Álgebra Linear Avançada

Determinante

Daniel Miranda Machado

18 de novembro de 2020

UFABC

Geometria dos Volumes

O determinante tem um significado geométrico simples: volume orientado.

O determinante de uma matriz A tem um significado geométrico simples. É o volume orientado da imagem do cubo unitário sob a transformação linear T_A.

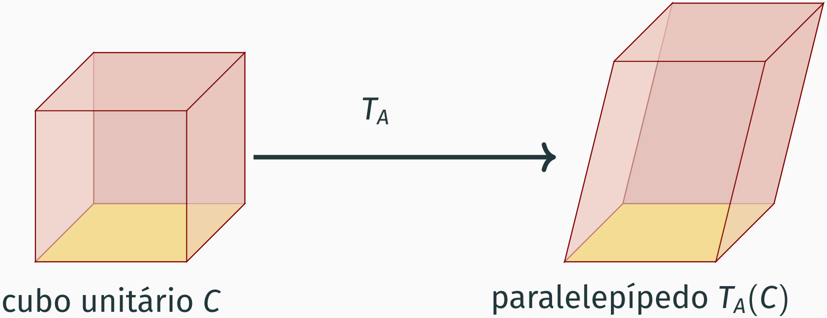


Figura 1: Determinante é o volume orientado.

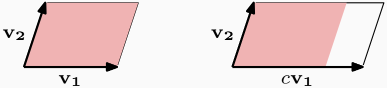
Começaremos descrevendo quais propriedades o volume orientado deve ter e posteriormente tomaremos essas propriedades como base para a definição algébrica.

Doravante, por preguiça diremos simplesmente volume no lugar volume orientado.

Ao considerar as propriedades que o volume deve ter, suponha que estamos trabalhando em $\mathbb{R}^2$, onde o volume é área. Seja A a matriz $A = [\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2]$. O quadrado unitário em $\mathbb{R}^2$ é determinado pelos vetores da base padrão $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$. Assim, nesse caso teremos que $T_A(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1$ e $T_A(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2$, por isso nesse caso queremos determinar a área do paralelogramo P determinado pelos vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, as duas colunas de A.

A área de um paralelogramo certamente deve ter as seguintes duas propriedades:

A1 Se multiplicarmos um lado de P por um número c, por exemplo, se substituirmos P pelo paralelogramo P' determinado por $c\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, a área de P' deve ser c vezes a área de P.



A2 Se adicionarmos um múltiplo de um lado de P a outro, por exemplo, se substituirmos P pelo paralelogramo P' determinado por $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_1$, a área de P' deve ser igual à área de P.

A propriedade $\boxed{\textbf{A1}}$ deve, em particular, permanece válida $c = 0$, quando um dos lados se torna o vetor zero; nesse caso, o paralelogramo degenera em uma segmento de reta (ou em um ponto se os dois lados forem o vetor zero) e reta ou um ponto tem área 0.

Agora, consideramos um corpo arbitrário $\mathbb{K}$ e consideramos as matrizes $n \times n$. Ainda somos guiados pelas propriedades $\boxed{\textbf{A1}}$ e $\boxed{\textbf{A2}}$, estendendo-as para matrizes $n \times n$ usando a ideia de que se apenas uma ou duas colunas forem alteradas como em $\boxed{\textbf{A1}}$ ou $\boxed{\textbf{A2}}$ e a outras não forem alteradas, o volume deverá mudar como descrito em $\boxed{\textbf{A1}}$ ou $\boxed{\textbf{A2}}$. Assim, somos levados à seguinte definição.

Definição (Função Volume)

Uma função volume $\operatorname{vol} : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *é uma função que satisfaz as propriedades:*

V1 *Para qualquer escalar c e qualquer i,*

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_{i-1} \mid c\mathbf{v}_i \mid \mathbf{v}_{i+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) && (1)\\
&= c \operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_{i-1} \mid \mathbf{v}_i \mid \mathbf{v}_{i+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) && (2)
\end{aligned}
$$

V2 *Para qualquer escalar c e qualquer $j \neq i$,*

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_{i-1} \mid \mathbf{v}_i + c\mathbf{v}_j \mid \mathbf{v}_{i+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) && (3)\\
&= \operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_{i-1} \mid \mathbf{v}_i \mid \mathbf{v}_{i+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) && (4)
\end{aligned}
$$

Observe que não mostramos que vol existe, mas prosseguiremos com a suposição de que existe tal função e derivando propriedades que essa função deveria ter e as usaremos para provar a existência.

