Álgebra Linear Avançada

Forma de Jordan Real

Daniel Miranda Machado

28 de novembro de 2020

UFABC

Nem todos os operadores sobre um determinado corpo não algebricamente fechado possuem uma Forma Normal de Jordan, pois nem todos os polinômios se fatoram completamente em termos lineares. Por exemplo, sobre os reais, podemos ter fatores quadráticos irredutíveis.

Seja A a matriz do operador real T. Em geral, o polinômio característico $p_A(x)$ de A tem a forma

$$p_A(x) = (X - c_1)^{m_1} \cdots (X - c_k)^{m_k}((X - a_1)^2 + b_1^2)^{n^1} \cdots ((X - a_l)^2 + b_l^2)^{n_k}$$

que pode ser fatorado como

$$p_A(x)(X - c_1)^{m_1} \cdots (X - c_k)^{m_k}(X - \alpha_1)^{n_1}(X - \overline{\alpha}_1)^{n_1} \cdots (X - \alpha_l)^{n_l}(X - \overline{\alpha}_l)^{n_l}$$

sobre $\mathbb{C}$ com $\alpha_j = a_j + b_j i, \overline{\alpha_j} = a_j - b_j i$.

Para obtermos uma "forma de Jordan"para operadores reais precisaremos complexificar e descomplexificar os operadores.

Definição

Sejam $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ *e* $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ *um vetor qualquer. Definimos* $\overline{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ *como a matriz obtida ao se tomar o conjugado em cada uma das entradas de* A *e* $\overline{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}^n$ *como o vetor obtido ao se tomar o conjugado em cada uma das coordenadas de* $\mathbf{v}$.

É imediato que para quaisquer matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$:

1. $\overline{A + \lambda B} = \overline{A} + \overline{\lambda}\,\overline{B}$
2. $\overline{AB} = \overline{A}\overline{B}$
3. $\overline{A\mathbf{v}} = \overline{A}\overline{\mathbf{v}}$

Proposição

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear. Então:

- **a** *os polinômios característicos de T e $T^{\mathbb{C}}$ são iguais;*
- **b** *se λ é um autovalor de $T^{\mathbb{C}}$, então $\overline{\lambda}$ é também um autovalor de $T^{\mathbb{C}}$*
- **c** *as multiplicidades algébricas dos autovalores λ e $\overline{\lambda}$ são iguais;*
- **d** *se W' é um subespaço fechado por conjugação, então W' possui uma base formada por vetores reais. Um vetor $\mathbf{v}$ é dito* **real** *se $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$.*

Demonstração

a As matrizes de T e $T^{\mathbb{C}}$ numa base de V são iguais.

b Sejam λ um autovalor de $T^{\mathbb{C}}$ e $c_T(z)$ o polinômio característico de $T^{\mathbb{C}}$. Como $c_T(z)$ também é o polinômio característico de T, os coeficientes de $c_T(z)$ são reais.

Tomando o conjugado na equação $c_T(\lambda) = 0$, obtemos $c_T(\overline{\lambda}) = 0$, o que mostra que $\overline{\lambda}$ também é uma raiz do polinômio característico de $T^{\mathbb{C}}$.

c Se λ é raiz de multiplicidade d do polinômio característico, então

$$p'(\lambda) = \ldots = p^{(d-1)}(\lambda) = 0 \text{ e } p^{(d)}(\lambda) \neq 0$$

tomando o conjugado em cada uma dessas equações

$$p'(\overline{\lambda}) = \ldots = p^{(d-1)}(\overline{\lambda}) = 0 \text{ e } p^{(d)}(\overline{\lambda}) \neq 0,$$

mostrando que $\overline{\lambda}$ também tem multiplicidade d.

d Seja $\{\mathbf{w}_1, \ \ldots, \ \mathbf{w}_k\}$ uma base de W', com $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j, j = 1, \ldots, k$. Então considerando $\mathbf{w}_j + \overline{\mathbf{w}}_j$ e $i(\mathbf{w}_j - \overline{\mathbf{w}}_j)$, obtemos que $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{0}$ e $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j + i\mathbf{0}$ estão em W'.

