperado da norma associada. Assim, conhecer o comprimento de todos os vetores em V é equivalente a conhecer todos os produtos internos dos vetores em V.

Teorema (Identidades de Polarização)

a *Se V é um espaço real com produto interno, então*

$$\langle \mathbf{u},\ \mathbf{v}\rangle = \frac{1}{4}(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2)$$

b *Se V é um espaço complexo com produto interno, então*

$$\langle \mathbf{u},\ \mathbf{v}\rangle = \frac{1}{4}(\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2) + \frac{1}{4}i(\|\mathbf{u}+i\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-i\mathbf{v}\|^2)$$

A norma pode ser usada para definir a distância entre dois vetores em um espaço com produto interno .

Definição (Distância)

Se V é um espaço com produto interno. Definimos a ***distância*** $d(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ *entre os vetores* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *em* V *como*

$$d(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Proposição

Se V é um espaço munido da distância $d(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ *então:*

a. $d(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) \geq 0$ *e* $d(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = 0$ *se e somente se* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.
b. $d(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = d(\mathbf{v},\ \mathbf{u})$. *Nesse caso dizemos que d é simétrica.*
c. $d(\mathbf{u},\ \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u},\ \mathbf{w}) + d(\mathbf{w},\ \mathbf{v})$. *Nesse caso dizemos que d satisfaz a desigualdade triangular.*

Qualquer conjunto não vazio V, juntamente com uma função $d : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaça as propriedades da Proposição **??**, é denominado **espaço métrico** e a função d é dita **métrica** em V. Assim, qualquer espaço com produto interno é um espaço métrico com a métrica induzida pelo produto interno.

A presença de um produto interno e, portanto, de uma métrica, permite a definição de diversos conceitos analíticos em V como convergência de sequências e séries infinitas, funções contínuas e conjuntos abertos, fechados e compactos.

Bases Ortonormais

Definição (Ortogonalização)

Seja V um espaço com produto interno. Um conjunto não vazio $O = \{\mathbf{u}_i, i \in \Delta\} \subset V$ é ***ortogonal*** *se $\mathbf{u}_i \perp \mathbf{u}_j$ para quaisquer $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \in X$. Se, além disso, todos os seus vetores são unitários, então O é* ***ortonormal***. *Ou seja, O é ortonormal se*

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Para todo $i, j \in \Delta$.

Definição (Subespaço Ortogonal)

Seja V um espaço com produto interno e $A \subset V$. Então definimos o ***subespaço ortogonal*** *a A como*

$$A^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V \text{ tais que } \mathbf{v} \perp \mathbf{a}, \forall \mathbf{a} \in A\}$$

Lema

O conjunto $S^{\perp}$ *é um subespaço de* V*, mesmo que* S *não o seja. Se* S *é um subespaço de* V *então* $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

Exemplo

Seja $C[-1,\ 1]$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas reais no intervalo fechado $[-1,\ 1]$ munido do produto interno

$$\langle f,\ g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

Então o conjunto $\{\text{sen}(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$ é ortonornal.

$$\int_{-1}^{1} \text{sen}(n\pi x)\,\text{sen}(m\pi x)dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 1 & \text{se } m = n \end{cases}$$

$\mathbf{m = n}$**:**

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(\cos(n\pi x - n\pi x) - \cos(n\pi x + n\pi x)\right) \tag{2}$$

A ortogonalidade é mais forte que a independência linear.

Lema

Todo conjunto ortogonal formado por vetores não nulos é linearmente independente.

Demonstração. Sejam $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in X$ tais que

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{x}_m = \mathbf{0}.$$

Então

$$0 = \langle \mathbf{0},\ \mathbf{x}_i \rangle = \langle \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{x}_m,\ \mathbf{x}_i \rangle = \alpha_1 \langle \mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_i \rangle + \ldots + \alpha_m \langle \mathbf{x}_m,\ \mathbf{x}_i \rangle = \alpha_i \langle \mathbf{x}_i,\ \mathbf{x}_i \rangle.$$

Como $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle = \|\mathbf{x}_i\|^2 \neq 0$, temos que $\alpha_i = 0$. $\triangleleft$

Seja O a coleção de todos os conjuntos ortonormais em um espaço com produto interno V. Observe que qualquer conjunto unitário $\{\mathbf{v}\}$ com $||\mathbf{v}|| = 1$ é um conjunto ortonormal em V. Como uma subfamília do conjunto das partes $\mathscr{P}(V)$ a família O é parcialmente ordenada pela ordem dada pela inclusão de conjuntos.