Como definimos, a função vol não é única, pois podemos multiplica-la por um fator arbitrário. Depois que especificamos uma escala, obteremos uma função única que indicaremos por $\det$, o determinante. Mas é conveniente trabalhar com funções volume arbitrárias e normalizar o resultado somente ao final. A condição de escala é que as funções vol serão redimensionados de modo que o volume orientado cubo unitário n dimensional, com as colunas dispostas na ordem padrão, seja 1.

Proposição

Seja $\mathrm{vol} : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *uma função volume. Então*

1 *Se alguma coluna de A for zero,* $\mathrm{vol}(A) = 0$.

2 *Se as colunas de A forem linearmente dependentes então* $\mathrm{vol}(A) = 0$. *Em particular, se duas colunas de A forem iguais,* $\mathrm{vol}(A) = 0$.

3

$$\mathrm{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_j \mid \cdots \mid \mathbf{v}_i \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) = -\,\mathrm{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_i \mid \cdots \mid \mathbf{v}_j \mid \cdot\right.\right.$$

4

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid a\mathbf{u} + b\mathbf{w} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) &= a\,\mathrm{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{u} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right)\\ &\quad + b\,\mathrm{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{w} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right)\end{aligned}$$

Demonstração

$\boxed{1}$ Seja $\mathbf{v}_i = 0$. Então $\mathbf{v}_i = 0\mathbf{v}_i$, então pela propriedade $\boxed{\mathbf{V1}}$

$$\mathrm{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_i \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) = 0 \cdot \mathrm{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_i \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) = 0.$$

2 Sejam

$$\mathbf{v}_i = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + a_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{v}_i' = a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + a_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

Assim $\mathbf{v}_i = a_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_i'$, e aplicando a propriedade $\boxed{\mathbf{V2}}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{v}_i \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{v}_n\right]\right) &= \operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; a_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_i' \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{v}_n\right]\right) \\ &= \operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{v}_i' \middle| \cdots \;\middle|\; \mathbf{v}_n\right]\right)\end{aligned}$$

Procedendo da mesma maneira, aplicando a propriedade $\boxed{\text{V2}}$ repetidamente, obtemos

$$\operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_i \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) = \operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid 0 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) = 0.$$

3

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_j \mid \cdots \mid \mathbf{v}_i \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) \\
&\qquad = \operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_j \mid \cdots \mid \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i \mid \cdots \right.\right. \\
&\qquad = \operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid -\mathbf{v}_i \mid \cdots \mid \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i \mid \cdot \right.\right. \\
&\qquad = \operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid -\mathbf{v}_i \mid \cdots \mid \mathbf{v}_j \mid \cdots \mid \right.\right. \\
&\qquad = -\operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_i \mid \cdots \mid \mathbf{v}_j \mid \cdots \mid \right.\right.
\end{aligned}
$$

$\boxed{4}$ Se $\{\mathbf{v}_1, \ \dots\ , \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ \dots\ , \mathbf{v}_n\}$ não forem linearmente independentes. Então, a afirmação é direta.

Suponha que $\{\mathbf{v}_1, \ \dots\ , \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ \dots\ , \mathbf{v}_n\}$ sejam linearmente independentes. Podemos estender esse conjunto para uma base $\{\mathbf{v}_1, \ \dots\ , \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ \dots\ , \mathbf{v}_n, \mathbf{z}\}$ de $\mathbb{K}^n$. Então podemos escrever

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + c_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n + c'\mathbf{z},$$

$$\mathbf{w} = d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + d_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + d_n\mathbf{v}_n + d'\mathbf{z}.$$

Seja $\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{w}$. Então

$$\mathbf{v} = e_1\mathbf{v}_1 + \cdots + e_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + e_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \cdots + e_n\mathbf{v}_n + e'\mathbf{z}$$

onde $e' = ac' + bd'$.

Aplicando a propriedade $\boxed{\mathbf{V2}}$ repetidamente e a propriedade $\boxed{\mathbf{V1}}$, vemos que

$$\operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) = e' \operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{z} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right)$$

$$\operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{u} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) = c' \operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{z} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right)$$

$$\operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{w} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{v}_n\right]\right) = d' \operatorname{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{z} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{v}_n\right]\right)$$

o que conclui a demonstração desse item.

