Integrais - Aplicações I

Daniel

26 de novembro de 2016

Sumário

Aplicações da Integral

Nesta aula vamos mostrar como somas de Riemann e integrais definidas surgem em problemas tais como encontrar o volume e a área de superfície de um sólido, encontrar o comprimento de uma curva plana, calcular o trabalho realizado por uma força, encontrar o centro de a gravidade de uma região plana, encontrar a pressão e a força, etc.

Construção de Fórmulas Integrais

Dado uma função f uma função contínua em $[a,b]$ e uma partição em n subintervalos igualmente espaçados

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Deixe $\Delta x = (b-a)/n$ denotar o comprimento do subintervalo, e deixe x_i^* ser um valor no i-ésimo subintervalo. A soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

é denominada Soma de Riemann.

As somas de Riemann podem ser usadas para aproximar algumas quantidades (área, volume de trabalho, pressão, etc.). A aproximação torna-se exata tomando o limite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Aplicação da Estratégia de Integrais Definidas

Este capítulo emprega a seguinte técnica para uma variedade de aplicações.

- Suponha que o valor Q de uma quantidade deve ser calculada.
- Primeiramente aproximaremos o valor de Q utilizando uma soma de Riemann.
- Em seguida, encontraremos o valor exato através de uma integral definida.

Estratégia de Integrais Definidas

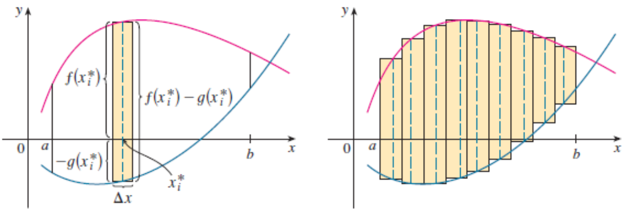
Deixe uma quantidade Q cujo valor deve ser computado.

- Divida a quantidade em n ”subquantidades” menores de valores Q_i.
- Identifique a variável x e a função $f(x)$ de tal forma que cada subquantidade pode ser aproximada com o produto $f(x_i^*)\Delta x$, onde Δx representa uma pequena mudança em x. Assim $Q_i \approx f(x_i^*)\Delta x$.
- Reconheça que $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$, que é uma soma de Riemann.
- Tomando os limites apropriados temos $Q = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Áreas entre duas Curvas

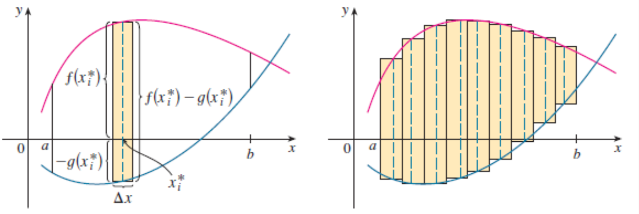
Área entre duas curvas.

Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$ e $g(x) \leqslant f(x)$ para cada $x \in [a, b]$ então $0 \leqslant f(x) - g(x)$ é integrável em $[a, b]$.



Área entre duas curvas.

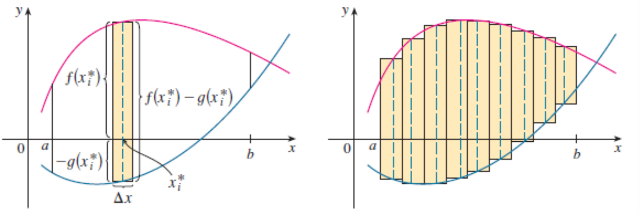
Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$ e $g(x) \leqslant f(x)$ para cada $x \in [a, b]$ então $0 \leqslant f(x) - g(x)$ é integrável em $[a, b]$.



$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} (f(x_i^*) - g(x_i^*)) \Delta x_i \tag{1}$$

Área entre duas curvas.

Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$ e $g(x) \leqslant f(x)$ para cada $x \in [a, b]$ então $0 \leqslant f(x) - g(x)$ é integrável em $[a, b]$.