Assim, o conjunto $S = \{\mathbf{u}_1, \ \mathbf{v}_1, \ \ldots, \ \mathbf{u}_k, \ \mathbf{v}_k\}$ é um conjunto de vetores reais que gera W'. Uma base formada de vetores reais é obtida ao se tomar um subconjunto de S com k elementos que seja linearmente independente em $V_{\mathbb{C}}$.

Lema

Sejam $T : V \to V$ um operador linear e $T^{\mathbb{C}}$ sua complexificação. Se o subespaço $W' \subset V_{\mathbb{C}}$ possui uma base formada por vetores reais, então ele é a complexificação de um subespaço $W \subset V$.

Demonstração

Todo vetor de $\mathbf{w} \in W'$ pode ser escrito como $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, sendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores reais. Escrevendo $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em termos dos vetores da base real, segue imediatamente que W' é a complexificação do espaço real W gerado pelos vetores dessa base.

Proposição

Seja V um espaço vetorial real e $T \in \mathrm{Hom}(V, V)$. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ os autovalores reais de T e $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_m, \overline{\lambda_m}$ os autovalores não-reais de T. Então

1. *V admite a decomposição*

$$V = W_1 \oplus \ldots W_k \oplus Z_1 \oplus \overline{Z_1} \oplus \ldots Z_l \oplus \overline{Z_l}$$

onde $W_j = \ker(T - \alpha_j \mathrm{I})^{q_j}$, $j = 1, \ldots, k$ e $Z_j = \ker(T - \lambda_j \mathrm{I})^{r_j}, j = 1, \ldots, m$.

2. *Se denotarmos $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ e $Z = Z_1 \oplus \overline{Z_1} \oplus \ldots Z_l \oplus \overline{Z}_l$, então se $\underline{B}_1, \ldots, \underline{B}_l$ são bases de $Z_1, \ldots, Z_l$, respectivamente, então $\underline{B}_Z = \underline{B}_1 \cup \overline{\underline{B}}_1 \cup \ldots \cup \underline{B}_l \cup \overline{\underline{B}}_l$ é uma base de Z, onde $\overline{\underline{B}}_j$ denota a base de Z_j formada pelos conjugados dos elementos de $\underline{B}_j$, para cada $j = 1, \ldots, l$.*

Proposição (cont.)

1. *Se* $\mathbf{z}_1, \overline{\mathbf{z}_1}, \ldots, \mathbf{z}_m, \overline{\mathbf{z}}_m$ *é uma base para* $Z_i \oplus \overline{Z_i}$ *construída no item anterior. E se* $\mathbf{z}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{z}_i i$*. Então* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *é uma base para* $Z_i \oplus \overline{Z_i}$ *constituída só de vetores reais.*

1 Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ os autovalores reais de T e $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_m, \overline{\lambda_m}$ os autovalores não-reais de T. Então o Teorema da Decomposição em Auto-espaços Generalizados nos fornece a decomposição:

$$V = W_{\alpha_1} \oplus \ldots W_{\alpha_k} \oplus Z_{\lambda_1} \oplus Z_{\overline{\lambda_1}} \oplus \ldots Z_{\lambda_l} \oplus Z_{\overline{\lambda_l}}$$

Como $\overline{(T^{\mathbb{C}} - \lambda\, \mathrm{I})^j \mathbf{z}} = (T^{\mathbb{C}} - \overline{\lambda}\, \mathrm{I})^j \overline{z}$

Temos que a conjugação é um isomorfismo entre $Z_j = \ker (T - \lambda_j \mathrm{I})^{r_j}$ e $\overline{Z}_j$ e a decomposição pedida segue.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Se $\underline{\mathrm{B}}_i$ é uma base para Z_i. Então $\overline{\underline{\mathrm{B}}_i}$ é uma base para $\overline{Z}_i$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ É consequência da demonstração do item $\boxed{\mathbf{3}}$ da Proposição .