Alternatividade

Observação

O item 3 da Proposição 2 implica

$$2\,\mathrm{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{z} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{z} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{v}_n\right]\right) = 0$$

e, portanto,

$$\mathrm{vol}\left(\left[\mathbf{v}_1 \cdots \;\middle|\; \mathbf{z} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{z} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \mathbf{v}_n\right]\right) = 0$$

se $\mathbb{K}$ não tiver característica 2.

Teorema

Uma função $f \colon \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ é uma função volume se, e somente se, satisfizer:

1. *Multilinearidade: Se $A = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]$ com $\mathbf{v}_i = a\mathbf{u} + b\mathbf{w}$ para algum i,,*

$$f\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_i \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) = af\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{u} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) + bf\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{w} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right)$$

2. *Alternatividade: Se $A = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]$ com $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$ para $i \neq j$, então*

$$f\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) = 0.$$

Demonstração

Já provamos que qualquer função volume satisfaz o Lema 2 $\boxed{3}$ e $\boxed{4}$, o que fornece alternatividade e multilinearidade. Por outro lado, é fácil ver que a multilinearidade e a alternatividade fornecem as propriedades $\boxed{V1}$ e $\boxed{V2}$ na Definição 1.

As condições do Teorema 4 são geralmente consideradas como a definição de uma função de volume.

Observação

Em característica 2, a função $f\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) = ac$ *é multilinear e satisfaz* $f\left(\begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 & \mid & \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mid & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}\right) = -f\left(\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mid & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}\right)$, *mas não satisfaz a alternatividade.*

Definição (Determinante)

Uma função $\det\colon \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *é dita determinante se satisfizer:*

D1 *Multilinearidade: Se* $A = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]$ *com* $\mathbf{v}_i = a\mathbf{u} + b\mathbf{w}$ *para algum* i,,

$$\begin{aligned}\det\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_i \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) &= a\det\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{u} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right)\\ &\quad + b\det\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{w} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right)\end{aligned}$$

D2 *Alternatividade: Se* $A = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n]$ *com* $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$ *para* $i \neq j$, *então*

$$\det\left(\left[\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n\right]\right) = 0.$$

D3 *Volume do cubo unitário*

$$\det\left(\left[\mathbf{e}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{e}_n\right]\right) = 1.$$

Primeiramente provaremos a unicidade da função determinante.

Teorema (Unicidade do Determinante)

Suponha que exista uma função volume não trivial $\mathrm{vol} : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. *Então existe uma única função determinante. Além disso, qualquer função volume* vol *é da forma* $\mathrm{vol} = a \det$ *para algum* $a \in \mathbb{K}$

Demonstração

Seja A uma matriz com $\operatorname{vol}(A) \neq 0$. Então, pela Proposição 2 $\boxed{2}$, A deve ser não singular. Assim existe uma sequência de operações elementares sobre as colunas que levam A a I. Pela definição 1 $\boxed{V1}$ e $\boxed{V2}$ e pela Proposição 2 $\boxed{4}$, cada uma dessas operações tem o efeito de multiplicar $\operatorname{vol}(A)$ por um escalar diferente de zero, então $\operatorname{vol}(I) \neq 0$.

Qualquer múltiplo escalar de uma função volume é uma função de volume; portanto, podemos obter uma função volume $\det$ fazendo $\det(A) = (1/\operatorname{vol}(I))\operatorname{vol}(A)$ e claramente $\det(I) = 1$. Em seguida, defina a coleção de funções volumes $\operatorname{vol}_a(A) = a\det(A)$.

Agora seja f qualquer função de volume. Defina $a = f(I)$. Se A for singular, $f(A) = 0$. Suponha que A não seja singular. Então existe uma sequência de operações de coluna que levam I a A, e cada uma dessas operações de coluna tem o efeito de multiplicar o valor de qualquer função volume por uma constante diferente de zero, independentemente da escolha da função de volume. Assim, se deixarmos que b seja o produto dessas constantes, teremos

$$f(A) = bf(I) = ba = b\,\mathrm{vol}_a(I) = \mathrm{vol}_a(A)\ ,$$

então $f = \mathrm{vol}_a$. Em particular, se f é alguma função volume com $f(I) = 1$, então $f = \det$, que mostra que $\det$ é único.

Observe que a prova desse teorema não mostra que $\det$ existe, pois a priori, poderíamos escolher duas sequências diferentes de operações elementares sobre as colunas para ir de I a A e dessa forma obter dois valores diferentes para $\operatorname{vol}(A)$. De fato, vol existe, como veremos na próxima seção.