Definição (Base de Hilbert)

Um conjunto ortonormal maximal A em um espaço com produto interno V é chamado de ***base de Hilbert*** *para V.*

Se V não for um espaço vetorial de dimensão finita, uma base no sentido acima nunca será uma base de V como espaço vetorial. Para diferenciar denominaremos uma base de V no sentido de espaço vetorial como base de Hamel.

Teorema

Seja V um espaço com produto interno e A seja um conjunto ortonormal em V. As seguintes asserções são equivalentes

- a) *A é um conjunto ortonormal maximal em V.*
- b) *Não há vetor unitário $\mathbf{v}$ para o qual $A \bigcup \{\mathbf{v}\}$ seja um conjunto ortonormal.*
- c) *Se $\mathbf{v} \perp A$, $\mathbf{v} = 0$ (isto é, $A^{\perp} = \{0\}$).*

Demonstração. Seja A um conjunto ortonormal em um espaço com produto interno V.

$\boxed{a} \Rightarrow \boxed{b}$ Se existe um vetor unitário $\mathbf{v}$ em V para o qual $A \bigcup \{\mathbf{v}\}$ é um conjunto ortonormal, $A \bigcup \{\mathbf{v}\}$ é um conjunto ortonormal que inclui propriamente A (pois $\mathbf{v} \perp A$). Portanto, A não é um conjunto ortonormal maximal em V.

$\boxed{b} \Rightarrow \boxed{c}$ Se houver um vetor diferente de zero $\mathbf{v}$ em V, de modo que $\mathbf{v} \perp A$, existe um vetor unitário $\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ em V de modo que $A \bigcup \{\mathbf{v}'\}$ é um conjunto ortonormal.

$\boxed{c} \Rightarrow \boxed{a}$ Se $\boxed{a}$ não for verdadeiro, então existe um conjunto ortonormal A' em V que contém propriamente A de modo que $A' \backslash A \neq \emptyset$. Seja $\mathbf{v}$ em $A' \backslash A$, que é um vetor diferente de zero (na verdade, $\mathbf{v}$ é um vetor unitário) ortogonal a A (porque $\mathbf{v} \in A', A \subset A'$ e A' é um conjunto ortonormal). Assim $\boxed{c}$ não é verdadeiro.

O Lema de Zorn pode ser usado para mostrar que qualquer espaço com produto interno possui uma base de Hilbert.

Teorema

Se A é um conjunto ortonormal em um espaço com produto interno V então existe uma base de Hilbert B em V tal que $A \subseteq B$.

Seja A um conjunto ortonormal em um espaço com produto interno V. Definimos

$$O_A = \{S \in \mathscr{P}(V) : S \text{ é um conjunto ortonormal em } V \text{ e } A \subseteq S\}$$

a família de todos os conjuntos ortonormais em V que incluem A.

Como O_A é uma sub-família não vazia (pois $A \in O_A$) do conjunto das partes $\mathscr{P}(V)$, temos que O_A é parcialmente ordenado pela inclusão de conjuntos. Considere uma cadeia arbitrária $C = \{C_i, i \in \Delta\}$ em O_A e considere a união $\bigcup_{i\in\Delta} C_i$ de todos os conjuntos em C. Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ são vetores distintos em $\bigcup_{i\in\Delta} C_i$, $\mathbf{v} \in C_i$ e $\mathbf{u} \in C_j$, em que $C_i, C_j \in C \subseteq O_A$. Como C é uma cadeia, segue-se que $C_i \subseteq C_j$ ou $C_j \subseteq C_i$. Suponha (sem perda de generalidade) que $C_i \subseteq C_j$. (portanto $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in C_j$, e então $\bigcup_{i\in\Delta} C_i$ é um conjunto ortonormal (pois $C_j \in O_A$) . Além disso, $A \subseteq \bigcup_{i\in\Delta} C_i$.

Logo $\bigcup_{i\in\Delta} C_i \in O_A$. Como $\bigcup_{i\in\Delta} C_i$ é um limite superior para C, podemos concluir que toda cadeia em O_A tem um limite superior em O_A. Portanto, O_A possui um elemento maximal pelo Lema de Zorn. Portanto, deixe B ser um elemento maximal de O_A, que claramente é um conjunto ortonormal em V que inclui A. Se houver um vetor unitário $\mathbf{v}$ em V de modo que $B\bigcup\{\mathbf{v}\}$ seja um conjunto ortonormal, então $B\bigcup\{\mathbf{v}\}$ estará em O_A e contém propriamente B, o que contradiz o fato de que B é um elemento maximal de O_A. Portanto, não há vetor unitário $\mathbf{v}$ em V, para o qual $B\bigcup\{\mathbf{v}\}$ é um conjunto ortonormal e, portanto, B é um conjunto ortonormal maximal em V

O próximo resultado nos fornece um algoritmo para a construção de sequências de vetores linearmente independentes.