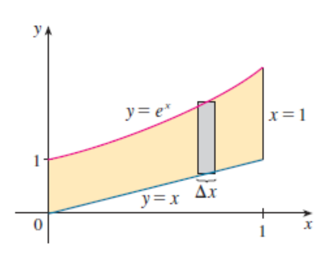


$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} (f(x_i^*) - g(x_i^*)) \, \Delta x_i \tag{1}$$

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \tag{2}$$

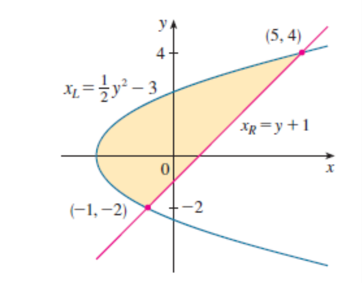
Exemplo 1

Ache a área do gráfico delimitado por $y = e^x$, $y = x$, $x = 0$ e $x = 1$

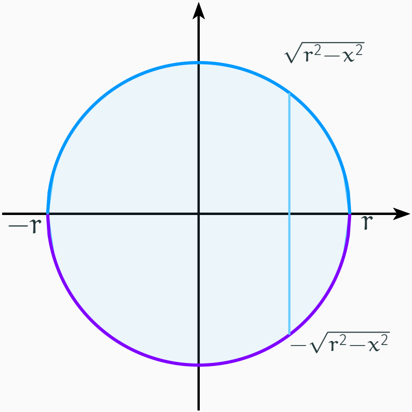


Exemplo 2

Ache a área delimitada pelas curvas $y = x - 1$ e a parábola $y^2 = 2x + 6$



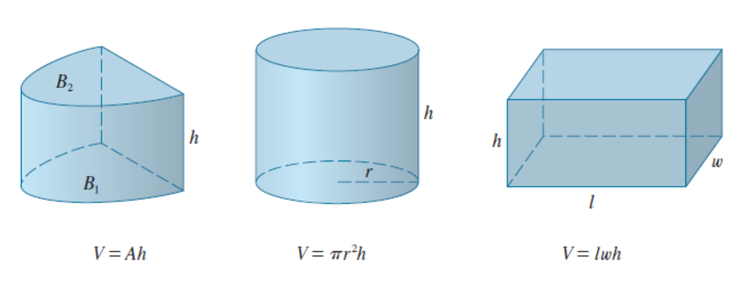
Mostre que a área do círculo de raio r é πr^2.



Volume por Seções Transversais

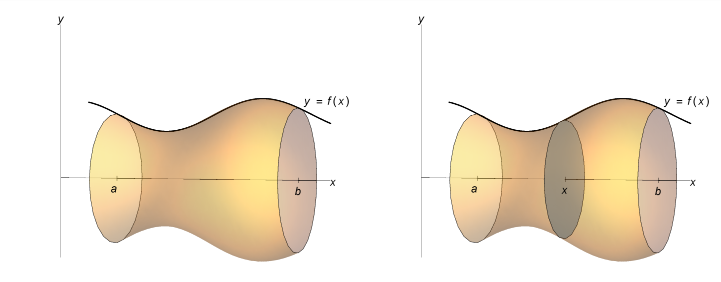
Volume por Seções Transversais

Volume de Cilindros Retos: Área da Base x Altura



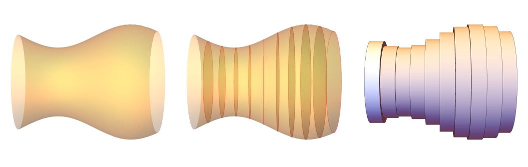
Seção Transversal

Seja S um sólido qualquer. Quando interceptamos o sólido S com um plano, obtemos uma região plana que é denominada de **secção transversal** de S.



Denotaremos por $A(x)$ a área de secção transversal perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, com $x \in [a, b]$

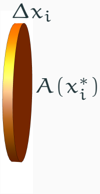
Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$. Vamos dividir o sólido S em n fatias utilizando os planos $P_{x_1}, \cdots, P_{x_{n-1}}$. Escolhemos pontos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$



Animação

Ver `slices.gif`

Então temos que o volume da i-ésima fatia S_i é aproximadamente o volume do cilindro um cilindro com área de base $A(x_i^*)$ e altura Δx_i.



