Álgebra Linear Avançada

Forma de Jordan

Daniel Miranda Machado

26 de novembro de 2020

UFABC

Seja $T : V \to V$ um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita tal que o polinômio característico do operador se fatora em fatores lineares sobre $\mathbb{K}$ (o que sempre ocorre se $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado). Mostraremos que existe uma base $\underline{B}$ de V, na qual $[T]_{\underline{B}}$ é uma matriz na forma normal de Jordan :

$$\begin{bmatrix} J_{t_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{t_2}(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{t_r}(\lambda_r) \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad J_t(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & & & \\ & & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde $J_t(\lambda)$ é um bloco de Jordan para algum $t \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

A base no qual o operador está na forma de Jordan é denominada **base de Jordan**. A demonstração do Teorema de Jordan é envolvente e assim começaremos discutindo o caso para operadores nilpotentes.

Operadores Nilpotentes

Definição (Nilpotente)

Um operador linear $T : V \to V$ é dito

1. ***nilpotente*** *se $T^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$*
2. ***unipotente*** *se $T = I + N$ com N nilpotente.*

Obviamente, T é unipotente se e somente se $T - I$ é nilpotente. Matrizes nilpotentes e unipotentes $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ são definidas de maneira análoga.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ em $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$. Esta é uma matriz nilpotente e, em qualquer corpo, a única raiz de seu polinômio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2$ é $\lambda = 0$. Existe um autovetor não trivial $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, correspondente ao autovalor $\lambda = 0$. Os múltiplos escalares de $\mathbf{e}_1$ são os únicos autovetores de A, e portanto, não existe uma base de autovetores e assim a matriz A não pode ser diagonalizada, independentemente do corpo $\mathbb{K}$.

De modo geral, os operadores nilpotentes não podem ser diagonalizados, a menos que sejam o operador nulo. Qualquer análise de formas normais deve examinar esses operadores em detalhes e é o que faremos nessa seção.

Proposição

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se $T : V \to V$ for nilpotente então $p_T(\lambda) = \det(T - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n$ onde $n = \dim V$ e assim $\lambda = 0$ é o único autovalor e o autoespaço associado a $\lambda = 0$ é $\ker T$.

Como consequência direta do Teorema de Schur temos:

Proposição

Dado T um operador nilpotente então existe uma base na qual a matriz de T é triangular estritamente superior.

Decomposição de Fitting

Se $T\colon V \to V$ for um operador linear em um espaço vetorial dimensional finito, definimos $K_i = \ker(T^i)$ e $R_i = \operatorname{im}(T^i)$ para $i \in \mathbb{N}$. Esses espaços formam duas cadeias de espaços vetoriais

$$\{0\} \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq \cdots \tag{1}$$

$$V \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \cdots \supseteq R_i \supseteq R_{i+1} \supseteq \cdots , \tag{2}$$

e se $\dim(V) < \infty$, cada uma dessas cadeias se estabiliza em algum momento, digamos com $K_r = K_{r+1} = \cdots$ e $R_s = R_{s+1} = \cdots$ para inteiros r e s. De fato, se r é o menor índice tal que $K_r = K_{r+1} = \cdots$, a sequência de imagens também deve se estabilizar no mesmo índice pois $\dim V = \dim K_i + \dim R_i$ em cada etapa.

Com isso em mente, definimos

- a **imagem estável** de T: $R_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = R_r = R_{r+1} = \cdots$
- o **núcleo estável** de T: $K_\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = K_r = K_{r+1} = \cdots$

Teorema (Decomposição de Fitting)

Sejam V um espaço de dimensão finita e $T : V \to V$. Então V se decompõe de maneira única como soma direta $V = R \oplus K$ satisfazendo

1. *os espaços R, K são T-invariantes;*
2. *$T\restriction_K$ é um operador linear nilpotente em K;*
3. *$T\restriction_R$ é um operador linear bijetivo em R.*

E portanto, todo operador linear T em um espaço dimensional finito V, sobre qualquer corpo, tem uma decomposição como soma direta

$$T = (T\restriction_R) \oplus (T\restriction_K)$$

com $T\restriction_K$ nilpotente e $T\restriction_R$ é bijetivo em R.

Demonstração

Escolhemos $R = R_\infty$ e $K = K_\infty$.

