Álgebra Linear Avançada

Aniquiladores

Daniel Miranda Machado

24 de Setembro

UFABC

Aniquiladores

Definição (Aniquilador)

Seja V um espaço vetorial vetorial $\mathbb{K}$ de dimensão finita, V^* seu espaço dual . Seja M um um subconjunto não vazio de V e $N \subset V^*$ um subconjunto não vazio de V^*. Definimos

$$M^0 = \operatorname{ann}_{V^*} M = \{f \in V^* \,|\, f(\mathbf{u}) = 0,\ \textit{para cada } \mathbf{u} \in M\} \textit{ e}$$
$$N^0 = \operatorname{ann}_V N = \{\mathbf{v} \in V \,|\, \overline{\mathbf{v}}(f) = 0,\ \textit{para cada } f \in N\},$$

os aniquiladores de U (respectivamente X) in V^* (respectivamente V). São subespaços de V^* (respectivamente V), por qualquer U (respectivamente X).

O termo aniquilador é intuitivo, pois M^o consiste em todos os funcionais lineares que aniquilam, iso é, enviam para $\mathbf{0}$ todos os vetores em M.

Ressaltamos que M^o é um subespaço de V^*, mesmo quando M não é um subespaço de V.

As propriedades básicas dos aniquiladores estão contidas no seguinte teorema.

Teorema

a *Se M e N forem subconjuntos não vazios de V, $M \subseteq N \Rightarrow N^{o} \subseteq M^{o}$*

b *Se $\dim(V) < \infty$, então, para qualquer subconjunto não vazio M de V o mapa natural*

$$\tau : \langle M \rangle \to M^{oo}$$

é um isomorfismo de $\langle M \rangle$ para M^{oo}. Em particular, se S for um subespaço de V, $S^{oo} \cong S$.

c *Se S e T são subespaços de V, então*

$$(S \cap T)^{o} = S^{o} + T^{o} \text{ e } (S + T)^{o} = S^{o} \cap T^{o}$$

Demonstração

Deixamos a prova da parte $\boxed{\textbf{a}}$ para o leitor.

Para a parte $\boxed{\textbf{b}}$, como $M^{00} = (\langle M \rangle)^{00}$ é suficiente provar que $\tau : S \to S^{00}$ é um isomorfismo, onde S é um subespaço de V. Agora, sabemos que τ é um monomorfismo, então resta provar que $\tau S = S^{00}$.

Se $\mathbf{s} \in S$, $\tau \mathbf{s} = \bar{\mathbf{s}}$ possui a propriedade que, para todos os $f \in S^0$,

$$\bar{\mathbf{s}}(f) = f\mathbf{s} = 0$$

e então $\tau\mathbf{s} = \bar{\mathbf{s}} \in S^{00}$, o que implica que $\tau S \subseteq S^{00}$. Além disso, se $\bar{\mathbf{v}} \in S^{00}$, então, para todos os $f \in S^{0}$, temos $f(\mathbf{v}) = \bar{\mathbf{v}}(f) = 0$ e assim, todo funcional linear que aniquila S também aniquila $\mathbf{v}$. Mas se $\mathbf{v} \notin S$,, existe um funcional linear $g \in V$ para o qual $g(S) = \{0\}$ e $g(\mathbf{v}) \neq 0$.

Portanto, $\mathbf{v} \in S$ e, portanto, $\bar{\mathbf{v}} = \tau\mathbf{v} \in \tau S$ e então $S^{00} \subseteq \tau S$.

Para a parte $\boxed{\text{c}}$, é claro que f aniquila $S+T$ se e somente se f aniquila S e T. Portanto, $(S+T)^{o} = S^{o} \cap T^{o}$.

Além disso, se $f = g + h \in S^{o} + T^{o}$ em que $g \in S^{o}$ e $h \in T^{o}$, $g, h \in (S \cap T)^{o}$ e, portanto, $f \in (S \cap T)^{o}$. Portanto,

$$S^{o} + T^{o} \subseteq (S \cap T)^{o}$$

Para a inclusão inversa, suponha que $f \in (S \cap T)^{0}$. Escreva

$$V = S' \oplus (S \cap T) \oplus T' \oplus U$$

onde $S = S' \oplus (S \cap T)$ e $T = (S \cap T) \oplus T'$. Defina $g \in V^*$ por

$$g\restriction_{S'} = f,\ g\restriction_{S\cap T} = f\restriction_{S\cap T} = 0,\ g\restriction_{T'} = 0,\ g\restriction_{U} = f$$

e defina $h \in V^*$ por

$$h\restriction_{S'} = 0,\ h\restriction_{S\cap T} = f\restriction_{S\cap T} = 0,\ h\restriction_{T'} = f,\ h\restriction_{U} = 0$$

Dessa forma temos que $g \in T^{0}, h \in S^{0}$ e $g + h = f$.