Teorema (Forma de Jordan Real)

Se V é um espaço vetorial real e $T : V \to V$ é um operador linear, existe uma base $\underline{B}$ de V em relação à qual a matriz de T tem, ao longo da diagonal, blocos de Jordan (correspondentes aos autovalores reais), blocos de Jordan aumentados (correspondentes aos autovalores complexos) e os demais elementos todos nulos.

A soma das ordens dos blocos de Jordan correspondentes a um mesmo autovalor λ é igual à multiplicidade algébrica de λ, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e é igual ao dobro da multiplicidade algébrica de λ se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Teorema (cont.)

Os blocos de Jordan aumentados são da forma

$$J_{a,b} = \begin{bmatrix} C_{a,b} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I_2 & C_{a,b} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & I_2 & \ddots & & \\ 0 & & \cdots & C_{a,b} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & C_{a,b}, \end{bmatrix}$$

onde $C_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, *sendo* $a + ib$ *um autovalor complexo de* $T^{\mathbb{C}}$ *e* I_2 *a matriz identidade* 2×2.

Demonstração

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ os autovalores reais de T e $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_m, \overline{\lambda_m}$ os autovalores não-reais de T. Então V admite a decomposição

$$V = W_1 \oplus \ldots W_k \oplus Z_1 \oplus \overline{Z_1} \oplus \ldots Z_l \oplus \overline{Z_l}$$

onde $W_j = \ker\left(T - \alpha_j \, \mathrm{I}\right)^{q_j},\ j = 1, \ldots,\ k$ e $Z_j = \ker\left(T - \lambda_j \, \mathrm{I}\right)^{r_j}, j = 1, \ldots, m$.

Para $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ temos que $T - \alpha_j$ I restrito a W_j é um operador nilpotente e a sua base de Jordan pode ser construída como na demonstração do Teorema de Jordan.

Suponhamos agora que $T^{\mathbb{C}}$ possua um autovalor $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

Considere os espaços Z_λ e $Z_{\overline{\lambda}}$. Então $\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{u}_k,\ \mathbf{v}_k\}$ é uma base de $V_\lambda \oplus V_{\overline{\lambda}}$ formada por vetores reais.

Finalmente, se $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$, para $j \in \{1, 2, \ \dots, \ r\}$, satisfaz $T^{\mathbb{C}}\mathbf{w}_j = \lambda\mathbf{w}_j + \mathbf{w}_{j+1}$, para $\lambda = a + ib \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, então

$$T\mathbf{u}_j + iT\mathbf{v}_j = (a\mathbf{u}_j - b\mathbf{v}_j + \mathbf{u}_{j+1}) + i(b\mathbf{u}_j + a\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j+1})$$

e logo

$$\begin{aligned} T\mathbf{u}_j &= a\mathbf{u}_j - b\mathbf{v}_j + \mathbf{u}_{j+1} \\ T\mathbf{v}_j &= b\mathbf{u}_j + a\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j+1} \end{aligned}$$

de onde segue que, na base $\{\mathbf{u}_1, \ \mathbf{v}_1, \ \mathbf{u}_2, \ \mathbf{v}_2, \ \dots, \ \mathbf{u}_k, \ \mathbf{v}_k\}$ de $V_\lambda \oplus V_{\overline{\lambda}}$, o operador linear $T^{\mathbb{C}}$ é representado por bloco(s) da forma descrita no enunciado do teorema.

Como as matrizes de $T^{\mathbb{C}}$ e de T são iguais nessa base, a demonstração está completa.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 10 & -5 \\ -1 & -4 & 10 & -5 \\ -1 & -3 & 8 & -4 \\ -2 & -2 & 9 & -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$

O polinômio característico de A é $p_A = (1 + x^2)^2 = (x - i)^2(x + 1)^2$ e é igual ao minimal de A. Os autovalores sobre os complexos são $i, -i$. Consequentemente temos dois blocos de Jordan, um associado a cada autovalor. Logo a Forma Normal de Jordan obtida complexificando é.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & i & \\ 0 & 0 & 1 & i \end{array}\right]$$

e pelo Teorema 6 temos que a Forma Normal de Jordan sobre $\mathbb{R}$ é:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Comentários Finais.