Afirmamos que T é nilpotente em K_∞ e T é invertível em R_∞. De fato, é fácil ver que $T(R_\infty) = R_\infty$, o que implica que T é invertível em R_∞. Também temos que $K_\infty = \ker(T^r)$ para algum $r \geq 1$ e, portanto, T é nilpotente em K_∞.

Afirmamos que $V = K_\infty \oplus R_\infty$. É direto que $K_\infty \cap R_\infty = \{\mathbf{0}\}$. Portanto, basta mostrar que todo $\mathbf{v} \in V$ pode ser decomposto como $k + r$ com $k \in K_\infty$ e $r \in R_\infty$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $K_\infty = \ker(T^r)$ e $R_\infty = T^r V$. Como $\mathrm{im}(T^{2r}) = \mathrm{im}(T^r)$, temos $T^r(\mathbf{v}) = T^{2r}(\mathbf{w})$ para algum $\mathbf{w} \in V$. Logo $T^r(\mathbf{v} - T^r(\mathbf{w})) = T^r(\mathbf{v}) - T^{2r}(\mathbf{w}) = 0$. Então definimos

$$k := \mathbf{v} - T^r(\mathbf{w}) \in K_\infty \qquad r := T^r(\mathbf{w}) \in R_\infty$$

e temos a decomposição desejada de $\mathbf{v}$.

Finalmente, mostramos que a decomposição $V = K_\infty \oplus R_\infty$ é única. Suponha $V = A \oplus B$ com T nilpotente em A e invertível em B. Então $A \subseteq \ker(T^k)$ para algum número inteiro positivo k e $B \subseteq \mathrm{im}(T^k)$ para todo número inteiro positivo k. Assim,

$$A \subseteq K_\infty \text{ e } B \subseteq R_\infty.$$

Por considerações de dimensão, devemos ter $A = K_\infty$ e $B = R_\infty$.

Definição (Índice de Nilpotência)

Seja $T : V \to V$ nilpotente, o ***índice de nilpotência****, denotado por $\deg T$, é o menor expoente r tal que $T^r = 0$.*

Se V é um espaço vetorial de dimensão finita então esse expoente existe porque a cadeia

$$\{0\} \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq \cdots$$

se estabiliza em $K_r = V$.

Lema

Se, para algum vetor $\mathbf{v} \in V$ *e algum inteiro* m*, tivermos:*

$$T^{m-1}\mathbf{v} \neq 0 \text{ mas } T^m\mathbf{v} = 0$$

então o conjunto $\{\mathbf{v}, T\mathbf{v}, \ldots, T^{m-1}\mathbf{v}\}$ *é linearmente independente.*

Demonstração. A demonstração será deixada como exercício. $\triangleleft$

- Uma transformação linear $T \in \mathrm{Hom}(V)$ é dita **cíclica** se houver um vetor $\mathbf{v} \in V$ de modo que $\{\mathbf{v}, T\mathbf{v}, \ldots, T^{n-1}\mathbf{v}\}$ é uma base de V.
- Nesse caso diremos que $\mathbf{v}$ é um **vetor cíclico** para T e que o espaço V é **cíclico** para T ou T-cíclico.
- Se $\mathbf{v}$ é um vetor cíclico para T, diremos que a base correspondente $\{\mathbf{v}, T\mathbf{v}, \ldots, T^{n-1}\mathbf{v}\}$ é uma **base cíclica** para V.

Proposição

Se V é um espaço vetorial dimensional finito e T é um operador nilpotente com índice de nilpotência igual à dimensão de V, então T é cíclico.

Seja $n = \dim V$. Nesse caso como o índice de nilpotência é n existe $\mathbf{v}$ tal que $T^{n-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Logo pelo Lema o conjunto $\{\mathbf{v}, T\mathbf{v}, \ldots, T^{n-1}\mathbf{v}\}$ é linearmente independente e por argumento de dimensão é base de V.