Teorema (Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt)

Seja $\underline{B} = (\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots)$ uma sequência de vetores linearmente independentes em um espaço com produto interno V, então a sequência $O = (\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \ldots)$ definida por

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i$$

é uma sequência ortogonal em V com a propriedade que

$$\langle \mathbf{u}_1,\ \ldots,\ \mathbf{u}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_{,1},\ \ldots,\ \mathbf{v}_k \rangle$$

para todos os $k > 0$.

Obviamente, da partir da sequência ortogonal $(\mathbf{u}_i)$, obtemos a sequência

A demonstração é por indução. Seja $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$. Para o passo indutivo suponha que o conjunto ortogonal $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ de vetores diferentes de zero foi escolhido de modo que

$$\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_{,1}, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$$

o próximo vetor $\mathbf{u}_{k+1}$ é escolhido definindo

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k + \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}$$

e exigindo que $\mathbf{u}_{k+1}$ seja ortogonal a cada vetor $\mathbf{u}_i$ para $i < k$, ou seja,

$$0 = \langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_{,k} + \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_{k-1} \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_{,k}, \mathbf{u}_i \rangle + \lambda_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle$$

ou, finalmente,

$$\lambda_i = -\frac{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle}$$

para todos os $i = 1, \ldots, k$.

Exemplo

Considere o espaço vetorial $P_3(R)$ munido do produto interno

$$\langle p,\ q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Podemos a partir da base $\underline{\text{B}} = \{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$ obter uma base ortogonal utilizando o processo de ortogonalização de Gram- Schmidt:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2 - \tfrac{1}{3} \quad \text{e} \quad P_3(x) = x^3 - \tfrac{3}{5}x.$$

Os polinômios P_0, P_1, P_2, P_3 são denominados polinômios ortogonais de Legendre.

Exemplo

Considere o espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle p,\ q\rangle = \int_0^{\infty} \exp(-x)p(x)q(x)dx.$$

Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt na base $\underline{\mathrm{B}} = \{1,\ x,\ x^2,\ x^3\}$, obtemos os polinômios

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= x - 1 \\ L_2(x) &= x^2 - 4x + 2 \\ L_3(x) &= x^3 - 9x^2 + 18x - 6 \end{aligned}$$

que são denominados polinômios ortogonais de Laguerre.

Teorema

Seja V um espaço com produto interno.

a. *Se $\dim V = n$ for finita, então V terá uma base Hilbert de tamanho n e todas as bases Hilbert para V terão tamanho n.*
b. *Se V possuir uma base de Hilbert finita com tamanho n, $\dim V = n$.*

Demonstração. Para a parte a, a aplicação do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a uma base de Hamel fornece uma base de Hilbert de mesmo tamanho, n. Além disso, se V possuir uma base Hilbert de tamanho maior que n, também deverá ter uma base Hamel de tamanho maior que n, o que não é possível. Finalmente, se V possuir uma base de Hilbert, $\underline{B}$ de tamanho menor que n, então B poderá ser estendido para um conjunto próprio C que também é linearmente independente. O processo Gram-Schmidt aplicado a C fornece um superconjunto próprio de $\underline{B}$ ortonormal, o que não é possível. Portanto, todas as bases de Hilbert têm tamanho n.

Para a parte b, suponha que $\dim V > n$. Como uma base de Hilbert $\mathcal{H}$ de tamanho n é linearmente independente, podemos adicionar um novo vetor a $\mathcal{H}$ para obter um conjunto linearmente independente do tamanho $n + 1$. A aplicação do processo Gram-Schmidt a esse conjunto fornece um conjunto ortonormal que contém propriamente $\mathcal{H}$, o que não é possível.

Melhor Aproximação

Bases ortonormais têm uma grande vantagem sobre bases arbitrárias. Do ponto de vista computacional, se $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base para V, então cada $\mathbf{v} \in V$ pode ser escrito na forma

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$$

Em geral, no entanto, determinar as coordenadas λ_i requer a resolução de um sistema de equações lineares de tamanho $n \times n$.

