Álgebra Linear Avançada

Equivalência e Similaridade

Daniel Miranda Machado

19 de novembro de 2020

UFABC

UFABC

Operadores Equivalentes

No Teorema de Mudança de Bases demonstramos que a mudança de bases é dada por

$$[T]_{\underline{B}',\underline{C}'} = M_{\underline{C}\to\underline{C}'}\,[T]_{\underline{B},\underline{C}}\,M^{-1}_{\underline{B}\to\underline{B}'} \text{ e logo}$$
$$[T]_{\underline{B}',\underline{C}'} = P[T]_{\underline{B},\underline{C}}Q^{-1}$$

onde P e Q são matrizes invertíveis. Isso motiva a seguinte definição.

Definição (Matrizes Equivalentes)

*Duas matrizes A e B são **equivalentes** se existirem matrizes inversíveis P e Q para as quais*

$$B = PAQ^{-1}$$

Observamos que B é equivalente a A se e somente se B puder ser obtido de A por uma série de operações elementares de linha e coluna. Executar as operações da linha é equivalente a multiplicar a matriz A à esquerda por P e executar as operações da coluna é equivalente a multiplicar A à direita por Q^{-1}.

Se A e B são matrizes que representam T em relação a possíveis bases ordenadas diferentes, então A e B são equivalentes. O inverso disso também vale.

Teorema

Sejam V *e* W *espaços vetoriais com* $\dim(V) = n$ *e* $\dim(W) = m$. *Então as matrizes* A *e* $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ *são equivalentes se, e somente se, representam a mesma transformação linear* $T \in \mathrm{Hom}(V,\ W)$, *mas possivelmente em relação a diferentes bases ordenadas.*

Demonstração

Se A e B representam T, isto é, se

$$A = [T]_{\underline{B},\underline{C}} \quad \text{e} \quad B = [T]_{\underline{B}',\underline{C}'}$$

para bases ordenadas $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{B}'$ e $\underline{C}'$. E assim A e B são equivalentes. Agora, suponha que A e B sejam equivalentes, digamos

$$B = PAQ^{-1}$$

onde P e Q são invertíveis. Suponha também que A represente uma transformação linear $T \in \mathrm{Hom}(V, \ W)$ para algumas bases ordenadas $\underline{B}$ e $\underline{C}$, ou seja,

$$A = [T]_{\underline{B},\underline{C}}$$

Sabemos que existe uma única base ordenada $\underline{B}'$ para V para a qual $Q = M_{\underline{B},\underline{B}'}$ e uma única base ordenada $\underline{C}'$ por W para a qual $P = M_{\underline{C},\underline{C}'}$. Consequentemente

$$B = M_{\underline{C},\underline{C}'}[T]_{\underline{B},\underline{C}}M_{\underline{B}',\underline{B}} = [T]_{\underline{B}',\underline{C}'}$$

Portanto, B também representa T. Por simetria, vemos que A e B representam o mesmo conjunto de transformações lineares. Isso completa a demonstração.

Vamos provar agora que toda matriz é equivalente a exatamente uma matriz da forma de bloco

$$J_k = \begin{bmatrix} I_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{m-k,k} & 0_{m-k,n-k} \end{bmatrix}$$

Teorema (da Forma Normal Zero-Um)

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear de espaços dimensionais de dimensão finita. Então:

1. *Existe uma decomposição direta $V = V_0 \oplus V_1, W = W_1 \oplus W_2$ tal que $\ker T = V_0$ e T induz um isomorfismo de V_1 em W_1.*
2. *Existem bases em V e W tais que a matriz de T nessas bases tem a forma (a_{1j}), onde $a_{ii} = 1$ para $1 \leq i \leq r$ e $a_{ij} = 0$ para os valores restantes de i, j.*
3. *Seja $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Então, existem matrizes quadradas não singulares $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ e $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ e um número $r \leq \min(m, n)$ tal que a matriz BAC tenha o formato descrito no item anterior. O número T é único e igual ao posto de A.*

Demonstração

1) Defina $V_0 = \ker T$ e faça V_1 um complemento direto de V_0. Em seguida, defina $W_1 = \operatorname{im} T$ e faça W_2 um complemento direto de W_1. Precisamos apenas verificar se T determina um isomorfismo de V_1 a W_1.

A aplicação $T : V_1 \to W_1$ é injetiva, porque o núcleo de T, ou seja, V_0, intercepta V_1 apenas na origem. É sobrejetiva, porque se $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \in V, \mathbf{v}_0 \in V_0, \mathbf{v}_1 \in V_1$, então $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{v}_1)$.

