Álgebra Linear Avançada

Isomorfismos

Daniel Miranda Machado

8 de Outubro

UFABC

Isomorfismos

Isomorfismo

Definição (Isomorfismo)

Uma transformação linear bijetiva $T : V \to W$ é dita **isomorfismo** *de V a W. Quando existe um isomorfismo de V a W, dizemos que V e W são isomorfos e escrevemos $V \cong W$.*

Dois objetos espaços vetoriais V e W são isomorfos se "forem essencialmente os mesmos", pelo menos do ponto de vista vetorial, o que significa que uma vez podem identificá-los um com o outro de uma maneira razoável.

Exemplo

1. Seja V um espaço vetorial então a aplicação identidade $\mathrm{I}_V : V \to V$ é um isomorfismo. E assim
$$V \cong V$$

2. Se $T : V \to W$ é um isomorfismo então $T^{-1} : W \to V$ é um isomorfismo. Ou seja
$$V \cong W \Leftrightarrow W \cong V$$

3. Se $T : V \to W$ e $S : W \to Z$ são isomorfismos então $S \circ T : V \to Z$ é um isomorfismo. Ou seja
$$V \cong W \text{ e } W \cong Z \Rightarrow V \cong Z$$

Logo o isomorfismo é uma relação de equivalência no conjunto de todos os espaços vetoriais sobre um corpo.

Exemplo

$\mathbb{K}_n \cong \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ através da transposição $A \to A^t$. Já mencionamos que $\mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Assim, os espaços vetoriais $\mathbb{K}_n$, $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ e $\mathbb{K}^n$ são isomorfos entre si.

$$\mathbb{K}_n \cong \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n$$

Notação

A partir desse ponto, os vetores em $\mathbb{K}^n$ serão representados por vetores linhas ou colunas!

Ou seja, $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ poderá ser escrito como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Mostramos que dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n então V é isomorfo a $\mathbb{K}^n$,

$$V \cong \mathbb{K}^n.$$

E consequentemente todos os espaços vetoriais de dimensão n são isomorfos entre si, i.e., a menos de isomorfismo existe um único espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$.

Exemplo: V^n

Neste exemplo, construímos um espaço vetorial isomorfo a V^n.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e seja $n \in \mathbb{N}$. Considere a soma direta

$$\underbrace{V \boxplus \cdots \boxplus V}_{n \text{ vezes}}$$

Suponha que A seja qualquer conjunto finito com cardinalidade n. Sem perda de generalidade, podemos assumir $A = \{1, \ldots, n\}$. Então $V^A = V^n$.

Existe um isomorfismo natural $T : V \boxplus \cdots \boxplus V \to V^n$ dado por $T((\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)) = f \in V^n$, onde $f(i) = \mathbf{x}_i$ para todos os $i = 1, \ldots, n$.

O fato de que T é um isomorfismo é um exercício fácil, que deixamos ao leitor. Assim

$$V^n \cong \underbrace{V \boxplus \cdots \boxplus V}_{n \text{ vezes}}$$

Observe que para definirmos o isomorfismo anterior não tivemos que realizar nenhuma escolha de bases!!!

Notação (Isomorfismo natural)

*Apesar da palavra "**natural**"possuir um significado preciso na Teoria das Categorias, em nosso uso queremos dizer apenas que o isomorfismo não depende da escolha de bases. Se um isomorfismo depender de uma base diremos que o isomorfismo é **acidental**.*

*Usaremos a palavra "**canônico**"para referir a uma escolha ou representação bem usual. Como a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Destacamos que o uso do termo canônico não é pacificado na literatura sendo algumas vezes usado nesse sentido e outras vezes usado como sinônimo de natural.*

A partir desse ponto, identificaremos os espaços vetoriais $V \boxplus \cdots \boxplus V$ (n vezes), V^n e V^A com $|A| = n$ e escreva apenas V^n para representar qualquer um desses espaços.

Exemplo

Dado $(\mathbb{K}^\infty)_0 = \{$sequências sobre $\mathbb{K}$ com com um número finito de termos não nulos$\}$, então

$$\mathbb{K}[x] \simeq (\mathbb{K}^\infty)_0$$

Um isomorfismo é dado por:

$$T[a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n] = [a_0, a_1, \ldots a_n, 0, \ldots]$$

Os espaços vetoriais isomorfos compartilham muitas propriedades, como mostra o próximo teorema. Se $T \in \mathrm{Hom}(V,\ W)$ e $S \subseteq V$, escreveremos $TS = \{Ts | s \in S\}$

Teorema

Sejam $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *um isomorfismo e* $S \subseteq V$*. Então*

a. S *gera* V *se e somente se* $T(S)$ *gera* W.
b. S *é linearmente independente em* V *se e somente se* $T(S)$ *for linearmente independente em* W.

Um isomorfismo pode ser caracterizado como uma transformação linear $T : V \to W$ que mapeia uma base para V para uma base para W.

Teorema

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Então

- **a** *uma transformação linear $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ é um isomorfismo se e somente se existir uma base $\underline{B}$ para V de modo que $T(\underline{B})$ é uma base para W. Nesse caso, T mapeia qualquer base de V para uma base de W.*
- **b** *$V \cong W$ se e somente se $\dim V = \dim W$.*

Teorema (de Classificação dos Espaços Vetoriais)

a. *Se n é um número natural, então qualquer espaço vetorial n-dimensional sobre* $\mathbb{K}$ *é isomorfo a* $\mathbb{K}^n$.

b. *Se* κ *é qualquer número cardinal e se B for um conjunto de cardinalidade* κ*, qualquer espaço vetorial dimensional* κ *sobre* $\mathbb{K}$ *é isomorfo ao espaço vetorial* $(\mathbb{K}^B)_0$ *de todas as funções de B com valores em* $\mathbb{K}$ *e com suporte finito.*

Demonstração. No Exemplo 3, vimos que qualquer espaço vetorial n-dimensional é isomorfo a $\mathbb{K}^n$.

Assim, suponha que B seja um conjunto de cardinalidade κ e permita que $(\mathbb{K}^B)_0$ seja o espaço vetorial de todas as funções de B a $\mathbb{K}$ com suporte finito. Deixamos ao leitor mostrar que as funções $\delta_b \in (\mathbb{K}^B)_0$ definidas para todos os $b \in B$ por

$$\delta_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = b \\ 0 & \text{se } x \neq b \end{cases}$$

formam uma base para $(\mathbb{K}^B)_0$, denominada base canônica. Portanto, $\dim\left((\mathbb{K}^B)_0\right) = |B|$.

Segue-se que, para qualquer número cardinal κ, existe um espaço vetorial da dimensão κ. Além disso, qualquer espaço vetorial da dimensão κ é isomorfo a $(\mathbb{K}^B)_0$. $\triangleleft$

Comentários Finais.