Por outro lado, se $O = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é uma base ortonormal para V e

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n$$

então os coeficientes são facilmente calculados:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_i \rangle = \lambda_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = \lambda_i$$

Mesmo quando $O = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ não é uma base (mas apenas um conjunto ortonormal), ainda podemos considerar a expansão

$$\hat{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_n \rangle \mathbf{u}_n$$

Definição (Coeficiente de Fourier)

Seja V um espaço com produto interno. Seja $O = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \ldots\}$ uma sequência ortonormal de vetores de V. Para qualquer $\mathbf{v} \in V$, o k ***coeficiente de Fourier*** *v em relação a O é definido como*

$$f_k \triangleq \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle$$

Exemplo

Seja $C[-1,\ 1]$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas reais no intervalo fechado $[-1,\ 1]$ munido do produto interno

$$\langle f,\ g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

Já vimos que conjunto $\underline{B} = \{\text{sen}(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$ é ortogonal.

Os coeficientes de Fourier da função $f(x) = x$, para $x \in [-\pi, \pi]$, com relação ao conjunto ortogonal $\underline{B}$, são dados por:

$$f_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & \text{se } k \text{ ímpar} \\ -\frac{2}{k\pi} & \text{se } k \text{ par} \end{cases}$$

Teorema (Expansão de Fourier)

Seja V um espaço com produto interno de dimensão finita. Seja $O = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ um conjunto ortonormal de vetores de V. Para qualquer $\mathbf{v} \in V$, a expansão de Fourier de v em relação a O é

$$\hat{\mathbf{v}} \triangleq \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$$

Nesse caso, a desigualdade de Bessel vale para todos os $\mathbf{v} \in V$, isto é,

$$\|\hat{\mathbf{v}}\| \leq \|\mathbf{v}\|$$

Além disso, são equivalentes:

a. *O conjunto O é uma base ortonormal para V.*

b. *Todo vetor é igual à sua expansão de Fourier, ou seja, para todos os $\mathbf{v} \in V$*

Vimos que, se S é um subespaço de um espaço com produto interno V, então $S \cap S^{\perp} = \{0\}$. Isso levanta a questão de saber se o complemento ortogonal $S^{\perp}$ é um complemento de espaço vetorial de S, ou seja, se $V = S \oplus S^{\perp}$.

Se S é um subespaço de dimensão finita de V, a resposta é sim, mas para subespaços de dimensão infinita em geral, $V \neq S \oplus S^{\perp}$.

Exemplo

Seja $V = \ell^2$ e seja S o subespaço de todas as sequências de suporte finito, ou seja, S seja o subespaço gerado pelos vetores

$$\mathbf{e}_i = (0, \ \ldots, \ 0, 1, 0, \ \ldots)$$

onde $\mathbf{e}_i$ tem um 1 na i-ésima coordenada e 0s em outros lugares. Se $x = (x_n) \in S^\perp$, então

$x_i = \langle x, \mathbf{e}_i \rangle = 0$ para todos os i e, portanto, $x = 0$. Portanto, $S^\perp = \{0\}$. No entanto,

$$S \oplus S^\perp = S \neq \ell^2$$

Projeção

Como mostra o próximo teorema, no caso de dimensão finita, os complementos ortogonais também são complementos de espaço vetorial.

Teorema (Projeção)

Se S for um subespaço finito-dimensional de um espaço com produto interno V (que não precisa ser finito-dimensional), então

$$V = S \oplus S^{\perp}$$

Demonstração. Seja $O = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ uma base ortonormal por S. Para cada $\mathbf{v} \in V$, considere a expansão de Fourier

$$\hat{\mathbf{v}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$$

em relação a O. Podemos escrever

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})$$

onde $\hat{\mathbf{v}} \in S$. Além disso, $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \in S^{\perp}$, já que

$$\langle \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle - \langle \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_i \rangle = \mathbf{0}$$

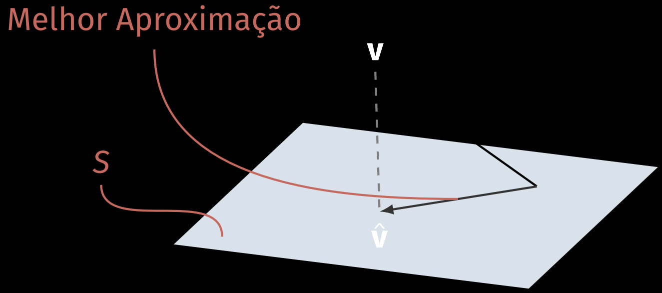
Portanto, $V = S + S^{\perp}$. Já observamos que $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ e, portanto, $V = S \oplus S^{\perp}$. $\triangleleft$

De acordo com a prova do teorema da projeção, o componente de v que está em S é apenas a expansão de Fourier de v em relação a qualquer base ortonormal O por S.