O volume deste cilindro é $A(x_i^*)\Delta x_i$; assim, uma aproximação para o volume da i-ésima fatia S_i é

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x_i.$$

Somando os volumes destas fatias obtemos uma aproximação para o volume total

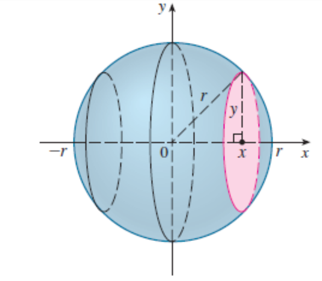
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i.$$

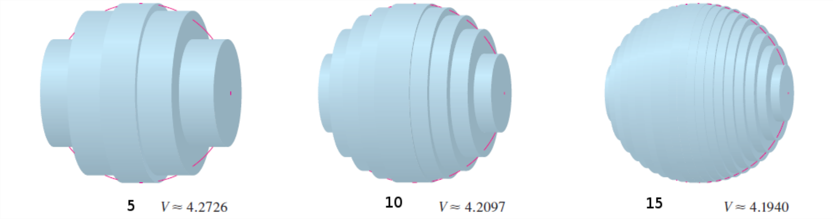
Tomando o Limite

$$V = \int_a^b A(x)dx \tag{3}$$

Exemplo - Volume da Esfera

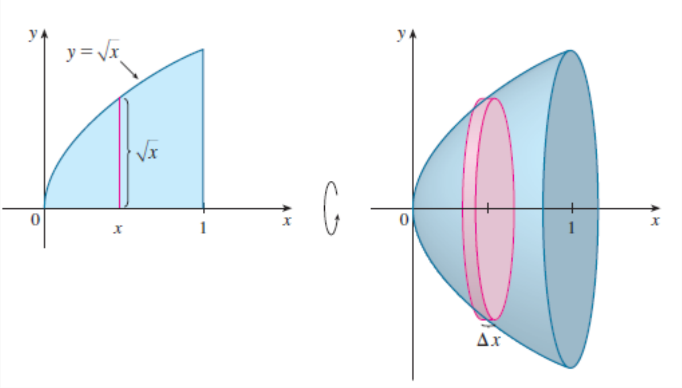
Mostre que o volume da esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.




5 $V \approx 4.2726$
10 $V \approx 4.2097$
15 $V \approx 4.1940$

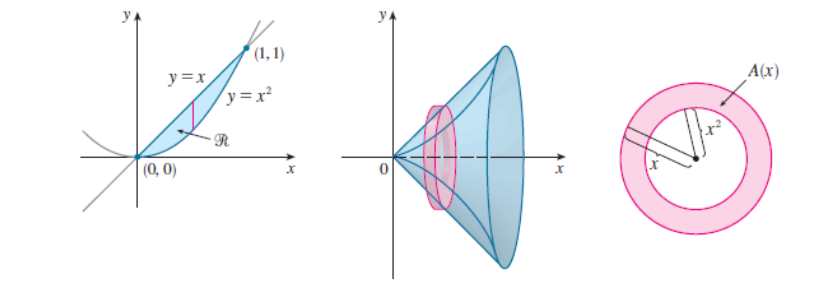
Exemplo 2

Calcule o volume da região obtida rotacionando a área delimitada pela curva $y = \sqrt{x}$ com $0 \leq x \leqslant 1$.



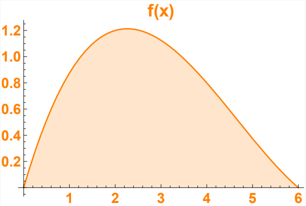
Exemplo 3

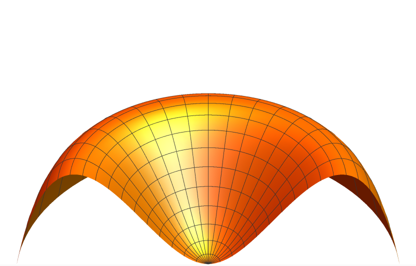
A região delimitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^2$ é rotacionada em torno do eixo x. Determine seu volume.