Considere uma decomposição de soma direta $V = S \oplus T$.

Então qualquer funcional linear $f \in T^*$ pode ser estendido a um funcional linear $\bar{f}$ em V fazendo $\bar{f}(S) = 0$. Vamos chamar essa extensão de extensão por 0. Claramente, $\bar{f} \in S^0$ e é fácil ver que a extensão por 0 leva $f \to \bar{f}$ e é um isomorfismo de T^* a S^0, cuja inversa é a restrição a T.

Teorema

Seja $V = S \oplus T$.

a *A extensão por o é um isomorfismo entre* T^* *e* S^o, *i.e.,* $T^* \cong S^o$.

b *Se V é de dimensão finita, então*

$$\dim(S^o) = \operatorname{codim}_V(S) = \dim(V) - \dim(S) \quad \square$$

O aniquilador fornece uma maneira de descrever o espaço dual de uma soma direta.

Teorema

Um funcional linear na soma direta $V = S \oplus T$ pode ser escrito como a soma de uma funcional linear que aniquila S e de uma funcional linear que aniquila T, ou seja,

$$(S \oplus T)^* = S^o \oplus T^o$$

Demonstração

Claramente $S^0 \cap T^0 = \{0\}$, pois qualquer funcional que aniquile S e T deve aniquilar $S \oplus T = V$. Portanto, a soma $S^0 + T^0$ é direta. O restante segue do Teorema 2 já que $V^* = \{0\}^0 = (S \cap T)^0 = S^0 + T^0 = S^0 \oplus T^0$

Transposta de um Operador

Definição (Operador Transposto)

Se $T \in \mathrm{Hom}(V,\ W)$*, poderemos definir um mapa* $T^* : W^* \to V^*$ *por*

$$T^*(f) = f \circ T = fT$$

para $f \in W^*$*. Assim, para qualquer* $v \in V$,

$$[T^*(f)](v) = f(Tv)$$

O mapa T^* *é chamado de operador transposto a* T*.*

Teorema (Propriedades do Operador Transposto)

a *Para* $T, S \in \mathrm{Hom}(V,\ W)$ *e* $a, b \in \mathbb{K}$, $(aT + bS)^* = aT^* + bS^*$

b *Para* $S \in \mathrm{Hom}(V,\ W)$ *e* $T \in \mathrm{Hom}(W,\ U)$, $(TS)^* = S^*T^*$

c *Para qualquer* $T \in \mathrm{Hom}(V)$ *invertível* , $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

Demonstração

A prova $\boxed{1}$ é deixada para o leitor.

$\boxed{2}$ Para todos os $f \in U^*$, temos que

$$(TS)^*(f) = f(TS) = S^*(fT) = S^*(T^*(f)) = (S^*T^*)(f)$$

4

$$T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = \mathrm{I}^* = \mathrm{I}$$

e analogamente , $(T^{-1})^*T^* = \mathrm{I}$. Portanto, $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Se $T \in \mathrm{Hom}(V,\ W)$, $T^* \in \mathrm{Hom}(W^*,\ V^*)$ e então $T^{**} \in \mathrm{Hom}(V^{**},\ W^{**})$. Obviamente, T^{**} não é igual a T. No entanto, no caso de dimensão finita, se usarmos os mapas naturais para identificar V^{**} com V e W^{**} com W, poderemos pensar em T^{**} como estando em $\mathrm{Hom}(V,\ W)$. Usando essas identificações, temos igualdade no caso de dimensão finita.

Teorema

Seja V e W de dimensão finita e seja $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Se identificarmos V^{**} com V e W^{**} com W usando os mapas naturais, T^{**} será identificado com T.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\tau"'] & W \arrow[d, "\tau"] \\ V^{**} \arrow[r, "T^{**}"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Demonstração

Antes de fazer qualquer identificação, temos para $\mathbf{v} \in V$,

$$T^{**}(\overline{\mathbf{v}})(f) = \overline{\mathbf{v}}[T^*(f)] = \overline{\mathbf{v}}(fT) = f(T\mathbf{v}) = \overline{T\mathbf{v}}(f)$$

para todos os $f \in W^*$ e assim

$$T^{**}(\overline{\mathbf{v}}) = \overline{T\mathbf{v}} \in W^{**}$$

Portanto, usando as identificações canônicas para V^{**} e W^{**}, temos

$$T^{**}(\mathbf{v}) = T\mathbf{v}$$

para todos os $\mathbf{v} \in V$.

