Álgebra Linear Avançada

Transformações Lineares

Daniel Miranda Machado

6 de Outubro

UFABC

As transformações lineares são as funções que preservam a estrutura vetorial - ou seja, as operações e e os axiomas de adição e multiplicação por um escalar. E o estudo das propriedades dessas transformações lineares é um dos objetos centrais da álgebra linear e nesse texto culminará com as Formas Normal de Jordan e na Forma Racional.

As transformações lineares são vitais em praticamente todas as áreas da ciência e outras áreas da matemática. Praticamente todas as áreas da ciência moderna contêm modelos onde as equações são aproximadas por equações e transformações lineares (aproximando a função pela sua derivada/"argumentos de expansão de Taylor").

Definição e Exemplos

Definição (Transformação Linear)

Seja V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $T : V \to W$ é denominada de ***transformação linear*** *ou* ***homomorfismo*** *se*

$$T(\lambda_1\mathbf{x} + \lambda_2\mathbf{y}) = \lambda_1 T(\mathbf{x}) + \lambda_2 T(\mathbf{y}) \text{ para todos os } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \text{ e } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x}, \mathbf{y} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "+"'] & T(\mathbf{x}),\ T(\mathbf{y}) \arrow[d, "+"] \\
\mathbf{x} + \mathbf{y} \arrow[r, "T"'] & T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{x}, \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\cdot\lambda"'] & T(\mathbf{x}) \arrow[d, "\cdot\lambda"] \\
\lambda\mathbf{x} \arrow[r, "T"'] & \lambda T(\mathbf{x})
\end{tikzcd}$$

Uma transformação linear de V para V é dita **operador linear** em V. E uma transformação linear de V para $\mathbb{K}$ é denominada de **funcional linear** em V.

Exemplos

- A aplicação $\mathrm{o} : V \to W$ que envia todos os vetores para $\mathbf{o} \in W$ é uma aplicação linear. Vamos denominar essa aplicação de **transformação nula** ou **mapa nulo**.
- A transformação linear **identidade** $\mathrm{I}_V : V \to V$ é a transformação linear definida como $\mathrm{I}_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$. Quando não for gerar confusão escreveremos simplesmente I.

Definição

É usual também a seguinte nomenclatura

- □ ***endomorfismo*** *para operador linear.*
- □ ***monomorfismo*** *para transformação linear injetiva.*
- □ ***epimorfismo*** *para transformação linear sobrejetiva*
- □ ***isomorfismo*** *para transformação linear bijetiva.*
- □ ***automorfismo*** *para operador linear bijetivo.*

Exemplo

Se V é um espaço de dimensão finita com base ordenada $\underline{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, então $[\,\cdot\,]_{\underline{x}} \colon V \to \mathbb{K}_n$ é uma transformação linear bijetiva, ou seja, um isomorfismo.

Exemplo

A transposição, $A \to A^t$ é uma aplicação linear de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Exemplo

Suponha que $V = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $A \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$. Então a multiplicação por A (necessariamente à esquerda) induz uma transformação linear $\mathrm{L}_A : V \to V$ dada por $\mathrm{L}_A(B) = AB$ para $B \in V$.

Exemplos

Seja $V = C^\infty(\mathbb{R})$, o espaço vetorial das funções a valores reais infinitamente diferenciáveis.

- Para um número real a,seja $\mathrm{E}_a : V \to \mathbb{R}$ a avaliação em a, ou seja, $\mathrm{E}_a(f(x)) = f(a)$. Então E_a é uma transformação linear. Também temos a transformação linear $\overline{\mathrm{E}}_a$: $V \to V$, em que $\overline{\mathrm{E}}_a(f(x))$ é a função constante cujo valor é $f(a)$.
- Seja D: $V \to V$ a diferenciação, isto é, $\mathrm{D}(f(x)) = f'(x)$. Então D é uma transformação linear.

- Para um número real a, seja $\mathrm{I}_a \colon V \to V$ a integração definida começando em $t = a$, ou seja,

$$\mathrm{I}_a(f)(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

  Então I_a é uma transformação linear.
- Também temos a transformação linear $I_a^b = \mathrm{E}_b \circ \mathrm{I}_a$. Dessa forma

$$I_a^b(f(x)) = (\mathrm{E}_b \circ \mathrm{I}_a)(f(x)) = \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema (Fundamental do Cálculo)

1. $\mathrm{D} \circ \mathsf{I}_a = \mathsf{I}$.
2. $\mathsf{I}_a \circ \mathrm{D} = \mathsf{I} - \overline{\mathrm{E}}_a$.

