Álgebra Linear Avançada

Teoremas de Isomorfismo

Daniel Miranda Machado

24 de Setembro

UFABC

Teoremas de Isomorfismo

Propriedade Universal do Quociente

Teorema (Propriedade Universal do Quociente)

Sejam S um subespaço de V e $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ satisfazendo $S \subseteq \ker(T)$. Então, existe uma única transformação linear $\overline{T} : V/S \to W$ que faz o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/S \arrow[ru, "\overline{T}"'] & \end{tikzcd},$$

ou seja, com a propriedade que $\overline{T} \circ \pi_S = T$.

Além disso, $\ker(\overline{T}) = \ker T/S$ e $\mathrm{im}(\overline{T}) = \mathrm{im}\, T$.

Demonstração

Não temos outra opção senão definir $\overline{T}$ pela condição $\overline{T} \circ \pi_S = T$, ou seja, $\overline{T}(\mathbf{v} + S) = T\mathbf{v}$. Esta função está bem definida se e somente se $\mathbf{v} + S = \mathbf{u} + S$ implicar que $\overline{T}(\mathbf{v} + S) = \overline{T}(\mathbf{u} + S)$ que é equivalente a cada uma das seguintes afirmações:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + S = \mathbf{u} + S \Rightarrow T\mathbf{v} = T\mathbf{u} \\ \mathbf{v} - \mathbf{u} \in S \Rightarrow T(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{x} \in S \Rightarrow T\mathbf{x} = 0 \\ S \subseteq \ker T \end{aligned}$$

Assim, $\overline{T} : V/S \to W$ está bem definida. Além disso,

$$\operatorname{im}(\overline{T}) = \{\overline{T}(\mathbf{v} + S) | v \in V\} = \{T\mathbf{v} | \mathbf{v} \in V\} = \operatorname{im} T \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} \ker(\overline{T}) &= \{\mathbf{v} + S | \overline{T}(\mathbf{v} + S) = 0\} \\ &= \{\mathbf{v} + S | T\mathbf{v} = 0\} \\ &= \ker T/S \end{aligned}$$

A unicidade de $\overline{T}$ é direta. Se $T' \in \operatorname{Hom}(V/W, V')$ é outra transformação tal que $T'\pi = T$ e $\overline{T} = T'$ em $\operatorname{im} H$. Mas π é sobrejetiva. Portanto, $T = T'$.

O teorema 1 possui um corolário muito importante, que é frequentemente denominado primeiro teorema do isomorfismo e é obtido tomando $S = \ker(T)$.

Primeiro Teorema de Isomorfismo

Teorema (Primeiro Teorema de Isomorfismo)

Suponha que $T \in \mathrm{Hom}(V)$. *Então* $\operatorname{im} T \cong V/\ker T$.

Demonstração

Podemos ver T como uma transformação linear sobrejetiva de V para $\operatorname{im} T$. Aplicando o Teorema 1, obtemos uma única transformação linear $\overline{T} : V/\ker T \to \operatorname{im} T$ de modo que o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{im} T \\ V/\ker T \arrow[ur, "\overline{T}"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Claramente $\overline{T}$ é um isomorfismo.

Proposição

Existe uma sequência exata $0 \longrightarrow X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z \longrightarrow 0$ *se e somente se* $Y/X \cong Z$

Demonstração

Se $Y/X \cong Z$. Então $\dim Z = \dim Y - \dim X$ e logo $\dim Y \geq \dim Z$. Logo existe $B : Y \to Z$ uma aplicação sobrejetiva. Os espaços $\ker B$ e X são isomorfos e seja A uma aplicação injetiva que leva X em $\ker B \subset Y$. Então a sequência

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z \longrightarrow 0$$

é exata.

Se a sequência é exata então o mapa $B : Y \to Z$ é sobrejetivo, e o mapa $A : X \to Y$ é injetivo com $\mathrm{im}(A) = \ker B$. Assim, o mapa $A : X \to \ker B$ é um isomorfismo.

Logo, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo $Z = \mathrm{im}\, B \cong Y/\ker B \cong Y/X$.

Segundo Teorema do Isomorfismo

O Segundo Teorema do Isomorfismo lida com múltiplos quocientes.