Exemplo

O operador linear associado a matriz é nilpotente de índice de nilpotência 4

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 & -5 & 6 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

O vetor $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0, 0] \notin \ker T^3$. Logo o conjunto

$$\underline{\mathrm{B}} = (\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_1, T^2\mathbf{e}_1, T^3\mathbf{e}_1) = ([1, 0, 0, 0], [-2, -2, 0, 1], [-2, -2, 0, 0], [-8, -4, -4, -2])$$

é uma base de V e nessa base

$$[T]_{\underline{\mathrm{B}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por outro lado se escolhermos a base na ordem reversa

$$\underline{B}_2 = (T^3\mathbf{e}_1, T^2\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = ([-8,-4,-4,-2],[-2,-2,0,0],[-2,-2,0,1],[1,0,0,0])$$

temos que

$$[T]_{\underline{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O que se pode dizer de T se for nilpotente com índice de nilpotência for menor que a dimensão de V?

Operadores nilpotentes e vetores cíclicos

Começaremos caracterizando as bases de Jordan.

Proposição

Dado $T \in \mathrm{Hom}(V, V)$ com T nilpotente então são equivalentes:

1. $(\mathbf{u}_1^1, \ldots, \mathbf{u}_{k_1}^1, \mathbf{u}_1^2, \ldots, \mathbf{u}_{k_2}^2, \ldots, \mathbf{u}_1^m, \ldots \mathbf{u}_{k_m}^m)$ *é uma base de Jordan para T;*
2. $T\mathbf{u}_j^l = \mathbf{u}_{j+1}^l$, *onde interpretamos $\mathbf{u}_j^l = 0$ se $j > k_l$.*
3. *Existem $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ tal que:*

$$\{\mathbf{u}_1, T\mathbf{u}_1, \ldots, T^{k_1}\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, T^{k_2}\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m, \ldots, T^{k_m}\mathbf{u}_m\}$$

é base de Jordan para T.

Uma representação diagramática da base de Jordan é

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\mathbf{u}_1 \arrow[d] & & & \\
T\mathbf{u}_1 \arrow[d] & \mathbf{u}_2 \arrow[d] & & \\
T^2\mathbf{u}_1 \arrow[d] & T\mathbf{u}_2 \arrow[d] & & \mathbf{u}_m \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] \\
T^{k_1}\mathbf{u}_1 & T^{k_2}\mathbf{u}_2 & \ldots & T^{k_m}\mathbf{u}_m
\end{tikzcd}$$

Teorema da Decomposição Cíclica para Operadores Nilpotentes

Teorema

Todo operador T nilpotente agindo num espaço vetorial f.d. possui uma base de Jordan $\underline{J}$. Nessa base a matriz de T é

$$[T]_{\underline{J}} = \operatorname{diag}(J_{a_1}(0), \ldots, J_{a_k}(0))$$

com $a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 1$ e $a_1 + \cdots + a_k = n$.

Se denotarmos por n_i o número de blocos de Jordan $J_i(0)$ de ordem i que aparecem em $[T]_{\underline{J}}$, então

$$n_i = 2 \dim \ker T^i - \dim \ker T^{i-1} - \dim \ker T^{i+1}.$$

Tal representação de T é única a menos de permutação dos blocos.

Demonstração

Faremos a demonstração por indução sobre $\dim V$. Como T é nilpotente, $\dim \operatorname{im} T < \dim T$. Se $\operatorname{im} T = 0$, $T = 0$ e o resultado é trivial, por isso, podemos assumir que $\operatorname{im} T \neq 0$.

Por indução, existem $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in \operatorname{im} T$, de modo que

$$\{\mathbf{u}_1, T\mathbf{u}_1, \ldots, T^{a_1-1}\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, T\mathbf{u}_k, \ldots, T^{a_k-1}\mathbf{u}_k\}$$

é uma base de Jordan para T.

Para $1 \leq i \leq k$ escolha $\mathbf{v}_i \in V$ tal que $\mathbf{u}_i = T\mathbf{v}_i$. Claramente

$$\left\langle T^{a_1-1}\mathbf{u}_1, \dots, T^{a_k-1}\mathbf{u}_k \right\rangle \subseteq \ker T.$$

Estenderemos essa base a uma base de $\ker T$, adicionando $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$.

Afirmamos que os vetores

$$\{\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_1, \dots, T^{a_1}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, T\mathbf{v}_k, \dots, T^{a_k}\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l\}$$

formam uma base para V.

