Álgebra Linear Avançada

Somas Diretas e Projeções

Daniel Miranda Machado

18 de Setembro

UFABC

Soma Direta de Transformações Lineares

Definição (Soma Direta de Transformações Lineares)

Suponha que $U = V \oplus W$ *e* $T_1 : V \to V$ *e* $T_2 : W \to W$ *sejam transformações lineares. A soma direta de* T_1 *e* T_2*, é a transformação linear* $T_1 \oplus T_2$ *de* U *para* U *definida por*

$$T_1 \oplus T_2(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T_1(\mathbf{v}) + T_2(\mathbf{v})$$

Observamos que os subespaços V e W são invariantes por $T_1 \oplus T_2$, ou seja, $T_1 \oplus T_2(V) \subseteq V$ e $T_1 \oplus T_2(W) \subseteq W$.

Dadas duas listas ordenadas $\underline{L}_1 = (a_1 \ \ldots, \ a_n)$ e $\underline{L}_2 = (b_1 \ \ldots, \ b_m)$ a **concatenação** de $\underline{L}_1$ e $\underline{L}_1$ denotada $\underline{L}_1 + \!\!\!+ \underline{L}_1$ é a lista ordenada

$$\underline{L}_1 + \!\!\!+ \underline{L}_1 \triangleq (a_1 \ \ldots, \ a_n, b_1 \ \ldots, \ b_m)$$

Teorema

Sejam V_i espaços vetoriais com base $\underline{B}_i = \left(\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_{k_i}}\right)$ e $\dim V_i = k_i$, para $1 \leq i \leq j$. Sejam $T_i : V_i \to V_i$ transformações lineares. Finalmente seja

$$T_1 \oplus \cdots \oplus T_j : V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_j \to V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_j.$$

Então a representação de T na base ordenada obtida pela concatenação $\underline{B} = \underline{B}_1 \mathbin{+\!\!+} \underline{B}_2 \mathbin{+\!\!+} \cdots \mathbin{+\!\!+} \underline{B}_n$ é

$$T_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & T_j \end{bmatrix},$$

com T_i é um bloco de tamanho $k_i \times k_i$:

Demonstração. Seja $\underline{B}_i = \{\mathbf{v}_{i_1}, \ \ldots, \ \mathbf{v}_{i_{k_i}}\}$ uma base de V_i. Então

$$\underline{B} = \{\mathbf{v}_{1_1}, \ \ldots, \ \mathbf{v}_{1_{k_1}}, \ \mathbf{v}_{2_1}, \ \ldots, \ \mathbf{v}_{2_{k_2}}, \ \ldots, \ \mathbf{v}_{j_1}, \ \ldots, \ \mathbf{v}_{j_{k_j}}\}$$

é uma base de V.

Como $T(V_i) \subset V_i$ temos que

$$T(\mathbf{v}_{i_m}) = c_{1m}\mathbf{v}_{i_1} + c_{2m}\mathbf{v}_{i_2} + \cdots + c_{k_i m}\mathbf{v}_{k_i}.$$

$\triangleleft$

Por outro lado, suponha que $T : U \to U$ seja uma transformação linear que deixe os subespaços V e W invariantes, ou seja, $T(V) \subseteq V$ e $T(W) \subseteq W$. Podemos então definir uma transformação linear restrita $T_1 : V \to V$ por $T_1(v) = T(v)$ e uma transformação linear restrita $T_2 : W \to W$ por $T_2(w) = T(w)$. Então podemos escrever $T = T_1 \oplus T_2$. Se pudermos entender as transformações T_1 e T_2, obteremos uma boa imagem de T.

Definição (Subespaço Invariante)

Dado $T \in \mathrm{Hom}(V, V)$ *dizemos que um subespaço* $W \subset V$ *é* ***invariante*** *por* T *(ou ainda que* W *é* ***T-invariante****)* *se* $T(W) \subset W$.

Dado $T \in \text{Hom}(V, V)$ e $W \subset V$ um espaço T-invariante, podemos restringir T a W obtendo $T\restriction_W \in \text{Hom}(W, W)$.

Teorema

Dado um operador $T : V \to V$ e uma decomposição de V em subespaços T-invariantes

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_j.$$

com $\dim V_i = n_i$, para $1 \leq i \leq j$. Então a representação de T na base B é

$$T_{\underline{B}} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & T_j \end{bmatrix},$$

com T_i é um bloco de tamanho $k_i \times k_i$:

Portanto, se V se dividir como uma soma direta de subespaços invariantes por T, então podemos encontrar uma base de V de modo que a matriz de T seja diagonal por bloco. Da mesma forma, se uma transformação linear tiver uma forma diagonal de bloco em alguma base, então V será dividido como uma soma de subespaços invariantes.

Projeções

Definição (Projeção)

Seja $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, então para cada i existe um operador de projeção natural $P_i \colon V \to V_i$:

$$P_i(\mathbf{v}) = P_i\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{v}_j\right) = \mathbf{v}_i$$

P_i é denominado projeção de V em V_i ao longo do subespaço complementar $\oplus_{j \neq i} V_j$.

