Funções de uma Variável

Notas de Aula

Armando Caputi
Cristian Coletti &
Daniel Miranda

Versão 0.02
22 de junho de 2021

The calculus was the first achievement of modern mathematics

— John von Neumann

26 de junho de 2021

Sumário

Danie Miranda
dmiranda@gmail.com
UFABC

Cristian Coletti
cristian.coletti@
UFABC

Armando Caputi
armando.caputti@
UFABC

Prefácio

Essas notas correspondem aos apontamentos para o curso de Funções de uma Variável ministradas remotamente durante a pandemia de 2021. Essas notas ainda estão incompletas e podem apresentar erros ou seções incompletas. Ficaríamos muito gratos se nos fossem enviadas sugestões de melhorias ou que nos fossem apontados erros porventura encontrados.

Parte I

Limites e Continuidade

Capítulo 1

Limites e Continuidade de Funções

> *It has long been an axiom of mine that the little things are infinitely more important*
>
> — Sherlock Holmes, in A Case of Identity, Arthur Conan Doyle

Neste capítulo começaremos o estudo da teoria matemática subjacente ao Cálculo, explorando o conceito de limite. O conceito de limite é uma das noções fundamentais do Cálculo moderno. Por exemplo, a propriedade de continuidade é definida em termos de limites. De modo semelhante, a derivada é definida como um limite do quociente de diferenças. Neste capítulo, vamos desenvolver o conceito de um limite, começando a partir de uma noção intuitiva informal e chegando a uma definição matemática precisa. Nós também apresentaremos as propriedades de limite e desenvolveremos procedimentos para o cálculo efetivo de limites. Concluiremos o capítulo usando os limites para o estudo curvas contínuas.

1.1 Motivação

1.1.1 O Problema da Reta Tangente

No problema da reta tangente, é dado uma função f e um ponto P no gráfico de f e queremos determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P, como mostra a Figura 3.2. Exceto nos pontos nos quais a reta tangente é vertical, o problema de encontrar reta tangente no ponto P se resume ao problema de determinar a inclinação da reta

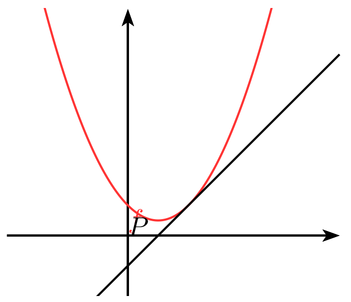
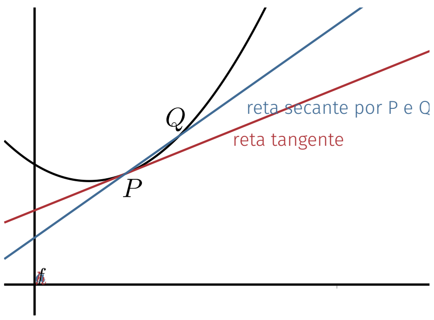


Figura 1.1 Reta tangente a f em P.

tangente à f no ponto P, i.e., o coeficiente angular da reta tangente.

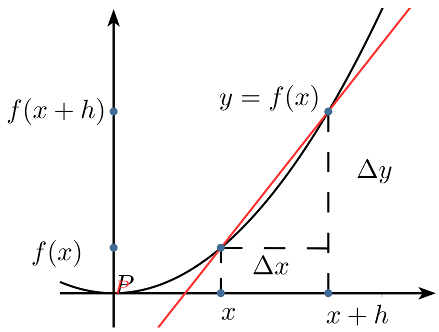
Um modo de atacar esse problema é aproximar o coeficiente angular da reta tangente utilizando retas que passam pelo ponto P e por um segundo ponto, que denotaremos por Q. Ou seja, aproximando o coeficiente da reta tangente a P pelo coeficiente da reta secante por P e Q.



Se considerarmos que o ponto P tenha coordenadas $P : (x, f(x))$ e que o ponto Q tenha coordenadas $Q : (x+h, f(x+h))$, então o coeficiente angular da reta secante é dado por:

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Conforme o ponto Q se aproxima do ponto P temos que a inclinação



da reta secante por P e Q se aproxima da inclinação da reta tangente a f no ponto P e no "limite" é igual a inclinação. Assim temos:

$$m_{\text{tg}} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

O limite anterior se existir, é denominado de derivada da função f no ponto x.

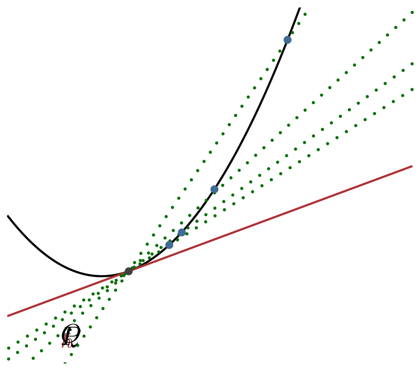


Figura 1.2 Conforme o ponto Q se aproxima de P as retas secantes se aproximam da reta tangente.

1.2 Intuições sobre Limite

O conceito de limite de uma função num ponto a descreve o comportamento dessa função em valores próximos de a, mas diferentes de a.

Descrição Informal de Limite

Dizemos que o **limite da função** $f(x)$ é L quando x tende a a se a função $f(x)$ torna-se arbitrariamente próxima de L quando x está suficientemente próximo de a, mas diferente de a. Denotaremos tal fato por:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Como o limite com x tendendo a a de $f(x)$ descreve o comportamento da função f para valores próximo a a, mas diferentes de a, assim uma exigência natural a ser imposta sobre a função f é que esta esteja definida ao menos num intervalo contendo a, exceto possivelmente no próprio ponto a. Os gráficos da Figura 1.3 mostram três exemplos de funções para os quais os limites existem e são L. No primeiro caso a função f está definida em a, e $f(a) = L$, na segunda a função g não está definida em a e na terceira apesar da função estar definida em a temos que $h(a) \neq L$. Já os gráficos da Figura 1.4 ilustram duas situações nas quais o limite em a não existe.

