Álgebra Linear Avançada

Espaço Dual

Daniel Miranda Machado

24 de Setembro

UFABC

Espaços Duais

Funcional Linear

Definição (Funcional Linear)

*Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma transformação linear $f \in \mathrm{Hom}(V,\ \mathbb{K})$ é dita **funcional linear** (ou simplesmente **funcional**) em V.*

Definição (Espaço Dual)

*O espaço vetorial de todos os funcionais lineares em V é indicado por $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\ \mathbb{K})$ é denominado **espaço dual** de V.*

Exemplo

O mapa $f : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$ definido por $f(p(x)) = p(0)$ é funcional linear, conhecido como avaliação em 0.

Exemplo

Seja $C[a,\ b]$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas em $[a,\ b] \subseteq \mathbb{R}$. Seja $f : C[a,\ b] \to \mathbb{R}$ definido por $f(\alpha(x)) = \int_a^b \alpha(x)dx$ Então $f \in C[a,\ b]^*$.

Exemplo

Os vetores colunas $f \in \mathbb{K}_n$ podem ser vistos como funcionais lineares no espaço $\mathbb{K}^n$.

Dado $f \in \mathbb{K}_n$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ então definimos

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}.f = [v_1, \ldots v_n].\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Como $\operatorname{im} f \subseteq \mathbb{K}$, temos dois casos

- $\operatorname{im} f = \{0\}$, nesse caso f é a função linear nula;
- $\operatorname{im} f = \mathbb{K}$, e nesse caso f é sobrejetiva.

Em outras palavras, um funcional linear não nulo é sobrejetivo.

Além disso, se $f \neq 0$, então se $\dim(V) < \infty$, então $\dim(\ker f) = \dim(V) - 1$.

Teorema

a *Para qualquer vetor diferente de zero* $\mathbf{v} \in V$, *existe um* $f \in V^*$ *funcional linear para que* $f(\mathbf{v}) \neq 0$.

b *Um vetor* $\mathbf{v} \in V$ *é zero se e somente se* $f(\mathbf{v}) = 0$ *para todos os funcionais* $f \in V^*$

c *Dado* $f \in V^*$ *tal que* $f(\mathbf{x}) \neq 0$ *então* ,

$$V = \langle \mathbf{x} \rangle \oplus \ker f$$

d *Dois funcionais lineares não nulos* $f, g \in V^*$ *têm o mesmo núcleo se, e somente se, existir um escalar diferente de zero* λ, *de modo que* $f = \lambda g$.

Demonstração

c Se $0 \neq \mathbf{v} \in \langle \mathbf{x} \rangle \cap \ker f$, então $f(\mathbf{v}) = 0$ e $\mathbf{v} = a\mathbf{x}$ para $0 \neq a \in \mathbb{K}$, e logo $f(\mathbf{x}) = 0$, o que é impossível. Portanto, $\langle \mathbf{x} \rangle \cap \ker f = \{0\}$ e logo podemos considerar a soma direta $S = \langle x \rangle \oplus \ker f$. Além disso, para qualquer $\mathbf{v} \in V$, temos

$$\mathbf{v} = \frac{f(\mathbf{v})}{f(\mathbf{x})}\mathbf{x} + (\mathbf{v} - \frac{f(\mathbf{v})}{f(\mathbf{x})}\mathbf{x}) \in \langle \mathbf{x} \rangle + \ker f$$

e então $V = \langle \mathbf{x} \rangle \oplus \ker f$.

d Se $f = \lambda g$ com $\lambda \neq 0$, $\ker f = \ker g$. Por outro lado, se $\mathbb{K} = \ker f = \ker(g)$, então para $\mathbf{x} \notin \mathbb{K}$, temos $V = \langle \mathbf{x} \rangle \oplus K$ Obviamente, $f\restriction_K = \lambda g\restriction_K$ para qualquer λ. Portanto, escolhendo $\lambda = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$, temos que $\lambda g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ e, portanto, $f = \lambda g$.