Várias propriedades desses operadores de projeção são facilmente verificadas.

Proposição

As projeções P_i associadas a uma decomposição de soma direta $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ têm as seguintes propriedades.

a *Linearidade: Cada $P_i : V \to V$ é um operador linear;*

b *Propriedade Idempotente: $P_i^2 = P_i \circ P_i = P_i$ para todos os i;*

c $P_i \circ P_j = 0$ *se* $i \neq j$;

d $\mathrm{im}(P_i) = V_i$ *e* $\ker P_i = \sum_{j \neq i} V_j$;

e $P_1 + \ldots + P_n = I_V$.

Se representarmos os vetores $v \in V$ como n-tuplas $(\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_n)$ no conjunto de produtos cartesianos $V_1 \times \ldots \times V_n$, a i-ésima projeção assume a forma

$$P_i(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = (0,\ 0,\ \mathbf{v}_i,\ 0,\ 0) \in V_i \subseteq V.$$

Não se deixe enganar por esta notação ao pensar que estamos falando de projeções ortogonais nos subespaços ortogonais em $\mathbb{R}^n$.

Proposição

Seja $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, *então a projeção* $P_i \colon V \to V_i$ *pode ser escrito como a soma direta*

$$P_i = 0_{V_1} \oplus 0_{V_2} \oplus \cdots I_{V_i} \oplus \cdots \oplus 0_{V_n}$$

Se $\underline{B}_i$ *é base de* V_1, $r_i = |B_i|$ *e* $\underline{B}$ *a base ordenada obtida pela concatenação* $\underline{B}_1 \mathbin{+\!\!+} \underline{B}_2 \mathbin{+\!\!+} \cdots \mathbin{+\!\!+} \underline{B}_n$ *então*

$$[P_i]_{\underline{B},\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0_{r_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{r_i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0_{r_n} \end{bmatrix}$$

A propriedade de ser idempotente $P^2 = P$ para um operador linear é característico das projeções associadas a uma decomposição de soma direta $V = V_1 \oplus V_2$. Já vimos que, se $P, Q = (I - P)$ são as projeções associadas a essa decomposição, então

1. $P^2 = P$ e $Q^2 = Q$
2. $PQ = QP = 0$
3. $P + Q = I$ (operador de identidade)

A recíproca também é verdadeiro.

Proposição

Se $P : V \to V$, é um operador linear idempotente, i.e., $P^2 = P$, então V é soma direta $V = \operatorname{im} P \oplus \ker P$ e P é a projeção de V em $\operatorname{im} P$, ao longo de $\ker P$. O operador $Q = \mathrm{I} - P$ também é idempotente, com

$$\operatorname{im} Q = \operatorname{im} \mathrm{I} - P = \ker P \text{ e } \ker Q = \ker(\mathrm{I} - P) = \operatorname{im} P,$$

e projeta V em $\operatorname{im} Q = \ker P$ ao longo de $\ker Q = \operatorname{im} P$.

Demonstração

Primeiro observe que $Q = \mathrm{I} - P$ também é idempotente, pois

$$(\mathrm{I} - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = \mathrm{I} - P$$

Em seguida, observe que

$$\mathbf{v} \in \ker Q \Leftrightarrow Q\,\mathrm{I}\,\mathbf{v} = (\mathrm{I} - P)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow P(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in \operatorname{im} P\ .$$

Por outro lado, se $\mathbf{v} \in \operatorname{im} P$, então $\mathbf{v} = P\mathbf{w}$ para algum $\mathbf{w}$ e, logo $P\mathbf{v} = P^2(\mathbf{w}) = P\mathbf{w} = \mathbf{v}$, provando assim

- $\ker Q = \ker(I - P) = \operatorname{im} P$
- $\operatorname{im} Q = \operatorname{im}(I - P) = \ker P,$

Obviamente, $P+Q=I$ porque $\mathbf{v}=P\mathbf{v}+(I-P)\mathbf{v}$ implica que $P\mathbf{v}\in \operatorname{im} P$, enquanto $(I-P)\mathbf{v}\in \operatorname{im}(Q)=\ker P$. Portanto, $\operatorname{im} P+\ker P=\operatorname{im} P+\operatorname{im} Q$ é todo V. Além disso, $\ker P\cap \operatorname{im} P=\{\mathbf{0}\}$, pois se $\mathbf{v}$ estiver na intersecção, temos $\mathbf{v}\in \ker P\Rightarrow P\mathbf{v}=0$. Mas também temos $v\in \operatorname{im} P$, então $\mathbf{v}=Pw$ para algum $\mathbf{w}$ e, assim

$$0=P\mathbf{v}=P^2\mathbf{w}=P\mathbf{w}=\mathbf{v}.$$

E logo $V=\operatorname{im} P\oplus \ker P$.

Comentários Finais.