Vamos inicialmente ilustrar o conceito de limite através de alguns exemplos para os quais existem o limite:

Exemplo 1.1 Conjecture o valor de $\lim\limits_{x\to 2} 3x+1$. Observamos inicialmente

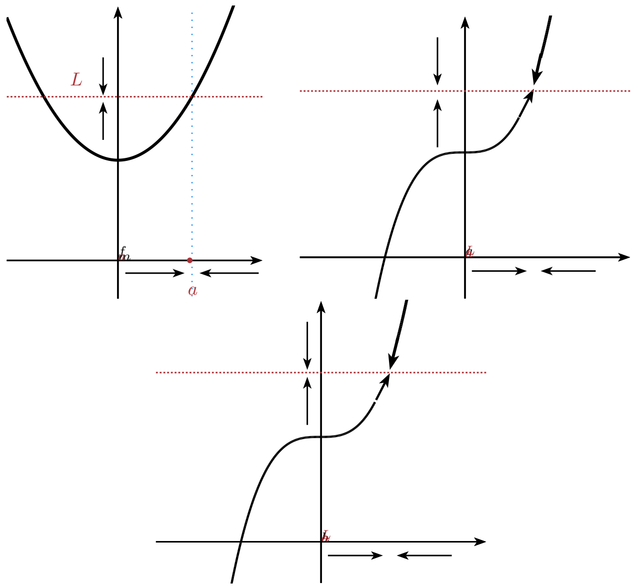


Figura 1.3 Exemplos de funções para as quais o limite quando x tende a a é L.

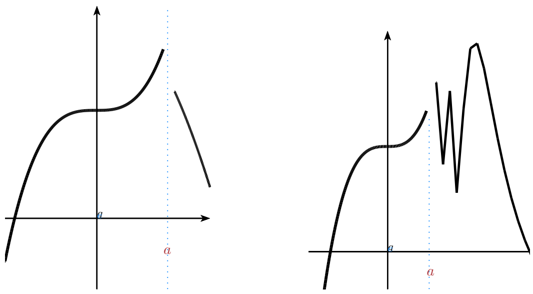


Figura 1.4 Exemplos de funções para as quais o limite não existe.

que o limite anterior, se existir, nos descreverá o comportamento da função $3x+1$ para valores próximos de $x=2$, mas diferentes de 2. Para conjecturar qual o valor do limite, começaremos calculando alguns valores que essa função assume próximo ao ponto 2:

x	$3x+1$
3	10
2,1	7,3
2,01	7,03
2,001	7,003
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
2	7

x	$3x+1$
1	4
1.9	6,7
1,99	6,97
1,999	6,997
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
2	7

Os dados da tabela anterior seguem um padrão, conforme os valores de x se aproximam de 2 os valores da função $f(x)$ se aproximam de 7. O que nos permite conjecturar que $\lim\limits_{x\to 2} 3x+1 = 7$. Podemos ir além, e verificar que os valores da função $3x+1$ tornam-se arbitrariamente próxima de 7 quando escolhemos valores de x suficientemente próximos de 2. Para isso tentaremos exigir que a distância entre a função $3x+1$ e o valor 7 seja menor que um valor pequeno, por exemplo, 10^{-3}. Para tal fim temos que resolver a inequação:

$$|3x+1-7| < 10^{-3}$$

resolvendo essa inequação temos:

$$|3x-6| < 10^{-3} \Leftrightarrow |x-2| < \frac{10^{-3}}{3}$$

Ou seja, quando $|x-2| < \frac{10^{-3}}{3}$ temos que $|3x+1-7| < 10^{-3}$. Esse raciocínio pode ser generalizado. Se quisermos forçar a distância entre a função $3x+1$ e o valor 7 ser menor que um valor positivo ε teríamos que resolver a inequação $|3x+1-7| < \varepsilon$. E de maneira análoga, teríamos que quando $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$ temos que $|3x+1-7| < \varepsilon$. Assim, temos que podemos controlar a distância na imagem ($|f(x)-L|$) controlando a distância no domínio ($|x-a|$), fato que, como formalizaremos na próxima seção, nos permitirá concluir que realmente $\lim_{x\to 2} 3x+1 = 7$.

Exemplo 1.2 Conjecture o valor de $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2x}{x-1}$. Observamos inicialmente que não podemos calcular a função em 1, pois a função não está definida para esse valor. Esse fato é irrelevante para o cálculo do limite, pois, como já dissemos ao calcularmos o limite estamos entendendo o comportamento da função para valores próximos ao ponto, mas diferente deste. Novamente vamos começar atribuindo alguns valores próximos de 1 à função $\frac{2x^2-2x}{x-1}$.

x	$\frac{2x^2-2x}{x-1}$
10	20
1,1	2,2
1,01	2,02
1,001	2,002
1,0001	2,0002
1,00001	2,00002
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

x	$\frac{2x^2-2x}{x-1}$
0.5	1
0.9	1.8
0.99	1.98
0.999	1.998
0.9999	1.9998
0.99999	1.99998
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

A tabela e o gráfico 1.5 induzem a acvermelhoitar que $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2x}{x-1} = 2$. Podemos melhorar a força de nossa conjectura analisando como se comporta a distância entre a função e o limite. Assim, se quisermos forçar a distância entre a função $\frac{2x-2}{x^2-x}$ e o valor 2 a ser menor que um