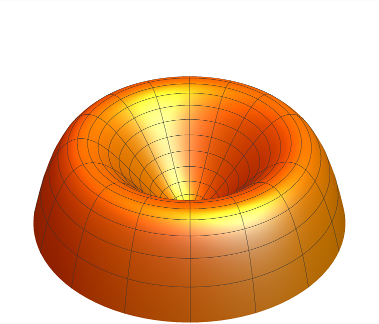


Cascas Cilíndricas

Qual o volume do sólido obtido rotacionando a região em torno do eixo y?







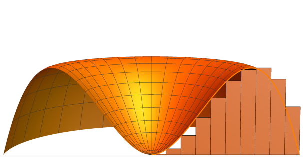
Animação

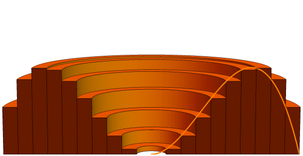
Ver `rotacao.gif`

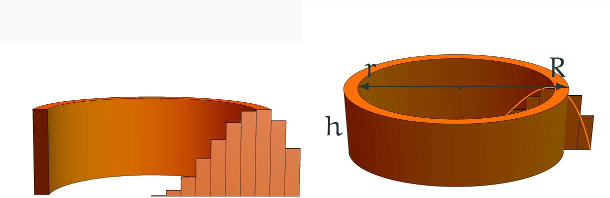
Seja $P = (x_i)$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e seja $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ o ponto médio do i-ésimo intervalo,

$$x_i^* = (x_i + x_{i-1})/2.$$

Se fizermos a aproximação por retângulos e rotacionarmos:





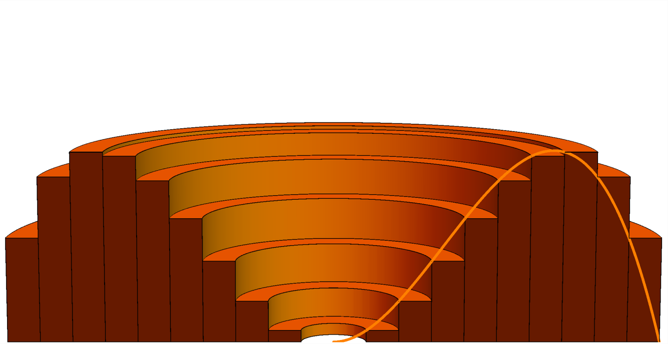


Se o retângulo é girado ao redor do eixo y, então o resultado é uma casca cilíndrica cujo volume é

$$\begin{aligned} V &= \pi(R^2 - r^2)h \\ &= 2\pi\frac{(R+r)}{2}(R-r)h \\ &= 2\pi r^* \Delta r h \end{aligned}$$

Ou seja

$$V_i = (2\pi x_i^*)f(x_i^*)\Delta x_i = [\text{circunferência}][\text{altura}][\text{espessura}].$$

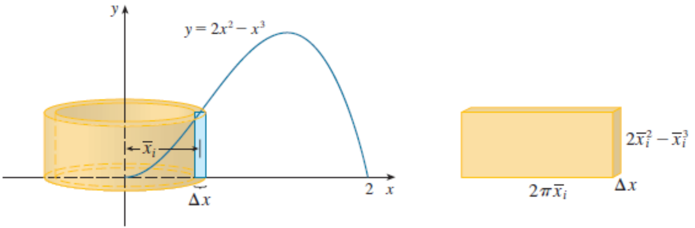


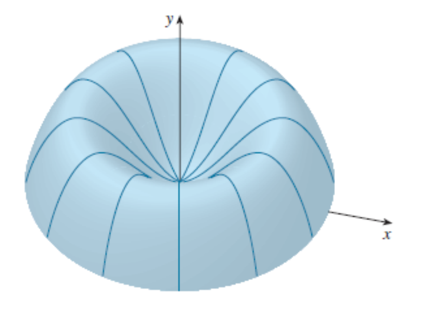
$$V = \sum_{i=1} 2\pi x_i^* \Delta x_i f(x_i^*)$$

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx.$$

Exemplo 4

Calcule o volume do sólido obtido rotacionando em torno do eixo y a região delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ e pelo eixo x.