Faremos $r = \dim V_1 = \dim W_1$ e escolheremos a base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ de V, onde os primeiros vetores r formam um base de V_1 e os vetores restantes formam uma base de V_0. Além disso, os vetores $\mathbf{e}'_i = T(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq r$ formam uma base de $W_1 = \operatorname{im} T$. Estendemos esse conjunto de modo a obter uma base de W com os vetores $\{\mathbf{e}'_{r+1}, \ldots \mathbf{e}'_m\}$. Obviamente

$$T(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}_r, 0, \ldots, 0)$$

E dessa forma nas bases $\underline{B} = \{\mathbf{e}\}$ e $\underline{B}' = \{\mathbf{e}\}$

$$[T]_{\underline{B},\underline{B}'} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base na matriz A, construímos uma transformação linear T do espaço de coordenadas $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ com essa matriz e depois aplicamos a asserção $\boxed{\mathbf{b}}$ acima. Nas novas bases, a matriz de T terá o formato necessário e será expressa em termos de A no formato BAC, onde B e C são as matrizes de mudança de base. Por fim, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} BAC = \operatorname{rank} T = \dim \operatorname{im} T$. Isso completa a prova.

Invariantes

Um conjunto completo de invariantes para um problema de classificação é uma coleção de mapas de invariantes

$$f_i : X \to Y_i$$

onde X é a coleção de objetos sendo classificados, a menos da relação de equivalência e Y_i são os conjuntos de invariantes, de modo que $x \sim x'$ se e somente se $f_i(x) = f_i(x')$ para todos os i. Ou seja, dois objetos são equivalentes se e somente se todos os invariantes forem iguais

Portanto, o conjunto dessas matrizes é um conjunto de formas canônicas pela relação de equivalência. Além disso, o posto é uma invariante completo para equivalência. Em outras palavras, duas matrizes são equivalentes se e somente se tiverem o mesmo posto.

Operadores Similares

Quando um operador linear $T \in \mathrm{Hom}(V)$ é representado em diferentes bases temos que:

$$[T]_{\underline{B}'} = P[T]_{\underline{B}}P^{-1}$$

onde P é uma matriz invertível. Isso motiva a seguinte definição.

Definição (Operadores Semelhantes)

a *Dois operadores lineares $T, S \in \operatorname{Hom}(V)$ são **semelhantes**, denotados por $T \sim S$, se existir um automorfismo $P \in \operatorname{Hom}(V)$ para os quais*

$$S = PTP^{-1}$$

b *Suas matrizes A e B são **semelhantes**, indicadas por $A \sim B$, se existir uma matriz inversível P para a qual*

$$B = PAP^{-1}$$

As classes de equivalência associadas à similaridade são chamadas classes de similaridade

As classes de similaridade não são todas iguais. Alguns são triviais, consistindo em um único ponto: por exemplo, se $A = 0$ ou $A = \lambda I$ temos

$$PAP^{-1} = \lambda SIS^{-1} = \lambda SS^{-1} = \lambda I = A$$

para todas as matrizes invertíveis P.

Dessa forma a classe de similaridade $[A]$ consiste no único ponto A. Em particular,

$$[0] = \{0\}, [I] = \{I\} \text{ e } [-I] = \{-I\}.$$

Ressaltamos que em geral as classes podem ser conjuntos bem mais complicados.

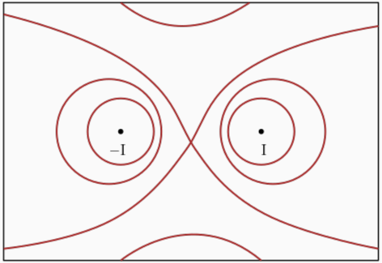

Figura 1: As classes de similaridade em $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ particionam o espaço daa matrizes em subconjuntos disjuntos $[A]$. Algumas classes são pontos, por exemplo $[-I]$, $[I]$ e $[0]$. Algumas classes são hiper-superfícies complicadas em $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$. Uma classe de similaridade pode ter várias componentes conexas.

Teorema

Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Então, dois operadores lineares T e S em V são semelhantes se, e somente se, houver uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ que represente os dois operadores, mas com relação a bases ordenadas possivelmente diferentes.

Teorema

Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Então, duas matrizes A e $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ são semelhantes se, e somente se, representam o mesmo operador linear $T \in \operatorname{Hom}(V)$, mas possivelmente em relação a diferentes bases ordenadas.

Comentários Finais.