

# Álgebra Linear Avançada

## Cálculo da Forma de Jordan

---

Daniel Miranda Machado

27 de novembro de 2020

UFABC



## Forma de Jordan

Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita tal que o polinômio característico se fatora em termos lineares sobre  $\mathbb{K}$ . Então:

- 1 Existe uma base de Jordan para  $T$ , i.e, existe uma matriz mudança de base  $M$  tal que a matriz do operador na base original  $A$  pode ser reduzida a forma de Jordan

$$M^{-1}AM = J$$

- 2 Se denotarmos por  $n_i$  o número de blocos de Jordan  $J_i(\lambda)$  de ordem  $i$  que aparecem em  $[T]_J$ , então

$$n_i = 2\dim \ker (T - \lambda)^i - \dim \ker (T - \lambda)^{i-1} - \dim \ker (T - \lambda)^{i+1}.$$

- 3 A matriz  $J$  é única, a menos de permutação dos blocos de Jordan.

Dividiremos o processo de obtenção da forma de Jordan de um operador em duas etapas:

- 1 Primeiramente calcularemos os diagramas de Jordan para cada autovalor obtendo assim a matriz de Jordan desse operador;
- 2 Finalmente calcularemos a base na qual o operador é descrito por essa matriz.

## Cálculo dos Diagramas de Jordan

---

Dado um autovalor  $\lambda$  de  $T$ , e o seu diagrama de Jordan. Observe que a linha inferior desse diagrama consiste numa base para  $\ker(T - \lambda I)$  e assim o número de vetores na linha inferior é  $\dim \ker(T - \lambda I)$ . De modo análogo temos que as duas linhas inferiores formam uma base para  $\ker(T - \lambda I)^2$  e assim sucessivamente.

Logo para determinarmos esse diagrama é suficiente calcularmos:

$$\dim \ker (T - \lambda I), \dim \ker (T - \lambda I)^2 - \dim \ker (T - \lambda I), \dim \ker (T - \lambda I)^3 - \dim \ker (T - \lambda I)^2, \dots$$

Cada um desses números nos fornece quantos vetores aparecem em cada linha do diagrama.

## Cálculo da Matriz Mudança de Base

---

Para calcularmos a matriz mudança de base é suficiente resolvermos a equação linear:

$$AM = MJ.$$

O sistema pode ser indeterminado, mas nesse caso qualquer solução do sistema linear acima servirá.

## Exemplo

---

Determine a forma de Jordan de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

## Resolução

---

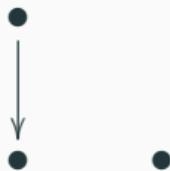
O polinômio característico de  $A$  é  $(x - 2)^3$  e assim seu único autovalor é 2. Logo

$$A - 2 \cdot I = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim  $\dim \ker (A - 2 \cdot I) = 2$ . Como  $(A - 2 \cdot I)^2 = 0$ .

Temos que  $\dim \ker (A - 2 \cdot I)^2 = 3$ .

Logo o diagrama associado a essa matriz é:



E assim sua forma de Jordan é

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Para calcularmos a matriz mudança de base resolvemos o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

E assim

$$-a - \frac{d}{2} = 0 \quad -a - b - \frac{e}{2} = 0 \quad -c - \frac{f}{2} = 0 \quad 2a + d = 0 \quad 2b - d + e = 0$$

$$2c + f = 0 \quad 3a + \frac{3d}{2} = 0 \quad 3b + \frac{3e}{2} - g = 0 \quad 3c + \frac{3f}{2} = 0$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## Exemplo

Ache a forma de Jordan para

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -4 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

## Resolução

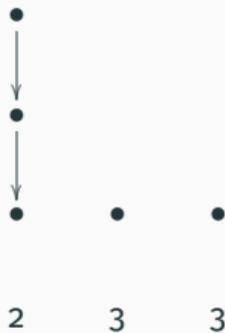
---

Nesse caso o polinômio característico é:  $(x - 3)^2(x - 2)^3$  e assim seus autovalores são: 3, 2.

Temos que  $\dim \ker (B - 3I) = 2$  e  $\dim \ker (B - 3I)^2 = 2$  e que

$\dim \ker (B - 2I) = 1$ ,  $\dim \ker (B - 2I)^2 = 2$  e  $\dim \ker (B - 2I)^3 = 3$

Logo o diagrama de Jordan é



E assim a forma de Jordan é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

## Exemplo

---

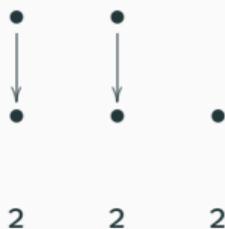
$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nesse caso  $(x - 2)^5$ , logo 2 é autovalor. Também temos que:

$$\square \dim \ker (C - 2I) = 3$$

$$\square \dim \ker (C - 2I)^2 = 5$$

e logo o diagrama para  $C$  é



e conseqüentemente a forma de Jordan de  $C$  é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## Exemplo

---

Suponha  $A \in \mathcal{M}_{6,6}(\mathbb{R})$  com polinômio minimal

$$(x - 1)^2(x + 1)^2$$

Encontre todas as formas normais de Jordan possíveis e não semelhantes para  $A$ .

Nenhum dos blocos de Jordan pode ter tamanho maior que 3 porque corresponderia a um fator  $(x \pm 1)^3$  ou mais no polinômio minimal. No entanto, para chegar ao polinômio minimal com os fatores  $(x \pm 1)^2$ , deve haver pelo menos um bloco Jordan de tamanho 2.

Assim necessariamente temos os blocos  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Temos assim a liberdade em um espaço bidimensional que podem ser um desses blocos bidimensionais ou blocos unidimensionais correspondentes a autovalores:

□  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

□  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

□  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

□  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

□  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Portanto, as soluções a menos de permutações dos blocos são

$$\left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c|c|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

## **Comentários Finais.**