Determinantes e Permutações

Seja $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & | & \ldots & | & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$. Escrevendo cada um desses vetores em termos da base canônica de $\mathbb{R}^n$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= v_{11}\mathbf{e}_1 + \ldots + v_{n1}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{v}_2 &= v_{12}\mathbf{e}_1 + \ldots + v_{n2}\mathbf{e}_n, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \mathbf{v}_n &= v_{1n}\mathbf{e}_1 + \ldots + v_{nn}\mathbf{e}_n \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det(v_{11}\mathbf{e}_1 + \ldots + v_{n1}\mathbf{e}_n, \ , \ldots, \ v_{1n}\mathbf{e}_1 + \ldots + v_{nn}\mathbf{e}_n) \tag{5}$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{n} v_{i_1 1} v_{i_2 2} \cdots v_{i_n n} \det(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}) \tag{6}$$

Observamos inicialmente que no somatório 6 se anulam todos os termos nos quais ocorre a repetição de algum dos índices $i_1, \ldots, i_n$. Pois nesse caso, $\mathbf{e}_{i_k} = \mathbf{e}_{i_j}$ e pela propriedade D1 do determinante temos que $\det(\mathbf{e}_{i_1}, \ \ldots, \ \mathbf{e}_{i_j}, \ \ldots, \ \mathbf{e}_{i_k}, \ \ldots, \ \mathbf{e}_{i_n}) = 0$.

Como todos os índices $i_1, \ldots, i_n$ são diferentes entre si no somatório 6 precisamos apenas considerar

$$\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \ \mathbf{v}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(1)1} v_{\sigma(2)2} \cdots v_{\sigma(n)n} \det(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \ \mathbf{e}_{\sigma(n)}) \ ,$$

em que σ percorre o grupo de permutações de $S = \{1, \ \ldots, \ n\}$.

Se σ é uma permutação , podemos considerar sua decomposição como produto de transposição. Pela propriedade do determinante, uma transposição altera o valor de $\det$ pelo fator -1. Se σ é o produto de k transposições, então o sinal de $\det$ serà alterado por $(-1)^k$. Dessa forma temos que

$$\det(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \ \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sinal}(\sigma) \det(\mathbf{e}_1, \ldots, \ \mathbf{e}_n) = \operatorname{sinal}(\sigma).$$

E logo

$$\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \ \mathbf{v}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sinal}(\sigma) v_{\sigma(1)1} v_{\sigma(2)2} \cdots v_{\sigma(n)n},$$

que é a expressão do determinante em termos de permutações.

Podemos agora demonstrar da existência do determinante.

Teorema (Existência do Determinante)

Existe uma única função determinante. Ou seja uma função volume $\det\colon \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *com* $\det(I) = 1$.

Demonstração

Já demonstramos a unicidade. Mostraremos agora que

$$\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sinal}(\sigma) v_{\sigma(1)1} v_{\sigma(2)2} \cdots v_{\sigma(n)n}, \tag{7}$$

satisfaz às propriedades $\boxed{\mathbf{D1}}$-$\boxed{\mathbf{D3}}$ da função determinante. No que se segue σ denotará uma permutação do conjunto $S = \{1, \ldots, n\}$

D1 Suponhamos que os vetores $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{v}_j$ sejam iguais. Seja τ a transposição entre $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{v}_j$. Então $v_{\tau\sigma(1)1}v_{\tau\sigma(2)2}\cdots v_{\tau\sigma(n)n} = v_{\sigma(1)1}v_{\sigma(2)2}\cdots v_{\sigma(n)n}$, pois τ transpõe os vetores $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{v}_j$, que são iguais, e mantém fixos os outros vetores. Assim,

$$\begin{aligned}
\det(\ldots,\ \mathbf{v}_i,\ \ldots,\ \mathbf{v}_j,\ \ldots) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sinal}(\sigma) v_{\sigma(1)1}v_{\sigma(2)2}\cdots v_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sinal}(\sigma) v_{\tau\sigma(1)1}v_{\tau\sigma(2)2}\cdots v_{\tau\sigma(n)n} \\
&= -\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sinal}((\tau\sigma) v_{\tau\sigma(1)1}v_{\tau\sigma(2)2}\cdots v_{\tau\sigma(n)n} \\
&= -\det(.\ ,\ \mathbf{v}_j, \ldots,\ \mathbf{v}_i, \ldots)\ ,
\end{aligned}$$

Como $\det(\ldots,\ \mathbf{v}_i,\ \ldots,\ \mathbf{v}_j,\ \ldots) = \det(\ldots,\ \mathbf{v}_j,\ \ldots,\ \mathbf{v}_i,\ \ldots)$, segue que $\det(\ldots,\ \mathbf{v}_i,\ \ldots,\ \mathbf{v}_j,\ \ldots) = 0$.