Exemplo

Suponha $V = \mathbb{K}[x]$. Podemos definir uma derivada formal em V da seguinte maneira: Se $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, fazemos $D[p(x)] = p'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$. O leitor pode verificar facilmente que esse mapa, que é denominado derivação formal em $\mathbb{K}[x]$, é uma transformação linear.

Exemplo

Suponha $V = \mathcal{R}(B)$. Então $T(f) = \int_B f dA$. É uma transformação linear de V para $\mathbb{R}$.

Exemplo

Se X é uma variável aleatória com função de densidade de probabilidade de $f(x)$, o valor esperado é definido como a integral:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx,$$

é um funcional linear.

Seja $V = \mathbb{K}^\infty$. Definimos o shift para a esquerda $\mathrm{L}: V \to V$ e o shift para a direita $\mathrm{R}: V \to V$ como

$$\mathrm{L}([a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots]) = [a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots],$$

$$\mathrm{R}([a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots]) = [0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots].$$

Observamos que L e R são transformações lineares.

Podemos restringir L e R para o subespaço $W = (\mathbb{K}^\infty)_0$ de V. E assim obter que $\mathrm{L}: W \to W$ e $\mathrm{R}: W \to W$ também são transformações lineares.

Nesse mesmo exemplo vimos que $\underline{\mathrm{B}} = \{\mathbf{e}_i, i \in \mathbb{N}\}$ onde $\mathbf{e}_i = \underbrace{(0, \ldots, 1, \ldots,)}_{\text{1 na i-ésima posição}}$ é uma base de $(\mathbb{K}^\infty)_0$.

As transformações L e R agem do seguinte modo nos vetores da base:

$$\mathrm{R}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i+1} \tag{1}$$

$$\mathrm{L}(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} \mathbf{e}_{i-1} & \text{se } i > 1 \\ \mathbf{0} & \text{se } i = 1 \end{cases} \tag{2}$$

$$\mathbf{e}_1 \xrightarrow{\mathrm{R}} \mathbf{e}_2 \xrightarrow{\mathrm{R}} \mathbf{e}_3 \xrightarrow{\mathrm{R}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{R}} \mathbf{e}_n \xrightarrow{\mathrm{R}} \mathbf{e}_{n+1} \xrightarrow{\mathrm{R}} \ldots$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow[\mathrm{L}]{} \mathbf{e}_1 \xleftarrow[\mathrm{L}]{} \mathbf{e}_2 \xleftarrow[\mathrm{L}]{} \mathbf{e}_3 \xleftarrow[\mathrm{L}]{} \ldots \xleftarrow[\mathrm{L}]{} \mathbf{e}_n \xleftarrow[\mathrm{L}]{} \mathbf{e}_{n+1} \xleftarrow[\mathrm{L}]{} \ldots$$

Proposição

Sejam $T, S : V \to W$ *e* $L : W \to Z$ *transformações lineares e* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. *Então*

a. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
b. *A a composta* $L \circ T : V \to Z$ *é uma transformação linear.*
c. $\lambda_1 T + \lambda_2 S$ *é uma transformação linear de* V *em* W.
d. *Se* T *for invertível, então* $T^{-1} : W \to V$ *é uma transformação linear.*

c Se $a, b \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, então

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 T + \lambda_2 S)(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) &= \lambda_1 T(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) + \lambda_2 S(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) && (3)\\
&= \lambda_1 a T(\mathbf{x}) + \lambda_1 b T(\mathbf{y}) + \lambda_2 a S(\mathbf{x}) + \lambda_2 b S(\mathbf{y}) && (4)\\
&= a(\lambda_1 T(\mathbf{x}) + \lambda_2 S(\mathbf{x})) + b(\lambda_1 T(\mathbf{y}) + \lambda_2 S(\mathbf{y})) && (5)\\
&= a(\lambda_1 T + \lambda_2 S)(\mathbf{x}) + b(\lambda_1 T + \lambda_2 S)\mathbf{y}). && (6)
\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda_1 T + \lambda_2 S$ é linear d Seja $T : V \to W$ uma transformação linear bijetiva. Então $T^{-1} : W \to V$ é uma função bem definida e, já que quaisquer dois vetores $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$ em W têm o formato $\mathbf{y}_1 = T\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{y}_2 = T\mathbf{x}_2$, temos