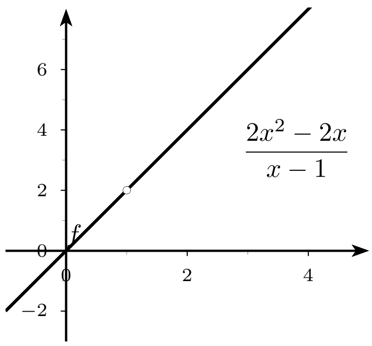


Figura 1.5 Gráfico de $\dfrac{2x^2 - 2x}{x - 1}$.

valor pequeno, por exemplo, 10^{-5} teríamos que resolver a inequação:

$$\left|\frac{2x^2 - 2x}{x - 1} - 2\right| < 10^{-5},$$

quando $x \neq 1$ podemos simplificar a função:

$$\frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{2x(x - 1)}{x - 1} = 2x$$

Ou seja, para $x \neq 1$ temos que $\dfrac{2x^2 - 2x}{x - 1} = 2x$, e assim a desigualdade fica:

$$|2x - 2| < 10^{-5}$$
$$|x - 1| < \frac{10^{-5}}{2}$$

Assim se $|x - 1| < \dfrac{10^{-5}}{2}$ então

$$\left|\frac{2x^2 - 2x}{x - 1} - 2\right| < 10^{-5}.$$

De modo análogo, podemos fazer a distância entre a função $\dfrac{2x - 2}{x^2 - x}$ e o valor 2 menor que ε, nesse caso teríamos que fazer $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Exemplo 1.3 Conjecture o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 25} - 5}{x}$. Inicialmente observamos que $\dfrac{\sqrt{x + 25} - 5}{x}$ não está definida em $x = 0$. Calculando alguns valores temos:

x	$\dfrac{\sqrt{x + 25} - 5}{x}$
10	0,09161
1	0,09902
0,1	0,09990
0,01	0,09999
0,001	0,1000
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
0	0,1

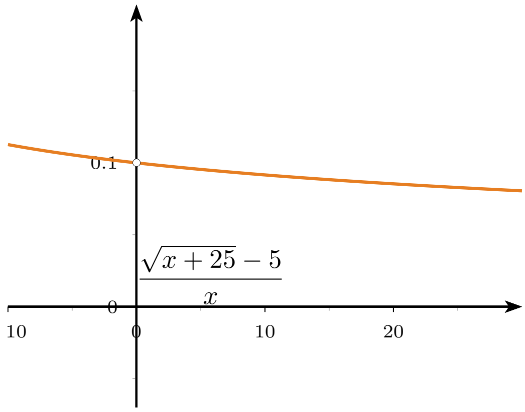


Figura 1.6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x}=0,1.$

Nesse caso tanto o numerador quanto o denominador de $\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x}$ se anulam em $x=5$, apesar disso, conforme os valores de x se aproximam de 0 os valores de $f(x)$ se aproximam de $0,1$. O que nos permite conjecturar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x}=0,1$. Calcularemos esse limite mais adiante no Exercício Resolvido 9.

Exemplos da não Existência do Limite

Exemplo 1.4 [Comportamentos Diferentes à Esquerda e à Direita] Seja $g=\dfrac{|x|}{x}$ então $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ não existe.

Solução Para valores positivos de x temos que

$$g(x)=\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1,\quad x>0$$

e para valores negativos de x

$$g(x)=\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1,\quad x<0$$

As igualdades anteriores mostram que mesmo para valores

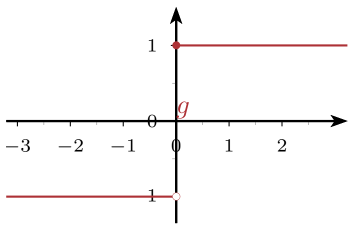


Figura 1.7 Não existe o limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$

próximos a zero, teremos valores de x tais que $g(x)=1$ e tais que $g(x)=-1$. Desse fato podemos intuir que o limite não existe pois independente do quão próximo x fique do zero $f(x)$ não se aproxima de nenhum valor. Provaremos esse fato no Exercício Resolvido 8. ■

Exemplo 1.5 [Comportamento Ilimitado] Não existe o limite $\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|}$.

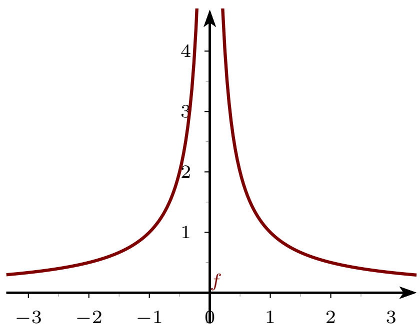


Figura 1.8 Não existe $\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|}$

Solução Seja $h(x) = \frac{1}{|x|}$. Analisando o gráfico 1.8 podemos perceber que quando x se aproxima de 0, tanto pela direita, isto é, por valores maiores que 0, bem como pela esquerda, isto é, por valores menores que 0 temos que $h(x)$ cresce de modo ilimitado. Ou seja, podemos fazer $h(x)$ maior que qualquer número real tomando x próximo de 0. Como $h(x)$ não está se aproximando de nenhum valor, temos que o limite não existe. ■

1.3 Definição de Limite

Para formalizar a descrição informal de limite que apresentamos na seção anterior, um passo importante é formalizar o conceito de próximo. Dizemos que um ponto y é uma **aproximação** de a com erro menor que δ se y satisfaz $|y - a| < \delta$, ou seja se $y \in (a - \delta, a + \delta)$. De modo análogo, dizemos que a função $f(x)$ é uma **aproximação** de L com erro menor que ε para L para valores de x suficientemente próximos de a, se para $y : |y - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Exemplo 1.1 O exemplo 2 mostra que $\frac{2x-2}{x^2-x}$ é uma aproximação de 0 com erro menor que 10^{-5} se se x é uma aproximação de 1 com erro menor que $\frac{10^{-5}}{2}$.