Suponha que W seja um subespaço de V e considere a projeção natural $\pi : V \to V/W$. Se W' for um subespaço de V contendo W, $\pi(W')$ será um subespaço de V/W. Por isso, podemos formar o espaço quociente $\frac{V/W}{\pi(W')}$.

Pelo Teorema 2, $\pi(W')$ é isomorfo a W'/W. Assim,

$$\frac{V/W}{\pi(W')} \cong \frac{(V/W)}{(W'/W)}.$$

Teorema (Segundo Teorema de Isomorfismo)

Suponha que $W \subseteq W'$ sejam subespaços de V. Então

$$\frac{V/W}{W'/W} \cong \frac{V}{W'}.$$

Sejam

$$\pi : V \to V/W \quad \text{e} \quad \pi^r : V/W \to \frac{(V/W)}{\pi(W')}$$

as projeções naturais. Defina

$$T = \pi^r \circ \pi : V \to \frac{V/W}{\pi(W')}.$$

Como π e π^r são ambos sobrejetivos, T é uma transformação linear sobrejetiva. Claramente, $W' \subseteq \ker T$. Seja $\mathbf{x} \in \ker T$. Então $\pi^r\pi(\mathbf{x}) = 0$. Assim, $\bar{\mathbf{x}} = \pi(\mathbf{x}) \in \pi(W')$. Seja $\mathbf{y} \in W'$ tal que $\pi(\mathbf{y}) = \pi(\mathbf{x})$. Então $\pi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0$.

Portanto, $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in \ker \pi = W \subseteq W'$. Em particular, $\mathbf{x} \in W'$. Agora provamos que $\ker T = W'$. Aplicando o Teorema 2, temos $\dfrac{V/W}{\pi(W')} = \operatorname{im} T \cong V/\ker T = V/W'$.

O terceiro teorema de isomorfismo lida com somas e quocientes.

Teorema (Terceiro Teorema de Isomorfismo)

Suponha que W e W' sejam subespaços de V. Então

$$\frac{W + W'}{W} \cong \frac{W'}{W \cap W'}.$$

Proposição

Suponha que V seja uma soma direta interna dos subespaços $V_1, \ldots, V_n$.

$$\frac{V}{V_i} \cong \frac{V_1 \oplus \cdots \oplus V_n}{V_i} \cong V_1 \oplus \cdots \widehat{V_i} \oplus \cdots \oplus V_n \tag{2}$$

Onde $\widehat{V_i}$ significa a omissão de V_i nesta soma.

Demonstração

Suponha que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. Como $V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = (0)$, o Teorema 5 implica

$$
\begin{aligned}
V/V_i &= (V_i + \sum_{j \neq i} V_j)/V_i && (3) \\
&\cong (\sum_{j \neq i} V_j)/(V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j)) && (4) \\
&= (\sum_{j \neq i} V_j)/(0) && (5) \\
&= V_1 \oplus \cdots \oplus \widehat{V_i} \oplus \cdots \oplus V_n && (6)
\end{aligned}
$$

Definição (Codimensão)

Seja W um subespaço de V. Então a codimensão de W em V é

$$\operatorname{codim}_V W = \dim V/W.$$

Proposição

Seja W_1 um subespaço de V. Seja W_2 qualquer complemento de W_1 em V. Então $\operatorname{codim}_V W_1 = \dim W_2$.

Demonstração. V/W_1 e W_2 são isomorfos. $\triangleleft$

Proposição

Seja V um espaço vetorial da dimensão n e W seja um subespaço de V da dimensão k. Então $\dim V/W = \operatorname{codim}_V W = n - k$.

Aqui está uma maneira importante pela qual surgem espaços quocientes.

Definição (Conúcleo)

Seja $T\colon V \to W$ uma transformação linear. Então o ***conúcleo*** *de T é o espaço quociente*

$$\operatorname{coker}(T) = W/\operatorname{im}(T).$$

Corolário

Sejam V um espaço vetorial finito dimensional e $T\colon V \to V$ uma transformação linear. Então $\dim(\ker(T)) = \dim(\operatorname{coker}(T))$.

Demonstração.

$$\dim(\ker(T)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{im}(T)) = \dim(V/\operatorname{im}(T))$$

$$= \dim(\operatorname{coker}(T)).$$

$\triangleleft$

Comentários Finais.