$$
\begin{aligned}
T^{-1}(\lambda_1\mathbf{y}_1 + \lambda_2\mathbf{y}_2) &= T^{-1}(\lambda_1 T\mathbf{x}_1 + \lambda_2 T\mathbf{x}_2) && (7)\\
&= T^{-1}(T(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2)) && (8)\\
&= \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 && (9)\\
&= \lambda_1 T^{-1}(\mathbf{y}_1) + \lambda_2 T^{-1}(\mathbf{y}_2) && (10)
\end{aligned}
$$

o que mostra que T^{-1} é linear.

Neste ponto, vamos introduzir um nome para a coleção de todas as transformações lineares de V para W.

Definição (Espaço das Transformações Lineares)

Seja V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. O espaço vetorial de todas as transformações lineares de V para W será denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ou $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(V, W)$. E o conjunto de todos os operadores lineares em V será denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V)$.

Quando o corpo base $\mathbb{K}$ estiver claro a partir do contexto, escreveremos simplesmente $\operatorname{Hom}(V, W)$ em vez de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Portanto, $\operatorname{Hom}(V, W)$ é o subespaço do espaço vetorial W^V consistindo em todas as transformações lineares de V para W.

Teorema

$\operatorname{Hom}(V, W)$ *é um subespaço vetorial de* W^V.

Como qualquer $T \in \operatorname{Hom}(V, W)$ tem a propriedade que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, temos que $\operatorname{Hom}(V, W)$ é um subespaço próprio de W^V sempre que $W \neq \{\mathbf{0}\}$.

Definição (Núcleo e Imagem)

Seja $T \in \mathrm{Hom}(V,\ W)$.

1. *O subespaço*

$$\ker T = \{v \in V | T\mathbf{v} = 0\}$$

   é denominado ***núcleo*** *de* T

2. *O subespaço*

$$\mathrm{im}\, T = \{T\mathbf{v} | \mathbf{v} \in V\}$$

   é denominado ***imagem*** *de* T.

3. *A dimensão do* $\ker T$ *é a* ***nulidade*** *de* T *e é denotada por* $\mathrm{nul}\, T$.
4. *A dimensão de* $\mathrm{im}\, T$ *é o* ***posto*** *de* T *e é indicada por* $\mathrm{rank}\, T$.

É um exercício de rotina mostrar que $\ker T$ é um subespaço de V e que $\operatorname{im} T$ é um subespaço de W. Além disso, temos o seguinte.

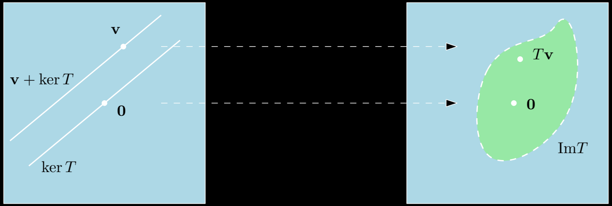


Figura 1: Uma aplicação linear $T : V \to W$ envia todos os pontos de uma classe $\mathbf{v} + \ker T$ do núcleo para um único ponto $T\mathbf{v}$ em W. Diferentes classes são mapeadas para diferentes pontos, e todas as imagens formam $\Im T$. a classe do zero $\mathbf{0} + \ker T$ colapsa na origem $0 \in W'$

Teorema

Seja $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. *Então*

a. T *é injetiva se e somente se* $\ker T = \{0\}$

b. T *é sobrejetiva se e somente se* $\operatorname{im} T = W$

Demonstração. Para ver a validade da primeira afirmação, observe que $T\mathbf{u} = T\mathbf{v} \Leftrightarrow T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \ker T$ Portanto, se $\ker T = \{\mathbf{0}\}$, $T\mathbf{u} = T\mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$, o que mostra que T é injetiva. Por outro lado, se T for injetiva e $\mathbf{u} \in \ker T$, $T\mathbf{u} = T\mathbf{0}$ e, portanto, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Isso mostra que $\ker T = \{\mathbf{0}\}$.