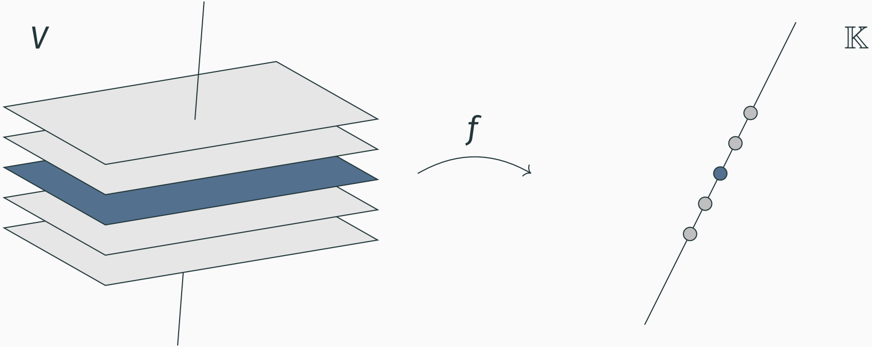

Figura 1: O Teorema 3 mostra que todo funcional linear "folheia"o espaço V em espaços afins de dimensão $n-1$. As classes $\lambda\mathbf{x}+\ker f$ com $\lambda \in \mathbb{K}$. Cada folha é mapeada num único ponto de $\mathbb{K}$.

Seja V um espaço vetorial com base $\underline{\mathrm{B}} = \{\mathbf{x}_i \mid i \in \Delta\}$. Para cada $i \in \Delta$, podemos definir um funcional linear $\mathbf{x}_i^* \in V^*$ pela condição de ortogonalidade

$$\mathbf{x}_i^*(\mathbf{x}_j) \triangleq \delta_{i,j}$$

onde $\delta_{i,j}$ é a função delta de Kronecker, definida como

$$\delta_{i,j} \triangleq \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

e estendendo por linearidade.

Então o conjunto $\underline{B}^* = \{\mathbf{x}_i^* \mid i \in \Delta\}$ é linearmente independente, pois se tivermos uma combinação que é igual ao funcional nulo

$$\mathbf{0}^* = a_{i_1}\mathbf{x}_i^* + \cdots + a_{i_n}\mathbf{x}_{i_n}^*.$$

aplicando essa equação no vetor da base $\mathbf{x}_{i_k}$ temos

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\mathbf{x}_{i_j}^*(\mathbf{x}_{i_k}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\delta_{i_j,i_k} = a_{i_k}$$

para todos os i_k.

Teorema

Seja V um espaço vetorial com base $\underline{B} = \{\mathbf{x}_i \mid i \in \Delta\}$.

a. *O conjunto $\underline{B}^* = \{\mathbf{x}_i^* \mid i \in \Delta\}$ é linearmente independente.*

b. *Se V é de dimensão finita, então $\underline{B}^*$ é uma base para V^*, denominada* ***base dual*** *de V^*.*

Demonstração

a Já foi demonstrada acima.

b Para qualquer $f \in V^*$, vamos provar que $f = \sum_j f(\mathbf{x}_j)\mathbf{x}_j^*$. Vamos provar isso calculando o lado direito da expressão anterior nos vetores da base:

$$\sum_j f(\mathbf{x}_j)\mathbf{x}_j^*(\mathbf{x}_i) = \sum_j f(\mathbf{x}_j)\delta_{i,j} = f(\mathbf{x}_i).$$

Portanto, $\underline{\mathrm{B}}^*$ é uma base para V^*.

Segue-se do teorema anterior que se $\dim(V) < \infty$, então

$$\dim(V^*) = \dim(V)$$

já que os vetores duais também formam uma base para V^*.

Exemplo

Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, com base $\underline{B}$. Como os únicos coeficientes em $\mathbb{K}$ são 0 e 1, uma combinação linear finita sobre $\mathbb{K}$ é apenas uma soma finita. Portanto, V é o conjunto de todas as somas finitas de vetores em $\underline{B}$ e, assim,

$$|V| \leq |\mathscr{P}_0(\underline{B})| = |\underline{B}|$$

Por outro lado, cada funcional linear $f \in V^*$ é definido de maneira única especificando seus valores em $\underline{B}$. Como esses valores devem ser 0 ou 1, especificar um funcional linear é equivalente a especificar o subconjunto de $\underline{B}$ no qual f assume o valor 1. Em outras palavras, há uma correspondência biunívoca entre os funcionais lineares em V e todos os subconjuntos de $\underline{B}$. Consequentemente,

$$|V^*| = |\mathscr{P}(\underline{B})| > |\underline{B}| \geq |V|$$

Isso mostra que V^* não pode ser isomorfo a V, nem a qualquer subconjunto próprio de V. Portanto, $\dim(V^*) > \dim(V)$.