O próximo resultado descreve o núcleo e a imagem do operador transposto.

Teorema

Seja $T \in \operatorname{Hom}(V,\ W)$. *Então*

a $\ker(T^*) = \operatorname{im}(T)^{\circ}$

b $\operatorname{im}(T^*) = \ker(T)^{\circ}$

Demonstração

Para a parte $\boxed{\mathbf{a}}$,

$$\begin{aligned} \ker(T^*) &= \{f \in W^* \mid T^*(f) = 0\} && (1)\\ &= \{f \in W^* \mid f(TV) = \{0\}\} && (2)\\ &= \{f \in W^* \mid f(\mathrm{im}(T)) = \{0\}\} && (3)\\ &= \mathrm{im}(T)^0 && (4) \end{aligned}$$

Para a parte $\boxed{\mathbf{b}}$, se $f = gT = T^*g \in \mathrm{im}(T^*)$, então $\ker(T) \subseteq \ker(f)$ e assim $f \in \ker(T)^{\circ}$.

Para inclusão inversa, deixe $f \in \ker(T)^{\circ} \subseteq V^*$. Queremos mostrar que $f = T^*g = gT$ para algum $g \in W^*$. Em $K = \ker(T)$, não há problema, já que f e $T^*g = gT$ concordam em K para qualquer $g \in W^*$. Seja S um complemento de $\ker(T)$.

Então T mapeia uma base $\underline{\mathrm{B}} = \{\mathbf{e}_i \mid i \in \Delta\}$ de S para um conjunto linearmente independente

$$T\underline{\mathrm{B}} = \{T\mathbf{e}_i \mid i \in \Delta\}$$

em W e, assim, podemos definir $g \in W^*$ em $T\underline{\mathrm{B}}$ fazendo

$$g(T\mathbf{e}_i) = f\mathbf{e}_i$$

e estendendo a W.

Então $f = gT = T^*g$ em $\underline{\mathrm{B}}$ e, portanto, em S. Assim, $f = T^*g \in \operatorname{im}(T^*)$.

Corolário

Seja $T \in \mathrm{Hom}(V,\ W)$*, onde* V *e* W *são de dimensões finitas. Então* $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}(T^*)$.

No caso de dimensão finita, T e T^* podem ser representados por matrizes. Sejam $\underline{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ e $\underline{C} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m)$ bases ordenadas de V e W, respectivamente, e sejam $\underline{B}^* = (\mathbf{b}_1^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*)$ e $\underline{C}^* = (\mathbf{c}_1^*, \ldots, \mathbf{c}_m^*)$ as bases duais correspondentes. Então

$$([T]_{\underline{B},\underline{C}})_{i,j} = ([T\mathbf{b}_j]_{\underline{C}})_i = \mathbf{c}_i^*[T\mathbf{b}_j]$$

e

$$([T^*]_{\underline{C}^*,\underline{B}^*})_{i,j} = ([T^*(\mathbf{c}_j^*)]_{\underline{B}^*})_i = \mathbf{b}_i^{**}[T^*(\mathbf{c}_j^*)] = T^*(\mathbf{c}_j^*)(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_j^*(T\mathbf{b}_i)$$

Comparando as duas últimas expressões, vemos que elas são as mesmas, exceto que os papéis de i e j estão invertidos. Portanto, as matrizes em questão são transpostas uma da outra.

Teorema

Seja $T \in \mathrm{Hom}(V,\ W)$, *onde* V *e* W *são espaços vetoriais de dimensões finitas. Se* $\underline{B}$ *e* $\underline{C}$ *são bases ordenadas para* V *e* W, *respectivamente, e* $\underline{B}^*$ *e* $\underline{C}^*$ *são as bases duais correspondentes, então*

$$[T^*]_{\underline{C}^*,\underline{B}^*} = \left([T]_{\underline{B},\underline{C}}\right)^t$$

Ou seja, as matrizes de T *e de* T^* *são transpostas uma da outra.*

Comentários Finais.