Exemplo 1.2 O exemplo 1 mostra que $3x + 1$ é uma aproximação de 7 com erro menor que ε se x é uma aproximação de 2 com erro menor que $\frac{\varepsilon}{3}$. Mais ainda, o exemplo 1 mostra que $3x+1$ é uma aproximação de 7 com erro menor que ε para valores de x suficientemente próximos de 2. De posse desses conceitos, podemos reescrever a definição de limite como:

1.3 Definição 3. : Limite

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio ponto a e seja L um número real. Dizemos que o **limite** de $f(x)$ é L quando x tende a, denotado por:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Observação 4. *A notação* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *significa que o limite existe e é igual a* L.

Pela definição anterior, para demostrar que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L teremos que garantir que os valores de $f(x)$ estão a uma distância ε acima ou abaixo do valor limite L, como mostrado nos gráficos de 1.9. Para fazer isso, devemos escolher os valores de x que estão suficientemente perto de a, digamos, a uma distância $\delta > 0$ para a esquerda ou direita de a, como mostrado no segundo gráfico. A terceira figura ilustra que a a escolha de um x dentro do intervalo azul $(a-\delta, a+\delta)$ determina um $f(x)$ dentro do intervalo vermelho $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

A definição de limite pode ser reescrita em linguagem simbólica como:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) | \text{ se } 0 < |x-a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Vamos analisar a afirmação anterior dividindo-a em pedaços:

- A afirmação de que $|f(x) - L| < \varepsilon$ nos diz que a função em x estará perto do número real L. Quão próximo? Menos de ε de distância.
- A desigualdade $0 < |x-a| < \delta$ nos diz que ponto x está a uma distância menor que δ de a e é diferente de a.
- A implicação "se $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$" afirma que a condição de que x esteja δ próximo de a força a função $f(x)$ a estar ε próximo de L. Em outras palavras, ao controlar x

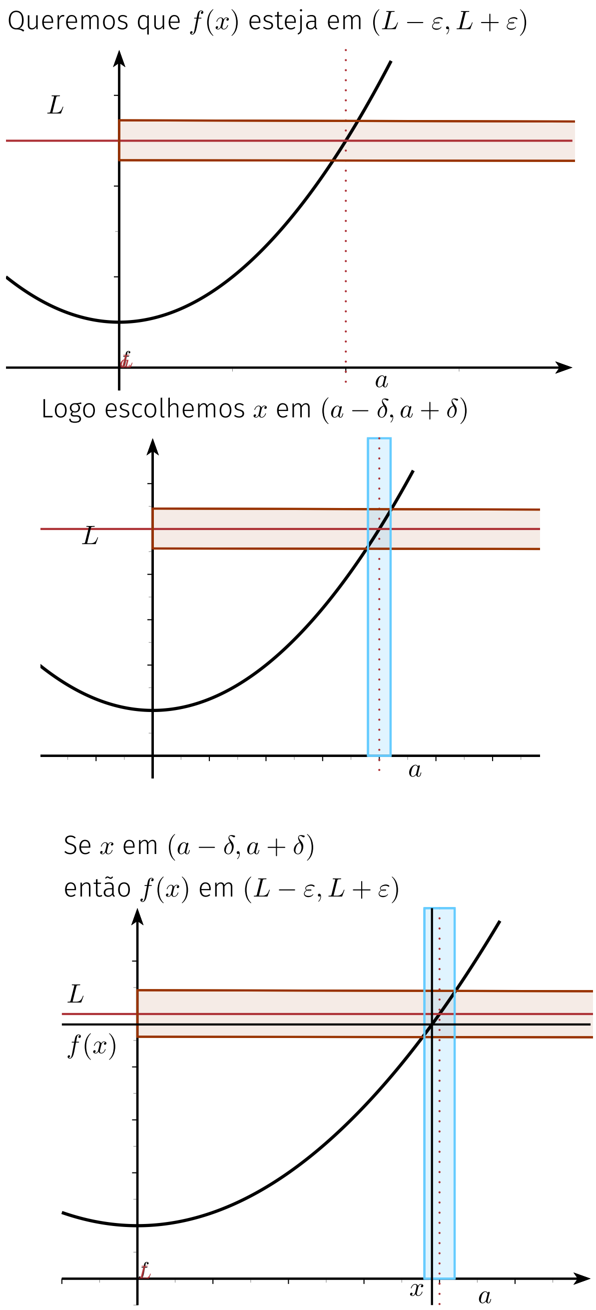


Figura 1.9 Definição de Limite

permitindo que uma variação inferior a δ, controlamos $f(x)$ com uma variação inferior a ε.

- Finalmente a afirmação inteira nos diz que para qualquer valor de ε, podemos encontrar um δ que satisfaz o item anterior.

Merece ser ressaltado que a definição de limite não nos fornece modos de determinar o valor do limite L. Em uma demonstração a partir da definição o valor do limite deve ser conjecturado. Mais adiante forneceremos uma série de ferramentas que nos permitiram efetivamente calcular os limites. Assim, deve estar claro que uma etapa crucial na demonstração de um limite a partir da definição (por ε e δ) é encontrar o δ de modo que

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta \text{ então } |f(x)-L| < \varepsilon.$$

Para realizar tal tarefa uma estratégia é partir da desigualdade $|f(x)-L| < \varepsilon$ para entender como esse termo pode ser controlado por $0 < |x-a| < \delta$, em particular encontrar uma fatoração de $|f(x)-L| < \varepsilon$ na qual $|x-a|$ é fator. Essa estratégia nos permite encontrar o δ. A etapa seguinte é mostrar que esse δ funciona. Ilustraremos essa estratégia nos exemplos a seguir.