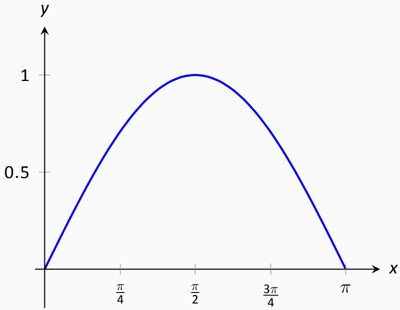


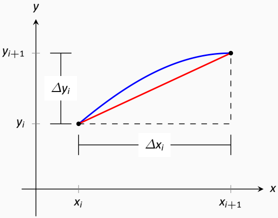

y
x

Comprimento de Arco

Se a curva C é dada pela equação $y = f(x)$, com f derivável e $a \leqslant x \leqslant b$.

Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$. Então a poligonal com vértices $(x_i, f(x_i))$ é uma aproximação para C.





O comprimento da poligonal é

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Aplicando o TVM em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, existe um $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f'(x_i^*)\Delta x_i.$$

Logo

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(x_i^*)\Delta x_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(1 + (f'(x_i^*))^2}\Delta x_i.$$

Então, definimos o **comprimento da curva** C por

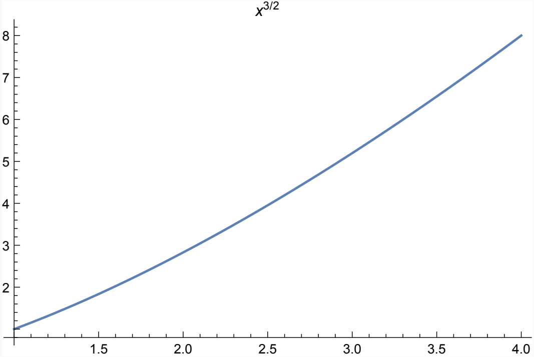
$$L = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(1 + (f'(x_i^*))^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

$$\boxed{\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

Exemplo 5

Exemplo

Calcule o comprimento de arco de $y = x^{3/2}$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.



Como $y = f(x)$, temos $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$, e assim,

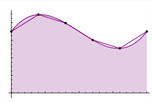
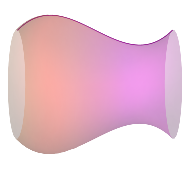
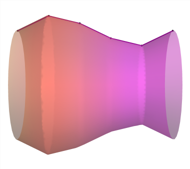
$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx.$$

Fazendo, $u = 1 + \frac{9}{4}x$, então $du = \frac{9}{4}dx$. Quando $x = 1$, $u = \frac{13}{4}$; quando $x = 4$, $u = 10$. Portanto,

$$L = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\,du = \frac{4}{9}\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{13/4}^{10} = \frac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right].$$

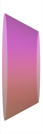
Área Superficial

Nós já vimos como uma curva de $y = f(x)$ em $[a, b]$ pode ser girada em torno de um eixo para formar um sólido. Em vez de calcular o seu volume, consideraremos agora a sua área superficial.


Se denotarmos por L o comprimento da curva

$$L \approx \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2}\Delta_i$$



para algum x_i^* no i-ésimo subintervalo. Então

$$R = f(x_{i+1}) \quad \text{e} \quad r = f(x_i).$$

Assim, a área da superfície de um dos tronco do cone é de aproximadamente

$$2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2}\Delta_i.$$

Como f é uma função contínua , pelo TVI temos que existe d_i em $[x_i, x_{i+1}]$ tal que $f(d_i) = \dfrac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$; Logo:

$$2\pi f(d_i)\sqrt{1 + f'(x_i^*)^2}\Delta_i$$

Somando sobre todos os subintervalos temos

$$\text{Área Superficial} \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(d_i)\sqrt{1 + f'(x_i^*)^2}\Delta_i,$$

que é uma soma de Riemann. Tomando o limite temos

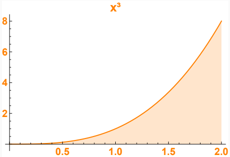
$$\boxed{\text{Área Superficial} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx}.$$

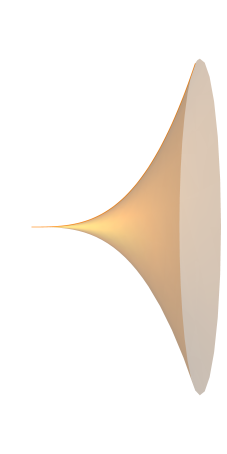
A área da superfície do sólido formado pela rotação do gráfico de $y = f(x)$ ao redor do eixo y, com $a, b \geqslant 0$, é

$$\boxed{\text{Área Superficial} = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}dx}.$$

