Álgebra Linear Avançada

Cálculo da Forma de Jordan

Daniel Miranda Machado

27 de novembro de 2020

UFABC

Forma de Jordan

Seja $T : V \to V$ um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita tal que o polinômio característico se fatora em termos lineares sobre $\mathbb{K}$. Então:

1. Existe uma base de Jordan para T, i.e, existe uma matriz mudança de base M tal que a matriz do operador na base original A pode ser reduzida a forma de Jordan
$$M^{-1}AM = J$$
2. Se denotarmos por n_i o número de blocos de Jordan $J_i(\lambda)$ de ordem i que aparecem em $[T]_{\underline{J}}$, então
$$n_i = 2\dim\ker(T-\lambda)^i - \dim\ker(T-\lambda)^{i-1} - \dim\ker(T-\lambda)^{i+1}.$$
3. A matriz J é única, a menos de permutação dos blocos de Jordan.

Dividiremos o processo de obtenção da forma de Jordan de um operador em duas etapas:

1. Primeiramente calcularemos os diagramas de Jordan para cada autovalor obtendo assim a matriz de Jordan desse operador;
2. Finalmente calcularemos a base na qual o operador é descrito por essa matriz.

Cálculo dos Diagramas de Jordan

Dado um autovalor λ de T, e o seu diagrama de Jordan. Observe que a linha inferior desse diagrama consiste numa base para $\ker(T - \lambda I)$ e assim o número de vetores na linha inferior é $\dim \ker(T - \lambda I)$. De modo análogo temos que as duas linhas inferiores formam uma base para $\ker(T - \lambda I)^2$ e assim sucessivamente.

Logo para determinarmos esse diagrama é suficiente calcularmos:

$$\dim\ker(T-\lambda I), \dim\ker(T-\lambda I)^2 - \dim\ker(T-\lambda I), \dim\ker(T-\lambda I)^3 - \dim\ker(T-\lambda I)^2, \ldots$$

Cada um desses números nos fornece quantos vetores aparecem em cada linha do diagrama.

Cálculo da Matriz Mudança de Base

Para calcularmos a matriz mudança de base é suficiente resolvermos a equação linear:

$$AM = MJ.$$

O sistema pode ser indeterminado, mas nesse caso qualquer solução do sistema linear acima servirá.

Exemplo

Determine a forma de Jordan de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução

O polinômio característico de A é $(x-2)^3$e assim seu único autovalor é 2. Logo

$$A - 2 \cdot I = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim $\dim\ker(A - 2 \cdot I) = 2$. Como $(A - 2 \cdot I)^2 = 0$.

Temos que $\dim\ker(A - 2 \cdot I)^2 = 3$.

Logo o diagrama associado a essa matriz é:

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d] & \\
\bullet & \bullet
\end{tikzcd}
$$

E assim sua forma de Jordan é

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Para calcularmos a matriz mudança de base resolvemos o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

E assim

$$-a - \frac{d}{2} = 0 \quad -a - b - \frac{e}{2} = 0 \quad -c - \frac{f}{2} = 0 \quad 2a + d = 0 \quad 2b - d + e = 0$$

$$2c + f = 0 \quad 3a + \frac{3d}{2} = 0 \quad 3b + \frac{3e}{2} - g = 0 \quad 3c + \frac{3f}{2} = 0$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Ache a forma de Jordan para

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -4 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução

Nesse caso o polinômio característico é: $(x-3)^2(x-2)^3$ e assim seus autovalores são: $3, 2$.

Temos que $\dim\ker(B-3I) = 2$ e $\dim\ker(B-3I)^2 = 2$ e que

$\dim\ker(B-2I) = 1$, $\dim\ker(B-2I)^2 = 2$ e $\dim\ker(B-2I)^3 = 3$

Logo o diagrama de Jordan é

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d] & & \\
\bullet \arrow[d] & & \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
2 & 3 & 3
\end{tikzcd}
$$

E assim a forma de Jordan é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nesse caso $(x-2)^5$, logo 2 é autovalor. Também temos que:

- □ $\dim\ker(C-2I) = 3$
- □ $\dim\ker(C-2I)^2 = 5$

e logo o diagrama para C é

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
2 & 2 & 2
\end{tikzcd}$$

e consequentemente a forma de Jordan de C é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Suponha $A \in \mathcal{M}_{6,6}(\mathbb{R})$ com polinômio minimal

$$(x-1)^2(x+1)^2$$

Encontre todas as formas normais de Jordan possíveis e não semelhantes para A.

Nenhum dos blocos de Jordan pode ter tamanho maior que 3 porque corresponderia a um fator $(x \pm 1)^{3 \text{ ou mais}}$ no polinômio mínimal. No entanto, para chegar ao polinômio mínimal com os fatores $(x \pm 1)^2$, deve haver pelo menos um bloco Jordan de tamanho 2.

Assim necessariamente temos os blocos $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Temos assim a liberdade em um espaço bidimensional que podem ser um desses blocos bidimensionais ou blocos unidimensionais correspondentes a autovalores:

- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Portanto, as soluções a menos de permutações dos blocos são

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|c|c|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$
\left[\begin{array}{cc|cc|c|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right]
\qquad
\left[\begin{array}{cc|c|cc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right]
$$

Comentários Finais.