A segunda afirmação é direta da definição de sobrejetividade. $\triangleleft$

O seguinte teorema é extremamente útil

Teorema (da Extensão por Linearidade)

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e suponha $\underline{x} = (\mathbf{x}_i \mid i \in I)$ é uma base de V. Se $(\mathbf{y}_i \mid i \in I)$ é qualquer subconjunto de W, existe uma única $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ tal que $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$ para todos os $i \in I$.

Vamos estender T a V por linearidade, ou seja,

$$\begin{aligned} T(x_1\mathbf{x}_1 + \cdots + x_n\mathbf{x}_n) &= x_1T(\mathbf{x}_1) + \cdots + x_nT(\mathbf{x}_n) \\ &= x_1\mathbf{y}_1 + \cdots + x_n\mathbf{y}_n \end{aligned}$$

Esse processo fornece uma única transformação linear. Vejamos detalhadamente como:

Seja $\mathbf{x} \in V$. Então

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{x}_i,$$

onde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são escalares únicamente determinados. Definimos $T : V \to W$ por $T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{y}_i$ motivado pelos argumentos anteriores.

□ T é linear: Suponha que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então escrevemos

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{x}_i \text{ e } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{x}_i$$

Logo

$$\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda u_i + v_i) \mathbf{x}_i.$$

Então

$$T(\lambda \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda u_i + v_i) \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{y}_i + \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{y}_i = \lambda T(u) + T(v) \ .$$

□ Claramente

$$T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

□ T é única: Suponha que $S : V \to W$ é linear e $S(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Então para $\mathbf{x} \in V$ com

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{x}_i,$$

temos

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i S(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{y}_i = T(\mathbf{x}).$$

Logo $S = T$.

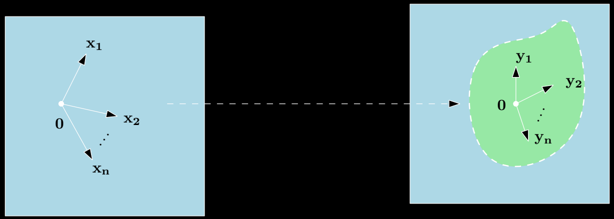


Figura 2: Uma aplicação linear $T : V \to W$ fica completamente determinada pelos valores que assume numa base. Essa é uma ferramenta útil para construirmos transformações lineares.

O teorema anterior admite a seguinte generalização para conjuntos linearmente independentes.

Teorema (da Extensão para Conjuntos Linearmente Independentes)

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e suponha $\{\mathbf{x}_i \mid i \in I\}$ é um conjunto linearmente independente de V. Se $\{\mathbf{y}_i \mid i \in I\}$ é qualquer subconjunto de W, existe $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ tal que $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$ para todos os $i \in I$.

Essa transformação não é necessariamente única.

Teorema

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, e suponha que V tenha dimensão finita $\dim V = n$. Então todas as bases ordenadas $\underline{x}$ de V determinam um isomorfismo $\tau(\underline{x}) : \mathrm{Hom}(V, W) \to W^n$.

Demonstração. Seja uma base ordenada $\underline{x} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de V. Defina $\tau(\underline{x}) : \mathrm{Hom}(V, W) \to W^n$ por

$$\tau(\underline{x})(T) = (T(\mathbf{x}_1), \ldots, T(\mathbf{x}_n)).$$

O fato de que $\tau(\underline{x})$ é uma transformação linear é óbvio. Podemos definir a aplicação inversa ϕ: $W^n \to \mathrm{Hom}(V, W)$ por

$$\phi((\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)) = T,$$

Sendo T a única transformação linear que satisfaz $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$. Portanto, $\tau(\underline{x})$ é um isomorfismo. $\lhd$

Transformações de $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$

Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, o mapa de multiplicação $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ é uma transformação linear de $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$.

