Álgebra Linear Avançada

Forma Cânonica Racional I

Daniel Miranda Machado

30 de novembro de 2020

UFABC

Teorema da Decomposição Cíclica

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \to V$ um operador linear. Então existem vetores T-cíclicos $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ tais que

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} Z_{\mathbf{v}_j},$$

Em particular, existe uma base de V na qual a matriz de T é da forma

$$\bigoplus_{i=1}^{k} C_i = \begin{bmatrix} C_{p_1} & & & \\ & C_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{p_k} \end{bmatrix}$$

e que $c_T = p_1 \cdots p_k$.

Pelo Teorema da Decomposição Cíclica temos que sempre existe uma decomposição de soma direta em subespaços cíclicos. No entanto, é possível que os subespaços cíclicos ainda possam ser decompostos como soma direta de subespaços cíclicos menores.

Portanto, apenas conhecer para ambas as matrizes alguma decomposição em subespaços cíclicos, e conhecer os polinômios mínimos correspondentes, não é suficiente para decidir sua similaridade.

Uma condição adicional deve ser imposta para garantir que para matrizes semelhantes se obtenham decomposições em subespaços cíclicos que correspondam exatamente: na lista de polinômios mínimos associados, cada um deve dividir o próximo.

A lista de polinômios resultante é chamada de fatores invariantes da matriz, e duas matrizes são semelhantes se e somente se tiverem listas idênticas de fatores invariantes.

Proposição

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \to V$ um operador linear com polinômio mínimal $m_T = p^t$ onde p é um polinômio irredutível sobre $\mathbb{K}$. Então existem vetores T-cíclicos $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ e números inteiros positivos $n_1, \ldots, n_k$ com cada $n_j \leq t$ de modo que

1. $V = \bigoplus_{j=1}^{k} Z_{\mathbf{v}_j}$;
2. T-aniquilador de $\mathbf{v}_j$ é p^{n_j}.
3. $\dim V = (n_1 + \cdots + n_k) \deg p$.
4. p^{n_j} divide $p^{n_{j+1}}$.
5. Além disso, os polinômios mônicos $p^{n_1}, \cdots, p^{n_k}$ **são únicos** e determinados por T.

Demonstração

As três primeiras afirmações seguem diretamente da Decomposição Cíclica.

A quarta afirmação é direta pois sem perda de generalidade, podemos assumir que os vetores T-cíclicos $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ estejam ordenados de modo que os números inteiros correspondentes n_i satisfaçam

$$t = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1.$$

Afirmação: Os números inteiros $n_1, \ldots, n_k$ são determinados de maneira única por T. Essa é o ponto central que precisa ser demonstrado e faremos isso associando esses números inteiros as dimensões dos espaços $\dim \operatorname{im} p(T)^j$.

Temos, para cada i,

$$\dim Z_{\mathbf{v}_i} = \deg m_{\mathbf{v}_i} = \deg p^{n_i} = dn_i.$$

Proposição

- *Para cada j a imagem de $Z_{\mathbf{v}_i}$ por $p(T)^j$ é o subespaço T-cíclico $Z_{p(T)^j(\mathbf{v}_i)}$.*
- *Como o T-aniquilador de $\mathbf{v}_i$ é p^{n_i}, de grau dn_i, temos que*

$$\dim Z_{p(T)^j(\mathbf{v}_i)} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \geq n_i; \\ d(n_i - j) & \text{se } j < n_i. \end{cases}$$

A demonstração será deixada como exercício.

$\dim \operatorname{im} p(T)^j$

Todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ podem ser escritos de maneira única na forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k \; (\mathbf{v}_i \in Z_{\mathbf{v}_j})$$

e assim todos os elementos de $\operatorname{im} p(T)^j$ podem ser escritos de maneira única como

$$p(T)^j(\mathbf{v}) = p(T)^j(\mathbf{v}_1) + \cdots + p(T)^j(\mathbf{v}_k) \; .$$

Portanto, se r é o número inteiro tal que $n_1, \ldots, n_r > j$ e $n_{r+1} \leq j$, então vemos que

$$\operatorname{im} p(T)^j = \bigoplus_{i=1}^{r} Z_{p(T)^j(\mathbf{v}_i)}$$

Consequentemente

$$\dim\, \mathrm{im}\, p(T)^j = d\sum_{i=1}^{r}(n_i - j) = d\sum_{n_i>j}(n_i - j)\ .$$

E logo

$$\begin{aligned}
\dim\, \mathrm{im}\, p(T)^{j-1} - \dim\, \mathrm{im}\, p(T)^j &= d\left(\sum_{n_i>j-1}(n_i - j + 1) - \sum_{n_i>j}(n_i - j)\right) &(1)\\
&= d\left(\sum_{n_j\geq j}(n_j - j + 1) - \sum_{n_j\geq j}(n_i - j)\right) &(2)\\
&= d\sum_{n_i\geq j}(n_i - j + 1 - n_i + j) &(3)\\
&= d\sum_{n_i\geq j} 1 &(4)
\end{aligned}$$

Agora, as dimensões à esquerda são determinadas por T, de modo que a expressão acima fornece, para cada j, o número de n_i que é maior ou igual a j. Isso determina a sequência

$$t = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$$

completamente. ∎

Definição

Quando o polinômio mínimal de T é da forma p^t, em que p é irredutível, em relação à cadeia de números inteiros determinada unicamente $t = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$, conforme descrito acima, os polinômios $p^t = p^{n_1}, p^{n_2}, \ldots, p^{n_k}$ são denominados ***divisores elementares*** *de T.*

Destacamos que o primeiro divisor elementar na sequência é o polinômio mínimal de T.