Exemplo 1.5 Mostre a partir da definição de limite que $\lim_{x\to 2} 3x+4 = 10$

Solução Começamos estimando $|f(x)-L| < \varepsilon$:

$$|3x+4-10| = |3x-6| = 3\,|x-2| < \varepsilon$$

Ou seja $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$. Agora podemos escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Fazemos essa escolha pois assim se $0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$ então

$$|3x+4-10| = |3x-6| = 3\,|x-2| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

e logo

$$|3x+4-10| < \varepsilon.$$

■

Exemplo 1.6 Mostre a partir da definição de limite que $\lim_{x\to a} c = c$

Solução Como dito anteriormente para demostrar um limite temos que estimar $|f(x)-L|$ numa vizinhança de a. Nesse caso temos que $|f(x)-L| = |c-c| = 0$, independente dos valores de x. Ou seja, para qualquer δ se $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x)-L| = |c-c| = 0 < \varepsilon$ ■

Exemplo 1.7 Mostre a partir da definição de limite que $\lim_{x\to a} x = a$

Solução Dado $\varepsilon > 0$, como:

$$|f(x)-L| = |x-a|$$

Podemos escolher o valor de δ, fazendo $\delta = \varepsilon$, assim temos que: se $0 < |x-a| < \delta = \varepsilon$ então

$$|f(x)-L| = |x-a| < \varepsilon$$

Ou seja, $|f(x) - L| =< \varepsilon$. ■

Exemplo 1.8 [Comportamentos Diferentes à Esquerda e à Direita] Seja $g = \frac{|x|}{x}$ então $\lim_{x\to 0} g(x)$ não existe.

Solução Como:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostraremos que o limite não existe mostrando que não podemos fazer a distância entre $f(x)$ e um suposto limite L menor que ε, pois independente do quão próximo escolhermos o ponto da origem $|x| < \delta$ teríamos :

$$\text{se } x > 0, |f(x) - L| = |1 - L| < \varepsilon$$

$$\text{se } x < 0, |f(x) - L| = |-1 + L| < \varepsilon$$

As equações anteriores teriam que ser satisfeitas simultaneamente para todo $\varepsilon > 0$. Em especial, considerando o caso em que $\varepsilon = 1$ teríamos:

$$\text{se } x > 0, 1 - \varepsilon < L < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow 0 < L < 2$$

$$\text{se } x < 0, -1 - \varepsilon < L < -1 + \varepsilon \Leftrightarrow -2 < L < 0$$

O que mostra que não existe L. ■

Exercícios

Ex. 1.1 — Calcule a função nos pontos dados. Use os resultados para conjectурar o valor do limite:

1. $f(x) = x^2 + 2x$ nos pontos $1.1 \quad 1.01 \quad 1.001$; $\lim_{x\to 1} x^2 + 2x$
2. $g(x) = \dfrac{x-4}{x^2 - x - 12}$ nos pontos $4.1 \quad 4.01 \quad 4.001$; $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2 - x - 12}$
3. $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ nos pontos $1.1 \quad 1.01 \quad 1.001$; $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

Ex. 1.2 — Mostre a partir da definição os seguintes limites.

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x}{7} = \frac{2}{7}$
2. $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$
3. $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$
4. $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

Ex. 1.3 — Calcule, se existir, o limite, ou demonstre que não existe:

1. $\lim_{x\to 2} |x - 2|$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

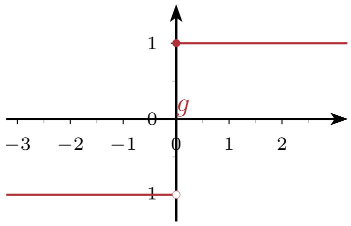
3. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x-2}$

Ex. 1.4 — Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Prove que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

1.4 Limites Laterais



No exemplo 8, vimos que a função g definida como

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

possui dois comportamentos distintos na vizinhança da origem. Se considerarmos valores maiores que 0 teremos que $g(x) = 1$ e logo

$$\lim_{x\to 0, x>0} g(x) = 1,$$

enquanto que se consideramos valores menores que 0 teremos que $g(x) = -1$ e logo

$$\lim_{x\to 0, x<0} g(x) = -1.$$

Indicaremos tais fatos por:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} g(x) = -1$$

1.1 **Definição 4.**

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a e seja L um número real. Dizemos que o **limite lateral** de $f(x)$ quando x tende a a **pela esquerda** é L

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\text{se } a - \delta < x < a \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em linguagem simbólica:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) | \text{ se } a - \delta < x < a \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

De modo análogo, temos:

1.2 Definição 4.

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a e seja L um número real. Dizemos que o **limite lateral** de $f(x)$ quando x tende a a **pela direita** é L

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

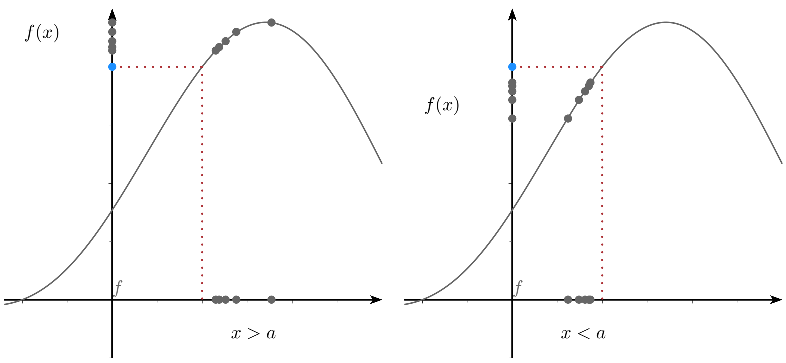
se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\text{se } a < x < a + \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em linguagem simbólica:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) | \text{ se } a < x < a + \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

A diferença essencial da definição de limites laterais em relação a definição de limites é que nos limites laterais estamos considerando apenas valores menores que a (ou seja intervalos da forma $a - \delta < x < a$) nos limites pela esquerda e valores maiores que a (ou seja intervalos da forma $a < x < a + \delta$) nos limites pela direita. A próxima proposição



relaciona a existência dos limites laterais e do limite para uma função f.

