# Álgebra Linear Avançada

## Teorema do Núcleo Imagem

Daniel Miranda Machado

18 de Setembro

UFABC

# Teorema do Núcleo-Imagem

**Teorema**

*Teorema do Núcleo-Imagem: Sejam $U$ e $V$ espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $K$. Considerando a transformação linear $T : U \to V$, então:*

$$\dim(U) = dim(\ker(T)) + dim(Im(T))$$

# Primeira Demonstração

Seja $\underline{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ uma base para o núcleo de $T$, ou seja, $\dim(\ker(T)) = r$. O núcleo de $T$ é um subespaço de $U$. Pelo Teorema da Extensão, a base $\underline{B}_1$ pode ser completada até obtermos uma base para $U$, $\underline{B}_2 = \{\mathbf{u}_1, \ldots,\ \mathbf{u}_r,\ v_1, \ldots,\ \mathbf{v}_s\}$. Vamos mostrar que $\underline{B} = \{T(\mathbf{v}_1), \ldots,\ T(\mathbf{v}_s)\}$ é uma base para a imagem de $T$.

Dado $\mathbf{v} \in \Im(T)$, então existe $u \in U$ tal que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$. Mas, o vetor $u$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base $B_2$ de $U$, ou seja,

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_r\mathbf{u}_r + \beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_s\mathbf{v}_s$$

Logo

$$\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) = T(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_r\mathbf{u}_r + \beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_s\mathbf{v}_s) = \tag{1}$$
$$= \alpha_1 T(\mathbf{u}_1) + \ldots + \alpha_r T(\mathbf{u}_r) + \beta_1 T(\mathbf{v}_1) + \ldots + \beta_s T(\mathbf{v}_s) = \beta_1 T(\mathbf{v}_1) + \ldots + \beta_s T(\mathbf{v}) \tag{2}$$

pois, como $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ pertencem ao núcleo de $T$, então $T(\mathbf{u}_1), \ldots, T(\mathbf{u}_r) = \mathbf{0}$.

Assim, dado um $\mathbf{v} \in \Im(T)$ , mostramos que ele pode ser escrito como combinação linear dos elementos do conjunto $B$, logo, $\Im(T) = [\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_s)\}]$;

Falta mostrar que $B$ é L.I. Considere a combinação linear nula:

$$\beta_1 T(\mathbf{v}_1) + \ldots + \beta_s T(\mathbf{v}_s) = \mathbf{0} \Rightarrow T(\beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_s \mathbf{v}_s) = 0$$

Dessa forma, $\beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_s \mathbf{v}_s \in \ker(T)$ . Logo, esse elemento pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base do núcleo, $\underline{B}_1$:

$$\beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_s \mathbf{v}_s = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{u}_r \Rightarrow \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_r \mathbf{u}_r + (-\beta_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (-\beta_s)\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

Como $\underline{B}_2 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r,\ \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ é base de $U$, então é L.I., logo todos os escalares da última igualdade são nulos. E logo $\beta_1 == \beta_s = 0$. Assim, provamos que $\underline{B}$ é uma base para $\Im(T)$ , desta forma $dim(\Im(T)) = s$.

Como $\dim(U) = r + s$, então:

# Segunda Demonstração

Seja $T \in \mathrm{Hom}(V,\ W)$. Como qualquer subespaço de $V$ possui um complemento, podemos escrever $V = \ker T \oplus \ker T^c$ onde $\ker T^c$ é um complemento de $\ker T$ em $V$. Segue que

$$\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(\ker T^c).$$

Dessa forma a restrição de $T$ a $\ker T^c$, $T^c : \ker T^c \to W$ é injetiva, já que $\ker(T^c) = \ker T \cap \ker T^c = \{0\}$

Além disso, $\operatorname{im}(T^c) \subseteq \operatorname{im} T$. Para inclusão inversa, se $T\mathbf{v} \in \operatorname{im} T$, então como $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ para $\mathbf{u} \in \ker T$ e $\mathbf{w} \in \ker T^c$, temos

$$T\mathbf{v} = T\mathbf{u} + T\mathbf{w} = T\mathbf{w} = T^c\mathbf{w} \in \operatorname{im}(T^c)$$

Assim, $\operatorname{im}(T^c) = \operatorname{im} T$. Segue que

$$\ker T^c \cong \operatorname{im}(T)$$

Provamos o seguinte teorema:

**Teorema (Teorema do Núcleo-Imagem)**

*Seja* $T \in \mathrm{Hom}(V,\ W)$.

a *Qualquer complemento de* $\ker T$ *é isomorfo a* $\mathrm{im}\, T$

b $\dim(\ker T) + \dim(\mathrm{im}(T)) = \dim(V)$

Se $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, como a imagem de $T_A$ é o espaço da coluna de $A$, temos

$$\dim\left(\ker\left(T_A\right)\right) + \mathrm{rank}(A) = \dim\left(\mathbb{K}^n\right)$$

Isso fornece o seguinte resultado útil.

**Teorema**

*Seja* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$*:*

1. $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *é injetiva se e somente se* $\operatorname{rank}(A) = n$.
2. $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *é sobrejetiva se e somente se* $\operatorname{rank}(A) = m$.

**Teorema**

*Sejam $V$ e $W$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e suponha que $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Então*

a. *Se $T$ for sobrejetiva então $\dim V \geq \dim W$.*
b. *Se $\dim V = \dim W < \infty$, $T$ é um isomorfismo se, e somente se $T$ for injetiva ou $T$ for sobrejetiva.*

**DEMONSTRAÇÃO.**

a Segue imediatamente do Teorema ??.

b Se $T$ é um isomorfismo então $T$ é injetiva e sobrejetiva. Se $T$ é injetiva $\ker T = \mathbf{0}$ e pelo Teorema do Núcleo-Imagem $\dim \operatorname{im} T = n$ e logo $\operatorname{im} T = W$ e é isomorfismo. Se $T$ é sobrejetiva $\operatorname{im} T = W$ e pelo Teorema do Núcleo-Imagem $\dim \ker T = 0$ e logo $T$ é isomorfismo.