A independência linear pode ser verificada facilmente. Suponha que exista uma combinação linear não trivial dos vetores dando 0

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{a_i} a_{ij}T^j\mathbf{v}_i + \sum_{k=1}^{l}\mathbf{w}_k = 0$$

aplicando T teremos que os coeficientes dos vetores:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{a_i-1} a_{ij}T^j\mathbf{u}_i = 0$$

e como esses vetores são linearmente independentes, temos que $a_{ij=0}$ se $i < a_i$.

Logo a combinação inicial se reduz a uma combinação dos vetores $T^{a_1}\mathbf{v}_1, \dots, T^{a_k}\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$. Mas esses vetores formam uma base para o núcleo de T, logo os coeficientes desses vetores também são nulos. E assim temos que são linearmente independentes.

Para mostrar que este vetores geram V, usamos um argumento dimensional. Sabemos que $\dim \ker T = k + l$ e $\dim \operatorname{im} T = a_1 + \ldots + a_k$. Por isso $\dim T = (a_1 + 1) + \ldots + (a_k + 1) + l$, que é o número de vetores acima.

Portanto, construímos uma base para V na qual $T : V \longrightarrow V$ está na forma normal de Jordan.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{v}_1 \arrow[d] & & & & & & \\
T\mathbf{v}_1 \arrow[d] & \mathbf{v}_2 \arrow[d] & & & & & \\
T\mathbf{v}_1 \arrow[d] & T\mathbf{v}_2 \arrow[d] & & \mathbf{v}_m \arrow[d] & & & \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \cdots & \vdots \arrow[d] & & & \\
T^{a_1}v & T^{a_2}\mathbf{v}_2 & & T^{a_m-1}\mathbf{v}_m & \mathbf{w}_1 & \cdots & \mathbf{w}_l
\end{tikzcd}
$$

Tabela 1: Base de Jordan para V. Em vermelho a base de Jordan para $\operatorname{im} T$.

Para calcular a fórmula para n_i, observe a maneira como escrevemos a base $\underline{J}$ como um diagrama bidimensional. Cada bloco de Jordan em $[T]_{\underline{J}}$ corresponde a uma coluna de vetores nessa matriz.

Os vetores nas últimas k linhas correspondem a uma base de $\ker T^k$. Assim o número de vetores na k-ésima linha é $\dim\ker T^k - \dim\ker T^{k-1}$. E na $k+1$-ésima linha é $\dim\ker T^{k+1} - \dim\ker T^k$. A diferença desses dois números é exatamente o número de colunas de altura **exatamente** k.

$$\begin{aligned} n_i &= \dim\ker T^k - \dim\ker T^{k-1} - (\dim\ker T^{k+1} - \dim\ker T^k) && (3) \\ &= 2\dim\ker T^k - \dim\ker T^{k-1} - \dim\ker T^{k+1} && (4) \end{aligned}$$

Observe que os números n_i não dependem da base específica. Portanto, a representação do bloco Jordan de T é única a menos de uma permutação dos blocos.

Exemplo

O operador linear associado a matriz é nilpotente com índice de nilpotência 2

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -9 & 4 \end{bmatrix}$$

Os vetores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0]\}$ não estão em $\ker T$. Logo o conjunto

$$\underline{C} = (\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, T\mathbf{e}_2) = ([1, 0, 0, 0], [-4, 0, 0, 4], [0, 1, 0, 0], [6, 2, 2, -1])$$

é uma base de V e nessa base

$$[T]_{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes de mudança de base são

$$M_{\underline{C}\to\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad M_{\underline{B}\to\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

E assim

$$[T]_{\underline{C}} = M_{\underline{B}\to\underline{C}}[T]_{\underline{B}}\, M_{\underline{C}\to\underline{B}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 6 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

E o diagrama representando esse operador é:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet & \bullet
\end{tikzcd}$$

Forma Normal de Jordan

Antes de demonstrarmos o Teorema da Forma Normal de Jordan observamos que para $T \in \mathrm{Hom}(V, V)$ são equivalentes:

1. $\left(\mathbf{u}_1^1, \ldots, \mathbf{u}_{k_1}^1, \mathbf{u}_1^2, \ldots, \mathbf{u}_{k_2}^2, \ldots, \mathbf{u}_1^m, \ldots \mathbf{u}_{k_m}^m\right)$ é uma base de Jordan para T;
2. Existem $\lambda_j \in \overline{\mathbb{K}}$ tal que $T\mathbf{u}_j^m = \lambda_j \mathbf{u}_j^m + \mathbf{u}_{j+1}^m$, onde $\mathbf{u}_j^l = 0$ se $j > k_l$.