D1 A linearidade é imediata, notando que cada parcela de 7 contém exatamente uma coordenada do vetor $\mathbf{v}_i + k\mathbf{u}_i$, de modo que

$$\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i + k\mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_n) + k\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

D3 Vamos mostrar que $\det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$.

Se $\sigma(i) \neq i$, então $v_{\sigma(i)i} = 0$. Assim, apenas a permutação identidade, produz um termo não-nulo. No caso da permutação identidade, temos que o sinal é 1 e todos os termos $v_{\sigma(i)i} = 1$, e logo $\det(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$.

Definição

A única função volume vol *é denominada função* ***determinante****, e será denotada* $\det(A)$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. *Então* $\det(A) \neq 0$ *se e somente se* A *não for singular.*

Demonstração

Pela Proposição 2, para qualquer função volume vol_a, $\mathrm{vol}_a(A) = 0$ se A for singular. Para qualquer função volume não trivial, ou seja, para qualquer função vol_a com $a \neq 0$, observamos no decorrer da prova do Teorema 7 que, para qualquer matriz não singular A, $\mathrm{vol}_a(A) = c\,\mathrm{vol}_a(I) = ca$ para $c \neq 0$.

Notação

O determinante de A, denotado por $\det A$ *ou* $|A|$*, pode ser denotado diretamente em termos de entradas da matriz escrevendo barras em vez de colchetes:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Propriedades

Teorema

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. *Então*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Demonstração

Defina uma função $f\colon \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{V}$ por $f(B) = \det(AB)$. É simples verificar se f é multilinear e alternado; portanto, f é uma função volume $f(B) = \mathrm{vol}_a(B) = a\det(B)$ onde $a = f(I) = \det(AI) = \det(A)$.

Proposição

1. $\det(A) \neq 0$ *se e somente se A for invertível.*
2. *Se A for invertível,* $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
3. *Se A for invertível, então para qualquer matriz B,* $\det(ABA^{-1}) = \det(B)$.

Demonstração

Já vimos no Lema 2 que, para qualquer função de volume, f, $f(A) = 0$, se A não for invertível. Se A é invertível, temos $1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ a partir do qual o corolário segue.

Proposição

1. *Seja A uma matriz diagonal. Então $\det(A)$ é o produto de suas entradas diagonais.*
2. *De maneira mais geral, seja A uma matriz triangular superior ou uma triangular inferior. Então $\det(A)$ é o produto de suas entradas diagonais.*

Demonstração

(1) Se A é diagonal, existe apenas um termo diferente de zero na Definição 3.2.5, o termo correspondente à permutação de identidade ($\sigma(i) = i$ para cada i), que possui sinal $+$ l.

(2) Se σ não for a identidade, haverá um j com $\sigma(j) < j$ e um k com $\sigma(k) > k$, portanto, para um triangular matriz há novamente apenas o termo diagonal. $\square$

Teorema

1. *Seja M uma matriz diagonal por bloco,*

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Então $\det(M) = \det(A)\det(D)$.

2. *Em geral, seja M uma matriz triangular superior por bloco ou uma matriz triangular inferior por bloco,*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad ou \quad M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$$

Então $\det(M) = \det(A)\det(D)$.

Demonstração

1 Defina uma função $f\colon \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ por

$$f(D) = \det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\right).$$

Então f é multilinear e alternado, então $f(D) = f(I)\det(D)$. Mas $f(I) = \det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}\right) = \det(A)$.(É fácil ver esta última igualdade como qualquer permutação que contribua com zero para $\det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}\right)$ deve corrigir todos, exceto (possivelmente) as primeiras entradas de n.)

2 Suponha que M seja triangular superior (a caixa triangular inferior é semelhante). Se A for singular, haverá um vetor $v \neq 0$ com $Av = 0$. Então seja w o vetor cujas primeiras entradas n são as de v e as entradas restantes são 0. Então $Mw = 0$. Assim, M também é singular e $0 = 0 \cdot \det(D)$.

Suponha que A não seja singular. Então

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

A primeira matriz do lado direito possui o determinante $\det(A)\det(D)$, e a segunda matriz do lado direito tem o determinante 1, pois é triangular superior, e o teorema segue. $\square$

Proposição

Seja A^t a matriz transposta de A. Então $\det(A^t) = \det(A)$.