1.3 Teorema 4.

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a e seja L um número real. Então $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se e somente se $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

O teorema anterior pode ser usado para demonstrar a existência ou não de alguns limites, como ilustrado nos exemplos seguintes:

Exemplo 1.4 Mostre que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

Solução Vamos demonstrar a existência do limite usando os limites laterais. Para tanto, começaremos calculando o limite pela direita. Como $|x| = x$ se $x > 0$, temos que

$$\lim_{x\to 0+} |x| = \lim_{x\to 0+} x = 0.$$

De maneira análoga, vamos calcular o limite pela esquerda. Como $|x| = -x$ se $x < 0$, temos que

$$\lim_{x\to 0-} |x| = 0.$$

Como ambos os limites laterais existem e são iguais temos pelo teorema 1.4 que:

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

■

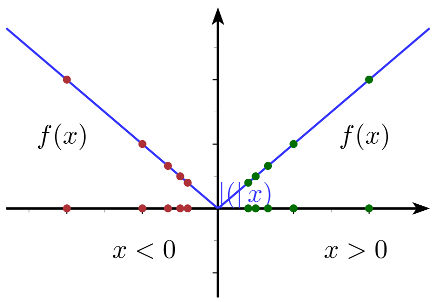


Figura 1.10 Limite $|x|$ quando x tende a 0.

Exemplo 1.5 Considere a função *maior inteiro menor ou igual a* x, i.e.,

$$[\![x]\!] = \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, encontre

$$\lim_{x\to n^+} [\![x]\!] \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to n^-} [\![x]\!]$$

Solução Começaremos calculando o limite $\lim_{x\to n^+} [\![x]\!]$. Para isso seja x tal que $x > n$. Como estamos interessados no comportamento numa vizinhança de n podemos assumir sem perda de generalidade que $x < n+1$ e assim que $n < x < n+1$ Desta forma como para todo número real x, com $n \leq x < n+1$, tem-se que $[\![x]\!] = n$ e assim:

$$\lim_{x\to n^+} [\![x]\!] = n$$

Para calcularmos o limite $\lim_{x\to n^-} [\![x]\!]$, tomemos um x satisfazendo $x < n$. Como estamos interessados no comportamento numa vizinhança de n podemos assumir sem perda de generalidade que $n-1 < x$ e assim que $n-1 < x < n$

$$\lim_{x\to n^-} [\![x]\!] = n-1$$

Como os limites laterais são distintos podemos concluir que não existe $\lim_{x\to n} [\![x]\!]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

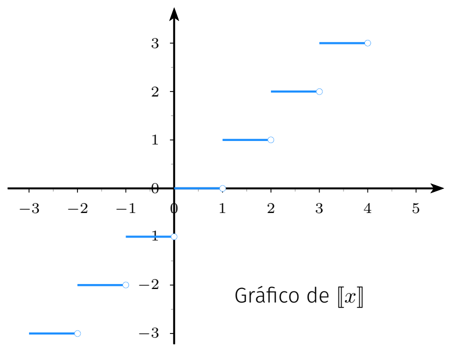


Gráfico de $[\![x]\!]$

1.5 Propriedades do Limite de Funções

De modo análogo ao limite de sequências, os limites de funções possuem as seguintes propriedades:

1.1 Proposição 5. : Propriedades do Limite

Seja c um número real e f e g duas funções reais tais que $\lim_{x\to a} f(x) = A$ e $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Então:

1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B.$ (Limite da Soma)
2. $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = A-B.$ (Limite da Diferença)
3. $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = AB.$ (Limite do Produto)

4 $\lim_{x\to a}(cf(x)) = cA.$ (Limite do Produto por Escalar)

5 Se $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$ então $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}.$ (Limite do Quociente)

6 $\lim_{x\to a}|f(x)| = |A|.$ (Limite do Módulo)

7 $\lim_{x\to a}(f(x)^n) = A^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Limite de Potências)

8 $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$ (Limite da Raiz)

Usaremos as propriedades anteriores para calcular alguns limites:

Exemplo 1.2 Calcule $\lim_{x\to 2} x^3 + 3x + 2$

Solução

$$\lim_{x\to 2} x^3 + 3x + 2 = \lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 2 \quad \text{por } \boxed{1} \tag{1.1}$$

$$= \left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 + 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2 \quad \text{por } \boxed{4} \text{ e } \boxed{7} \tag{1.2}$$

$$= 8 + 6 + 2 = 16 \tag{1.3}$$

■

Exemplo 1.3 Calcule $\lim_{x\to a}\frac{x^4+2}{x^2+1}$

Solução Se $\lim_{x\to a} x^2 + 1 \neq 0$ então

$$\lim_{x\to a}\frac{x^4+2}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to a}(x^4+2)}{\lim_{x\to a}(x^2+1)} \quad \text{por } \boxed{5} \tag{1.4}$$

$$= \frac{\lim_{x\to a} x^4 + \lim_{x\to a} 2}{\lim_{x\to a} x^2 + \lim_{x\to a} 1} \quad \text{por } \boxed{1} \tag{1.5}$$

$$= \frac{a^4+2}{a^2+1} \quad \text{por } \boxed{7} \tag{1.6}$$

■

De modo geral para um polinômio $p(x)$ podemos calcular o seu limite no ponto a calculando simplesmente $p(a)$ ou seja por substituição direta de x por a.