Exemplo

Determine a área de superfície do sólido formado pela revolução da curva $y = x^3$ em $[0,2]$ em torno do eixo x.





$$A = \int_0^2 2\pi x^3 (1+9x^4)^{1/2} dx \tag{4}$$

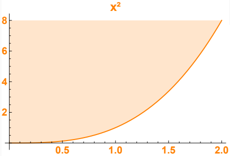
Substituição $u = 1 - 9x^4$ $du = 27x^3$

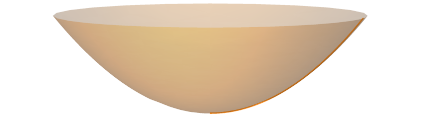
$$= 2\pi \int_*^* \frac{u^{1/2}}{27} du \tag{5}$$

$$= \frac{\pi}{27} (1+9x^4)^{3/2} \Big|_0^2 \approx 203.04 \tag{6}$$

Exemplo

Determine a área de superfície do sólido formado pela revolução da curva $y = x^2$ em $[0,1]$ em torno do eixo y.





Uma vez que estamos girando em torno do eixo y, o “ raio ” do sólido não é $f(x)$, mas sim x. Assim, a integral para calcular a área de superfície é:

$$A = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\,dx.$$

Substituição $u = 1+4x^2$; novos extremos $u = 1$ to $u = 5$.

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{4}\int_1^5 \sqrt{u}\,du \\ &= \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}u^{3/2}\bigg|_1^5 \\ &= \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) \\ &\approx 5.33. \end{aligned}$$

Trabalho

Trabalho

No caso de uma força constante F, o trabalho realizado é definido pelo produto da força pela distância d que o objeto se move:

$$\tau = Fd, \qquad \text{trabalho} = \text{força} \times \text{distância}.$$

Consideremos o deslocamento da partícula de $x = a$ até $x = b$ com $a < b$ e suponhamos que $F(x)$ seja contínua no intervalo $[a, b]$. Seja $P = (x_i)$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e escolhemos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Se $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ for suficientemente pequeno, F será praticamente constante no intervalo, e então podemos dizer que trabalho realizado pela força de x_{i-1} até x_i será aproximadamente

$$\tau_i = F(x_i^*)\Delta x_i.$$

Logo podemos aproximar o trabalho realizado por F de a até b pela soma dos trabalhos realizados nos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é

$$\tau \approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x_i.$$

A intuição acima nos motiva a definirmos *trabalho* como:

Definição

O **trabalho** τ realizado por uma força F sobre uma partícula no deslocamento de $x = a$ até $x = b$ é dado por

$$\tau = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Exemplo 8

Exemplo

Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo x atua uma força paralela ao deslocamento e de componente $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Calcule o trabalho realizado pela força no deslocamento de $x = 1$ até $x = 2$.

Exemplo 8

Exemplo

Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo x atua uma força paralela ao deslocamento e de componente $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Calcule o trabalho realizado pela força no deslocamento de $x = 1$ até $x = 2$.

$$\tau = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Exemplo

Considere uma mola sobre uma superfície horizontal com uma das extremidades fixa num anteparo . Suponha que a origem $x = 0$ coincide com a extremidade livre quando a mola não está comprimida nem distendida. Agora, suponha que a mola seja distendida e que uma partícula seja presa à sua extremidade livre. Considere que a força exercida sobre a mola obedece a Lei de Hooke: $F(x) = -kx$, onde k é a constante elástica da mola. Calcule o trabalho realizado pela mola quando a partícula se desloca das posições $x = 0{,}5$ até $x = 0$ e $x = 0{,}5$ até $x = -0{,}5$.

$$\tau = \int_{1/2}^{0} -kx\,dx = -k\frac{x^2}{2}\Big|_{1/2}^{0} = \frac{k}{8}.$$

$$\tau = \int_{1/2}^{-1/2} -kx\,dx = -k\frac{x^2}{2}\Big|_{1/2}^{-1/2} = 0.$$