Demonstração

Se $\sigma \in S_n$, $\text{sinal}(\sigma^{-1}) = \text{sinal}(\sigma)$. Seja $B = (b_{ij}) = A^t$. Então

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sinal}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sinal}(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sinal}(\sigma^{-1}) a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \text{sinal}(\sigma^{-1}) b_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots b_{\sigma^{-1}(n),n} \\
&= \det({}^tA)
\end{aligned}$$

Denote por A_{ij} o menor $(i,\ j)$ da matriz A, i.e., a submatriz obtida pela exclusão da linha i e da coluna j de A.

Teorema (Expansão de Laplace)

Seja A uma matriz n por n, $A = (a_{ij})$.

1. *Para qualquer i,*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \ .$$

2. *Para qualquer j,*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \ .$$

3. *Para qualquer i e para qualquer $k \neq i$,*

n

Demonstração

Demonstraremos (1) e (3) simultaneamente, portanto fixamos k (que pode ou não ser igual a i).

A soma do lado direito é a soma das funções multilineares e, portanto, é multilinear.(Isso também é fácil de ver diretamente.)

Agora mostramos que é alternado. Seja A uma matriz com as colunas p e q iguais, onde $1 \leq pqn$. Se $j \neq p, q$, então A_{ij} for uma matriz com duas colunas iguais, então $\det(A_{ij}) = 0$.

Assim, os únicos dois termos que contribuem para a soma são

$$(-1)^{i+p} a_{kp} \det(A_{ip}) + (-1)^{i+q} a_{kq} \det(A_{iq}) \ .$$

Por hipótese, $a_{kq} = a_{kp}$. Agora

$$A_{ip} = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_{p-1} \mid \mathbf{v}_{p+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_{q-1} \mid \mathbf{v}_q \mid \mathbf{v}_{q+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n],$$

$$A_{iq} = [\mathbf{v}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_{p-1} \mid \mathbf{v}_p \mid \mathbf{v}_{p+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_{q-1} \mid \mathbf{v}_{q+1} \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n].$$

onde $\mathbf{v}_m$ indica a coluna m da matriz obtida de A excluindo a linha i de A.

Por hipótese, $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_q$, portanto, essas duas matrizes têm as mesmas colunas, mas em uma ordem diferente. Passamos do primeiro para o segundo, executando sucessivamente trocas de coluna $qp - 1$ (primeiro alternando $\mathbf{v}_q$ e $\mathbf{v}_{q-1}$ e depois alternando $\mathbf{v}_q$ e $\mathbf{v}_{q-2}, \ldots$ e, finalmente, alternando $\mathbf{v}_q$ e $\mathbf{v}_{p+1}$), então $\det(A_{iq}) = (-1)^{qp-1}\det(A_{ip})$. Assim, vemos que a contribuição desses dois termos para a soma é

$$(-1)^{i+p} a_{kp} \det(A_{ip}) + (-1)^{i+q} a_{kp} (-1)^{qp-1} \det(A_{ip})$$

e como $(-1)^{i+p}$ e $(-1)^{i+2q-p-1}$ sempre têm sinais opostos, eles cancelam.

Teorema (Regra de Cramer)

Seja $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ *uma matriz invertível e* $\mathbf{b}$ *seja um vetor em* $\mathbb{K}^n$*. Considere o sistema linear* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*. Então:*

1. *Existe um único vetor* $\mathbf{x}$ *em* $\mathbb{K}^n$ *que resolve o sistema linear* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*.*
2. *Se* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^t$*. Então:*

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}, \quad 1 \leq i \leq n$$

onde $A_i(b)$ *é a matriz obtida de* A *substituindo sua* $i-$*ésima coluna por* b*.*

Demonstração

Denotaremos as colunas de A por $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Por linearidade, basta provar o corolário para todos os elementos de qualquer base, $\underline{\mathrm{B}}$ de $\mathbb{K}^n$. Escolhemos a base $\underline{\mathrm{B}} = \{\mathbf{a}_1, \ \ldots, \ \mathbf{a}_n\}$.

Corrija j e considere $Ax = \mathbf{a}_i$. Então $A_i(\mathbf{a}_i) = A$, então a fórmula acima fornece $x_i = 1$. Para $j \neq i, A_i(\mathbf{a}_j)$ é uma matriz com duas colunas idênticas; portanto, a fórmula acima fornece $x_j = 0$. Assim, $x = \mathbf{e}_i$, o i-ésimo vetor da base canônica, e de fato $A\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$.

Comentários Finais.