Teorema

Seja V um espaço vetorial. Então $\dim(V) \leq \dim(V^*)$ com igualdade se e somente se V for de dimensão finita.

Exemplo

Se $V = \mathbb{K}^n$ então $V^* = \mathbb{K}_n$.

Definição (Hiperplano)

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n, um ***hiperplano*** *H é um subespaço de V de dimensão $n-1$.*

Teorema

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita

1. *Seja $0 \neq f \in V^*$. Então $\ker f$ é um hiperplano.*
2. *Todo hiperplano é da forma $\ker f$ para algum $0 \neq f \in V^*$*

Se V é um espaço vetorial, com espaço dual V^*. Podemos formar o espaço bidual V^{**}, que consiste em todos os funcionais lineares $S : V^* \to \mathbb{K}$. Em outras palavras, um elemento S de V^{**} é um funcional linear que atribui um escalar a cada funcional linear em V.

Definição (Espaço Bidual)

Definimos o ***espaço bidual*** *de V, denotado por V^{**} como*

$$V^{**} \triangleq \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{K})$$

Com isso em mente, há uma maneira bastante óbvia de obter um elemento de V^{**}. Ou seja, se $\mathbf{v} \in V$, considere o mapa $\overline{\mathbf{v}} : V^{*} \to \mathbb{K}$ definido por

$$\overline{\mathbf{v}}(f) \triangleq f(\mathbf{v})$$

que envia o f funcional linear para o escalar $f(\mathbf{v})$. O mapa $\overline{\mathbf{v}}$ é denominado **avaliação** em $\mathbf{v}$. Para ver que $\overline{\mathbf{v}} \in V^{**}$, sejam $f, g \in V^{*}$ e $a, b \in \mathbb{K}$, então

$$\overline{\mathbf{v}}(af + bg) = (af + bg)(\mathbf{v}) = af(\mathbf{v}) + bg(\mathbf{v}) = a\overline{\mathbf{v}}(f) + b\overline{\mathbf{v}}(g)$$

e assim $\overline{\mathbf{v}}$ é de fato um funcional linear.

Agora podemos definir um mapa $\tau : V \to V^{**}$ por $\tau\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}$ Esse mapa é denominado **mapa natural** de V a V^{**}. Esse mapa é injetivo e, portanto, no caso de dimensão finita, também é sobrejetivo.

Teorema

O mapa canônico $\tau : V \to V^{**}$ *definido por* $\tau\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}$*, em que* $\overline{\mathbf{v}}$ *é a avaliação em* $\mathbf{v}$*, é injetivo.*

Se V *é de dimensão finita, então* τ *é um isomorfismo.*

Demonstração

O mapa τ é linear, pois

$$\overline{a\mathbf{u}+b\mathbf{v}}(f)=f(a\mathbf{u}+b\mathbf{v})=af(\mathbf{u})+bf(\mathbf{v})=(a\bar{\mathbf{u}}+b\bar{\mathbf{v}})(f)$$

para todos os $f\in V^*$. Para determinar o núcleo de τ, observe que

$$\begin{aligned}
\tau\mathbf{v}=0 &\Rightarrow \bar{\mathbf{v}}=0 && (1)\\
&\Rightarrow \bar{\mathbf{v}}(f)=0 \text{ para todos os } f\in V^* && (2)\\
&\Rightarrow f(\mathbf{v})=0 \text{ para todos os } f\in V^* && (3)\\
&\Rightarrow \mathbf{v}=0 && (4)
\end{aligned}$$

pelo Teorema 3 e, portanto, $\ker(\tau) = \{0\}$. No caso de dimensão finita, como

$$\dim(V^{**}) = \dim(V^{*}) = \dim(V)$$

temos que τ também é sobrejetivo, e logo um isomorfismo.

Observe que se $\dim(V) < \infty$, como as dimensões de V e V^{**} são as mesmas, deduzimos imediatamente que $V \cong V^{**}$. Este não é o ponto do Teorema 9. O ponto é que o mapa natural $\mathbf{v} \to \bar{\mathbf{v}}$ é um isomorfismo.

Quando $V \cong V^{**}$, V é dito algebricamente reflexivo. O Teorema 9 e o Teorema 5 juntos implicam que um espaço vetorial é algebricamente reflexivo se e somente se for finito-dimensional.

Comentários Finais.