$\lhd$

Observe o resultado do b não é verdadeiro se os espaços vetoriais não tiverem dimensões finitas.

**Proposição**

*Se* $U \xrightarrow{\;T\;} V \xrightarrow{\;S\;} W$ *são espaços vetoriais de dimensão finita e aplicações lineares, então*

$$\dim \ker (S \circ T) \leq \dim \ker S + \dim \ker T.$$

**Demonstração.** A demonstração será deixada como exercício. $\triangleleft$

# Complexos de Cadeias

Terminamos esta seção com uma generalização do Teorema 2 $\boxed{b}$. Precisamos da seguinte definição.

**Definição (Complexo de Cadeias)**

*Um **complexo de cadeias** $C = \{(V_i, d_i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ de espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, é uma sequência infinita $\{V_i\}$ de espaços vetoriais $V_i$, um para cada número inteiro $i \in \mathbb{Z}$, juntamente com uma sequência $\{d_i\}$ de transformações lineares, $d_i \in \mathrm{Hom}(V_i, V_{i-1})$ para $i \in \mathbb{Z}$, de modo que $d_{i+1}d_i = 0$ para todos os $i \in \mathbb{Z}$.*

A condição $d_{i+1}d_i = 0$ nos diz que $\Im d_{i+1} \subset \ker d_i$

Geralmente, desenhamos um complexo de cadeias como uma sequência infinita de espaços e mapas da seguinte maneira:

$$C : \cdots \longrightarrow V_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} V_i \xrightarrow{d_1} V_{i-1} \longrightarrow \cdots \tag{3}$$

Se um complexo de cadeias $C$ tiver apenas um número finito de termos diferentes de zero, poderemos simplificar a notação e escrever $C$ como

$$C : 0 \longrightarrow V_n \xrightarrow{d_n} V_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \longrightarrow V_1 \xrightarrow{d_1} V_0 \longrightarrow 0 \tag{4}$$

Entende-se aqui que todos os outros espaços vetoriais e mapas que não aparecem explicitamente na Equação 4 são zero.

**Definição (Exato)**

*Um complexo de cadeias*

$$C : \cdots \longrightarrow V_{i+1} \xrightarrow{d_{1+1}} V^{i} \xrightarrow{d_i} V_{i-1} \longrightarrow \cdots \tag{5}$$

*é dito* ***exato*** *se* $\operatorname{im} d_{i+1} = \ker d_i$ *para cada* $i \in \mathbb{Z}$.

**Proposição**

*Seja $T : X \to Y$ um operador linear. Então:*

1. *A sequência $X \to^{T} Y \to 0$ é exata se e somente se $T$ é sobrejetivo.*
2. *A sequência $0 \to X \to^{T} Y$ é exata se e somente se $T$ é injetivo.*
3. *A sequência $0 \to X \to^{T} Y \to 0$ é exata se e somente se $T$ for bijetivo.*

**Exemplo**

Sejam $V$ e $W$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, e seja $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Então

$$C : 0 \longrightarrow \ker T \xrightarrow{i} V \xrightarrow{T} \operatorname{im} T \longrightarrow 0 \tag{6}$$

é um complexo de cadeia exato. Na equação anterior $i$ indica a inclusão de $\ker T$ em $V$.

Podemos generalizar o Teorema ?? ligeiramente a seguir:

**Definição (Sequência Exata Curta)**

*Uma* ***sequência exata curta****, é um complexo de cadeia exato* $C$ *da seguinte forma:*

$$C : 0 \longrightarrow V_2 \xrightarrow{d_2} V_1 \xrightarrow{d_1} V_0 \longrightarrow 0 \tag{7}$$

Portanto, no exemplo temos uma sequência exata curta com $V_2 = \ker T, \mathrm{d}_2 = i, V_1 = V$ etc. Claramente, o complexo de cadeia $C$ da Equação 7 é uma sequência exata curta se e somente se $d_2$ é injetiva, $d_1$ é sobrejetiva e $\operatorname{im} d_2 = \ker d_1$.

O Teorema 2 c implica que, se $C$ for uma sequência exata curta, $\dim V_2 - \dim V_1 + \dim V_0 = 0$. Agora podemos provar a seguinte generalização desse resultado:

**Teorema**

*Suponha que*

$$C : 0 \longrightarrow V_n \xrightarrow{d_n} V_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \longrightarrow V_1 \xrightarrow{d_1} V_0 \longrightarrow 0 \tag{8}$$

*seja um complexo de cadeia exato. Então* $\sum_{i=0}^{n} (-1)^1 \dim V_i = 0$.

**Demonstração.** O complexo de cadeias $C$ se decompõe nas seguintes sequências exatas curtas

$$C_1 : 0 \longrightarrow \ker d_1 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{d_1} V_0 \longrightarrow 0 \tag{9}$$

$$C_2 : 0 \longrightarrow \ker d_2 \longrightarrow V_2 \xrightarrow{d_2} \ker d_1 \longrightarrow 0$$

$$\vdots$$

$$C_n : 0 \longrightarrow \ker d_n \longrightarrow V_n \xrightarrow{d_n} \ker d_{n-1} \longrightarrow 0$$

Aplicando o Teorema 2 c a cada $C_i$ e adicionarmos os resultados, obteremos $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim V_i = 0.$ ◁

# Comentários Finais.