1.4 **Teorema 5.**

Dado um polinômio $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ então

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a).$$

Demonstração. Vamos demonstrar por indução sobre o grau do polinômio. Se $p(x)$ é um polinômio de grau zero, ou seja constante, a igualdade é clara. Por hipótese indutiva, suponhamos que a igualdade anterior seja válida para os polinômios de grau menor igual que $n-1$. Agora usando a hipótese indutiva, 1 e 3 temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} p(x) &= \left(\lim_{x \to a} c_n x^{n-1}\right)\left(\lim_{x \to a} x\right) + \lim_{x \to a}\left(c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0\right) \\ &= c_n a^{n-1} a + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = p(a).\end{aligned}$$

■

Usando a propriedade 5 temos que para funções racionais também vale substituição direta para o cálculo de limites:

1.5 Teorema 5.

Dados polinômios $p(x)$ e $q(x)$ com $q(a) \neq 0$ então

$$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

Exemplo 1.6 Calcule $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 12x + 2}{4x^2 + 4x - 2}$.

Solução Usando o exemplo anterior podemos calcular o limite por substituição e logo

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 12x + 2}{4x^2 + 4x - 2} = \frac{8 + 24 + 2}{16 + 8 - 2} = \frac{34}{22}$$

■

Ressaltemos que nem todos os limites podem ser calculados por substituição direta. Quando tivermos $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ com $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ dizemos que temos uma **indeterminação do tipo** $\dfrac{0}{0}$. Nesses casos para o cálculo do limite temos que realizar uma simplificação antes da utilização das propriedades do limite. Duas estratégias de simplificação usuais são a fatoração e a multiplicação pelo conjugado, como ilustram os exemplos a seguir.

Exemplo 1.7 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{se } x < 2 \\ 2x - C & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Determine o valor de C de modo que o limite $\lim_{x \to 2} f(x)$ exista.

Solução Vamos começar calculando os limites laterais

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3x - 5 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 2x - C = 4 - C$$

Pelo Teorema 1.4, para que o limite exista devemos ter:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

E assim $1 = 4 - C$, e logo $C = 3$. ■

Exemplo 1.8 [Indeterminação do tipo 0/0] Calcule $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 6}$.

Solução Nesse caso não podemos realizar substituição direta nem tampouco usar a propriedade 5 pois o limite do denominador é 0. Como o limite do numerador também é 0 temos que 2 é raiz de ambos os polinômios e assim:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+3)}$$

Agora para o cálculo do limite $x \neq 2$ e logo

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-4}{x+3} = -\frac{2}{5}.$$

■

Agora retornaremos ao exemplo 3

Exemplo 1.9 [Indeterminação do tipo 0/0] Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+25} - 5}{x}$.

Solução Novamente não podemos realizar substituição direta nem tampouco usar a propriedade 5 pois o limite do denominador é 0. Nesse caso multiplicaremos o numerador e o denominador pelo conjugado:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+25} - 5}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+25} - 5)(\sqrt{x+25} + 5)}{x(\sqrt{x+25} + 5)} \tag{1.7}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + 25 - 25}{x(\sqrt{x+25} + 5)} \tag{1.8}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+25} + 5)} \tag{1.9}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+25} + 5} \tag{1.10}$$

(1.11)

E assim temos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x} = \frac{1}{10}$$

■

1.10 **Teorema 5. :** Teorema do Confronto

Dadas f, g, h funções definidas num intervalo contendo o ponto a, exceto possivelmente em a, e tais que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ nesse intervalo. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$, então

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

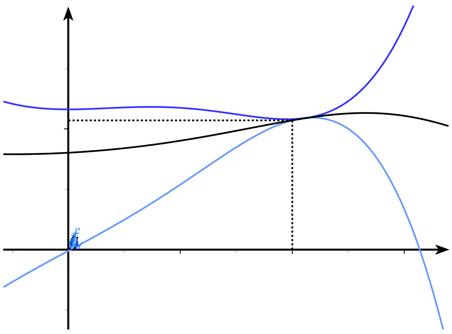


Figura 1.11 Teorema do Confronto

Demonstração. Das hipóteses, temos que existe δ tal que $|g(x) - L| < \varepsilon$ e $|h(x) - L| < \varepsilon$ se $0 < |x - c| < \delta$. Podemos reescrever as desigualdades anteriores como

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

e

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

se $0 < |x - c| < \delta$. Logo

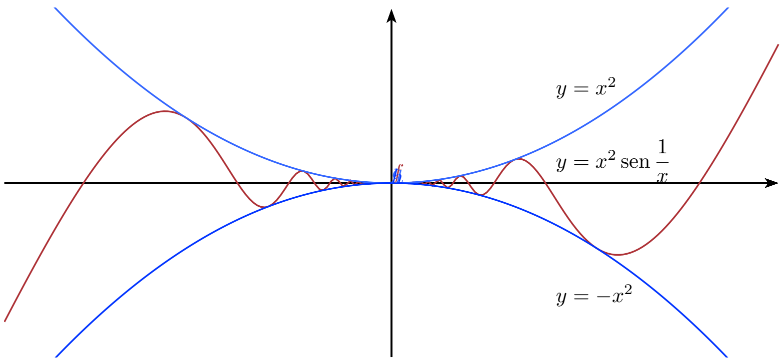
$$-\varepsilon < g(x) < f(x) < h(x) < L + \varepsilon \text{ se } 0 < |x - c| < \delta. \tag{1.12}$$

equivalentemente

$$-\varepsilon < g(x) - L < f(x) - L < h(x) - L < \varepsilon \text{ se } 0 < |x - c| < \delta \tag{1.13}$$

Consequentemente $|f(x) - L| < max(|g(x) - L|, |h(x) - L|) < \varepsilon$ se $0 < |x - c| < \delta$. ■

Exemplo 1.11 Mostre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$.