De fato, qualquer transformação linear $T \in \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n,\ \mathbb{K}^m)$ tem essa forma, ou seja, T é apenas multiplicação por uma matriz, por temos $(T\mathbf{e}_1|\cdots|T\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_i = \mathrm{Col}_i(T\mathbf{e}_1|\cdots|T\mathbf{e}_n) = T\mathbf{e}_i$ e então $T = T_A$, onde

$$A = \left[T\mathbf{e}_1 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; T\mathbf{e}_n\right]$$

Teorema

a. *Se A for uma matriz de $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$, então $T_A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.*

b. *Se $T \in \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, então $T = T_A$, em que*

$$A = \left[T\mathbf{e}_1 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; T\mathbf{e}_n \right]$$

A matriz A é denominada matriz de T.

Exemplos

Vamos considerar algumas transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e descrever seu comportamento geométrico.

- A primeira é a homotetia $H_\lambda[v] = \lambda v$ que multiplica todos os vetores em $\mathbb{R}^2$ por λ. Essa transformação admite a mesma representação matricial em todas as bases:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

- A segunda é a homotetia por fatores diferentes. Nesse caso seja $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Seja $H_{\lambda,\mu}$ a única transformação linear tal que $H_{\lambda,\mu}\mathbf{e}_1 = \lambda\mathbf{e}_1$e $H_{\lambda,\mu}\mathbf{e}_2 = \mu\mathbf{e}_2$. Essa transformação admite a seguinte representação matricial na base canônica

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

- Uma rotação em $\mathbb{R}^2$ pelo ângulo θ denotada R_θ é a transformação que na base canônica é representada pela matriz

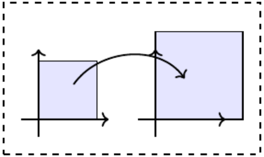
$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Reflexão no reta xy. Seja a transformação que deixa o eixo x invariante e reflete o eixo y em torno de x. Seja $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$ então essa transformação é caracterizada por $T\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$ e $T\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2$ e admite a seguinte representação matricial na base canônica.

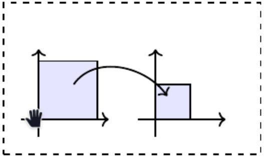
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Uma transformação de cisalhamento é uma transformação do plano com a propriedade de que existe um vetor $\mathbf{e}_1$, tal que $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$ e $T(\mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_2$ é um múltiplo de $\mathbf{e}_1$ para todo$\mathbf{e}_2$. Ou seja, é o mapa linear que leva $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \mapsto (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 + m\mathbf{e}_1)$. Nessa base

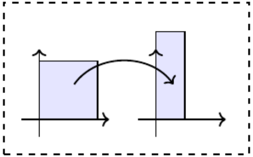
$$C_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 . m} = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



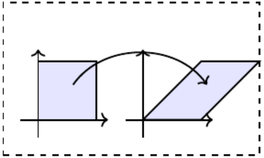
$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$



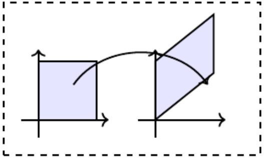
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



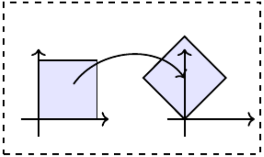
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

O resultado do Teorema 12 pode ser generalizado para $(\mathbb{K}^\infty)_0$. Nesse caso se matrizes infinitas são usadas para descrever mapas lineares, somente as matrizes cujas colunas têm apenas um número finito de entradas diferentes de zero podem ser usadas.

Se uma matriz A descreve uma transformação linear $T : (\mathbb{K}^\infty)_0 \to (\mathbb{K}^\infty)_0$ então as colunas de A descrevem as imagens por T dos vetores da base, e isso só faz sentido se essas colunas tiverem um número finito de entradas diferentes de zero.

Entretanto, não há restrição nas linhas de A: no produto $A\mathbf{v}$, existem apenas finitos coeficientes diferentes de $\mathbf{v}$ envolvidos; portanto, cada uma de suas entradas, mesmo que seja dada como uma quantidade infinita de entradas, envolve apenas um número finito de termos diferentes de zero e, portanto, está bem definido. Os produtos de duas matrizes desse tipo estão bem definidos e correspondem à composição de mapas lineares.

Exemplo

O shift para a esquerda admite a representação matricial

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Comentários Finais.