O teorema da projeção implica que, se $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{s}^{\perp}$ em que $\hat{\mathbf{v}} \in S$ e $\mathbf{s}^{\perp} \in S^{\perp}$ então $\hat{\mathbf{v}}$ é o elemento de S mais próximo de v, ou seja, $\hat{\mathbf{v}}$ é a melhor aproximação para v de S. Pois se $\mathbf{t} \in S$, como $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \in S^{\perp}$, temos $(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}) \perp (\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{t})$ e assim

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{t}\|^2 = \|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{t}\|^2 = \|v - \hat{\mathbf{v}}\|^2 + \|\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{t}\|^2$$

Desse fato resulta que $\|\mathbf{v}-\mathbf{t}\|$ é menor quando $\mathbf{t}=\hat{\mathbf{v}}$. Além disso, observamos que $\hat{\mathbf{v}}$ é o único vetor em S para o qual $\mathbf{v}-\hat{\mathbf{v}} \perp S$. Assim, podemos dizer que a melhor aproximação de $\mathbf{v}$ a partir de S é o único vetor $\mathbf{s} \in S$ para o qual $(\mathbf{v}-\mathbf{s}) \perp S$ e que esse vetor é a expansão de Fourier $\hat{\mathbf{v}}$ de $\mathbf{v}$.



Definição (Soma Direta Ortogonal)

Seja V um espaço com produto interno e sejam $S_1, \ldots, S_n$ subespaços de V. Então V é dito **soma direta ortogonal** *de $S_1, \ldots, S_n$, escrita*

$$S = S_1 \odot S_n \qquad \text{se}$$

se

- a $V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$
- b $S_i \perp S_j$ *por* $i \neq j$

O teorema ?? afirma que $V = S \odot S^{\perp}$, para qualquer subespaço de dimensão finita S de um espaço vetorial V. O seguinte resultado simples é muito útil.

Teorema

Seja V um espaço com produto interno. Então são equivalentes

a) $V = S \odot T$

b) $V = S \oplus T$ e $T = S^{\perp}$

c) $V = S \oplus T$ e $T \subseteq S^{\perp}$

Demonstração. Suponha que $\boxed{a}$ seja válido. Então $V = S \oplus T$ e $S \perp T$, o que implica que $T \subseteq S^{\perp}$. Mas se $w \in S^{\perp}$ então $w = s + t$ para $s \in S, t \in T$ e assim

$$0 = \langle s,\ w \rangle = \langle s,\ s \rangle + \langle s,\ t \rangle = \langle s,\ s \rangle$$

Portanto, $s = 0$ e $w \in T$, o que implica que $S^{\perp} \subseteq T$. Portanto, $S^{\perp} = T$, o que fornece $\boxed{b}$. Obviamente, $\boxed{b}$ implica $\boxed{c}$. Finalmente, se $\boxed{c}$ contém $T \subseteq S^{\perp}$, o que implica que $S \perp T$ e, portanto, $\boxed{a}$ são válidos. $\triangleleft$

Teorema

Seja V um espaço com produto interno.

a *Se $\dim V < \infty$ e S for um subespaço de V,*

$$\dim\left(S^{\perp}\right) = \dim V - \dim\left(S\right)$$

b *Se S é um subespaço de dimensão finita de V, então*

$$S^{\perp\perp} = S$$

c *Se X for um subconjunto de V e $\dim\left(\langle X\rangle\right) < \infty$, então*

$$X^{\perp\perp} = \langle X\rangle$$

Demonstração. Como $V = S \oplus S^{\perp}$, temos $\dim V = \dim(S) + \dim(S^{\perp})$, o que prova a parte $\boxed{a}$. Quanto à parte $\boxed{b}$, está claro que $S \subseteq S^{\perp\perp}$. Por outro lado, se $\mathbf{v} \in S^{\perp\perp}$ então pelo teorema da projeção

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{s}'$$

onde $\mathbf{s} \in S$ e $\mathbf{s}' \in S^{\perp}$. Mas $\mathbf{v} \in S^{\perp\perp}$ implica que $0 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{s}' \rangle = \langle \mathbf{s}', \mathbf{s}' \rangle$ e assim $\mathbf{s}' = 0$, mostrando que $\mathbf{v} \in S$. Portanto, $S^{\perp\perp} \subseteq S$ e $S^{\perp\perp} = S$. Deixamos a prova da parte $\boxed{c}$ como um exercício. $\triangleleft$

Comentários Finais.