Forma Canônica Racional por Divisores Elementares

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T : V \to V$ um operador linear cujos polinômios característico e minimal são

$$c_T = p_1^{d_i} p_2^{d_2} \cdots p_k^{d_k}, \qquad m_T = p_1^{e_j} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$$

onde $p_1, \ldots, p_k$ são polinômios irredutíveis distintos.

Pelo Teorema da Decomposição Primária que existe uma base ordenada de V com relação à qual a matriz de T é uma matriz diagonal por bloco

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$$

cont.

em que cada A_i é a matriz (de tamanho $d_i \deg p_j \times d_j \deg p_j$) que representa a aplicação induzido T_i em $V_i = \ker p_j(T)^{e_j}$. Agora, o polinômio mínimal de T_i é $p_i^{e_i}$ e, portanto, pela proposição anterior e pelo Teorema da Decomposição Cíclica, existe uma base para V_j com relação ao qual A_j é a matriz diagonal por bloco

$$\begin{bmatrix} C_{i1} & & & \\ & C_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{it} \end{bmatrix}$$

em que C_{ij} são as matrizes associadas aos divisores elementares de T_i.

Pela discussão anterior, esse formato diagonal por bloco, no qual cada bloco A_j é ele próprio uma diagonal por bloco de matrizes companheiras, é único (a menos de permutações de A_j). É denominada **matriz canônica racional por divisores elementares** de T.

É importante notar que na sequência de divisores elementares pode haver repetições, pois alguns dos n_i podem ser iguais. O resultado disso é que algumas matrizes companheiras podem aparecer mais de uma vez na forma racional.

Exemplo

Seja

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 12 \\ -2 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{Q}).$$

Nesse caso $p_T = -(x-3)(x-1)^2$ e $m_T = (3-x)(-1+x)$. Como a matriz companheira de qualquer polinômio linear $X - a$ é uma matriz 1×1. Concluímos que a forma canônica racional de A deve ser a matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(1, 1, 3)$

Exemplo

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -12 & 7 \\ 5 & -5 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{Q})$$

Então $p_T(x) = m_T(x) = (x^2 - 2)(x^2 + 1)$ e logo a forma racional é

$$C_{x^2-2} \oplus C_{x^2+1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Suponha agora que $T\colon \mathbb{Q}^6 \to \mathbb{Q}^6$ possua um polinômio mínimal

$$m_T = (X^2 + 1)(X - 2)^2$$

Consequentemente o polinômio característico de T é um dos

$$c_1 = (X^2 + 1)^2(X - 2)^2, \quad c_2 = (X^2 + 1)(X - 2)^4$$

$c_T = C_1$

Suponha primeiro que $c_T = C_1$. Nesse caso, temos $\mathbb{Q}^6 = V_1 \oplus V_2$ com $\dim V_1 = 4$ e $\dim V_2 = 2$. A aplicação linear induzida T_1 em V_1 possui o polinômio mínimal $m_1 = x^2 + 1$ e a aplicação induzida T_2 em V_2 possui polinômio mínimal $m_2 = (X - 2)^2$.

A situação para V_1 é que $C_{X^2+1} \oplus C_{X^2+1}$.

Quanto a V_2, logo pelo Teorema da Forma Canônica Racional temos que $2 = n_1 + \cdots + n_k$ de onde necessariamente $k = 1$ pois $n_1 = \deg p_2 = 2$. Portanto, o único divisor elementar de T_2 é $(X - 2)^2$.

Combinando essas observações, vemos que, neste caso, a matriz canônica racional de T é

$$C_{X^2+1} \oplus C_{X^2+1} \oplus C_{(X-2)^2}.$$

$c_T = C_2$

Suponha agora que $c_T = C_2$. Nesse caso, temos $\mathbb{Q}^6 = V_1 \oplus V_2$ com $\dim V_1 = 2$ e $\dim V_2 = 4$. Além disso, a aplicação induzido T_2 em V_2 possui o polinômio mínimal $m_2 = (X-2)^2$.

Pelo Teorema da Forma Canônica Racional, aplicado a T_2, temos $4 = n_1 + \cdots + n_k$ com $n_1 = 2$. Existem, portanto, duas possibilidades, a saber

- $k = 2$ com $n_1 = n_2 = 2$;
- $k = 3$ com $n_1 = 2, n_2 = n_3 = 1$.

A matriz canônica racional de T neste caso é, portanto, uma das formas

$$C_{X^2+1} \oplus C_{(X-2)^2} \oplus C_{(X-2)^2};$$

$$C_{X^2+1} \oplus C_{(X-2)^2} \oplus C_{X-2} \oplus C_{X-2}.$$

Observe no exemplo acima que o conhecimento dos polinômios característico e minimal geralmente não é suficiente para determinar completamente a forma racional.

Comentários Finais.