Forma Normal de Jordan

Teorema

Seja $T : V \to V$ um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita tal que o polinômio característico do operador se fatora em fatores lineares sobre $\mathbb{K}$. Então:

1. *Existe uma base de Jordan para T, isto é existe uma base de V na qual a matriz de T está na forma normal de Jordan , i.e, existe uma matriz mudança de base M tal que a matriz do operador na base original A pode ser reduzida a forma de Jordan*
$$M^{-1}AM = J$$
2. *A matriz J é única, a menos de permutação dos blocos de Jordan.*

Demonstração

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Pelo Teorema da Decomposição em Auto-espaços Generalizados existem $E_{\lambda_j}^{\infty}$ auto espaços generalizados associados a T de modo que

$$V = \oplus_{j=1}^{m} E_{\lambda_j}^{\infty}(T)$$

Restrito a cada $E^{\infty}_{\lambda_j}$, a transformação $T - \lambda_i \mathrm{I}$ é nilpotente e assim pelo Teorema da Decomposição Cíclica para Operadores Nilpotentes existe uma base $\underline{\mathrm{B}} = \left(e_k^{\lambda_i}\right)_{k=i}^{r_i}$ e blocos de Jordan $J_{t_k}(0)$ com $k = 1, \ldots, r_k$ de modo que a matriz de $T - \lambda_i \mathrm{I}$ nessa base é:

$$[T - \lambda_i \mathrm{I}]_B = \begin{bmatrix} J_{t_1^{\lambda_i}}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{t_{r_i}^{\lambda_i}}(0) \end{bmatrix} \text{ e assim } [T]_{\underline{\mathrm{B}}} = \begin{bmatrix} J_{t_1^{\lambda_i}}(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{t_{r_k}^{\lambda_i}}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Seja $\bigcup_{\lambda_i \in \operatorname{spec} T} \{e_k^{\lambda_i}\}_{k=i}^{r_{\lambda_i}}$ a base de V obtida pela concatenação das bases de $V(\lambda_i)$.

Nessa base a matriz de T é:

$$\begin{bmatrix} J_{t_1^{\lambda_1}}(\lambda_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{t_{r_1}^{\lambda_1}}(\lambda_1) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & J_{t_1^{\lambda_m}}(\lambda_m) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_{t_{r_m}^{\lambda_m}}(\lambda_m) \end{bmatrix}$$

O que termina a parte de existência demonstração do teorema de Jordan.

Unicidade da forma de Jordan

Seja $\underline{B}$ uma base de Jordan do operador T. Nessa base os elemento diagonais da matriz $[T]_{\underline{B}}$ são os autovalores λ desse operador. Fixemos um autovalor λ e sejam os blocos correspondentes a esse autovalor e denote por J_λ o subespaço gerado. Como $(J_r(\lambda) - \lambda\,\mathrm{I})^r = 0$, temos $J_\lambda \subset E_\lambda^\infty$.

Como $V = \oplus J_{\lambda_i}$ pela definição da base da Jordan e $V = \oplus E^{\infty}_{\lambda_i}(T)$ Teorema da Decomposição em Auto-espaços Generalizados temos que $\dim J_{\lambda_i} = \dim E^{\infty}_{\lambda_i}(T)$ e $J_{\lambda_i} = E^{\infty}_{\lambda_i}(T)$. Portanto, a soma das dimensões dos blocos do Jordan, correspondentes a cada autovalor λ_{i_1}, é independente da escolha da base de Jordan e, além disso, o espaço gerado pelos subconjuntos correspondentes da base J_{λ_i} são independentes da base. Portanto, é suficiente verificar a unicidade para o caso $E^{\infty}_{\lambda_i}(T)$ ou sem perda de generalidade para $E^{\infty}_{0}(T)$. O que já fizemos.

Corolário

Todo operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\overline{\mathbb{K}}$ *algebricamente fechado possui uma forma de Jordan.*

Comentários Finais.