Solução Como

$$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1$$

temos que

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2$$

Como $\lim_{x \to 0} x^2 = \lim_{x \to 0} -x^2 = 0$, pelo Teorema do Confronto temos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

■

1.12 Teorema 5. : Limite Fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

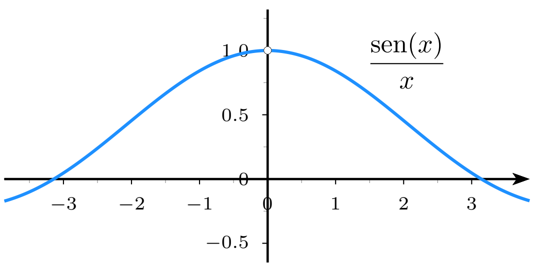


Figura 1.12 Gráfico de $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

Demonstração. Começaremos provando que para

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

valem as desigualdades:

$$0 < \cos(x) < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Considere no círculo trigonométrico um ângulo x com

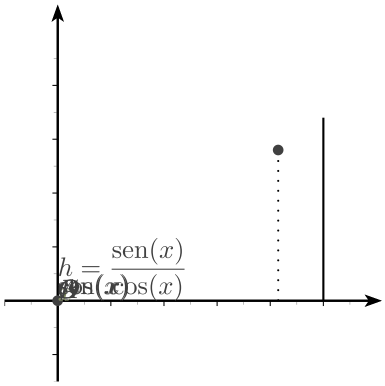


Figura 1.13 $\cos(x) < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < \dfrac{1}{\cos(x)}$

$$0 < x < \frac{\pi}{2},$$

conforme apresentado na figura 1.13, como os triângulos $\triangle OCB$ e $\triangle OAD$ são semelhantes, se denotarmos por h o tamanho do segmento AD, por semelhança de triângulos temos que

$$\frac{h}{1} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

e logo $\text{Área}(\triangle OAD) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{2\cos(x)}$. Se denotarmos a área do setor circular delimitado pelos pontos O, A, B por $\text{Área}(OAB)$, pela figura ao lado é fácil ver que valem as desigualdades para $x < \dfrac{\pi}{2}$:

$$\text{Área}(\triangle OBC) < \text{Área}(OAB) < \text{Área}(\triangle OAD)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)\cos(x) < \frac{1}{2}x < \frac{\operatorname{sen}(x)}{2\cos(x)}.$$

Dividindo por $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{2}$ temos:

$$\cos(x) < \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Finalmente, comparando os inversos dos três termos, obtemos:

$$\Rightarrow \cos(x) < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

O caso

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0$$

é análogo e será deixado como exercício. Assim como $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos(x)}$ pelo Teorema do Confronto temos o limite desejado. ■

Exemplo 1.13 Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ Não podemos usar diretamente a regra do quociente pois $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. Para eliminar a indeterminação, multiplicaremos o numerador e o denominador por $1+\cos(x)$.

Solução

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\frac{(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))} \tag{1.14}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2}\frac{1}{(1+\cos(x))} \tag{1.15}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\frac{1}{1+\cos(x)} \tag{1.16}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)} \tag{1.17}$$
$$= \frac{1}{2} \tag{1.18}$$

■

1.14 **Teorema 5. : Mudança de Variáveis**

Suponha que

- □ $\lim_{y\to b} f(y) = L$,
- □ $\Im g \subseteq \text{Dom } f$,
- □ $\lim_{x\to a} g(x) = b$,
- □ $g(x) \neq b$ numa vizinhança de a, com excessão possivelmente de a.

Então
$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = L$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim_{y\to b} f(y) = L$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |y-b| < \delta$ implica $|f(y)-L| < \epsilon$. Como $\lim_{x\to a} g(x) = b$, existe $\delta' > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta'$ implica $0 < |g(x)-b| < \delta$. E logo $|f(g(x))-L| < \epsilon$ se $0 < |x-a| < \delta'$. ■

Exemplo 1.15 Mostre que $\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} = 1$.

Solução Podemos aplicar o Teorema 1.5 com $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = x-2$ $a = 2$ e $b = 0$. Para esse fim, observamos que $g(x) \neq 0$ numa vizinhança de 2 excluindo o 2. Desta forma como $\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$ e $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(x) = 0$ pelo Teorema 1.5 temos que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1$$

. ■

Exercícios

Ex. 1.5 — Calcule os seguintes limites:

1. $\lim_{x \to 2} 7x^3 + x + 2$
2. $\lim_{x \to 3} (x^3 + x + 2)(x^3 + 2)$
3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{6x^2 + 2x + 2}{x^3 + 2}$
4. $\lim_{x \to 2} 7x^3 + x + 2$
5. $\lim_{x \to 0} \sqrt[4]{8x^3 + 4x + 4}$
6. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^2 - 4}{h}$
7. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(4 + h)^2 - 16}{h}$
8. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^4 - 81}{x - 3}$
9. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$

Ex. 1.6 — Forneça exemplos de funções $f(x)$ e $g(x)$ tal que $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ exista, mas que não existam $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$

Ex. 1.7 — Determine a de modo que o limite exista. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - ax^2 - 9x + 9a}{x^2 - 5x + 6}$

Ex. 1.8 — Mostre que $\lim_{x \to 0} x^3 \cos \dfrac{1}{x} = 0$.

Ex. 1.9 — Use o limite fundamental para calcular os seguintes limites:

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 4x}$
3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{sen} 3x}$
4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{x}$

1.6 Continuidade

De modo intuitivo, uma função $f : A \to B$, com $A, B \subset \mathbb{R}$ é dita **contínua** se variações suficientemente pequenas em x resultam em variações pequenas de $f(x)$, ou equivalentemente, se para x suficientemente próximo de a tivermos que $f(x)$ é próximo de $f(a)$. Antes de apresentarmos uma definição precisa de continuidade, vamos examinar alguns exemplos de comportamentos de continuidade e descontinuidades num ponto. Começaremos por dois exemplos de descontinuidade: No exemplo da figura 1.14 quando tomamos valores de x diferentes de 1 porém cada vez mais próximos de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de 2, porém o valor de $f(1)$ é 3, e consequentemente temos uma descontinuidade nesse ponto. No exemplo da figura 1.15 temos um

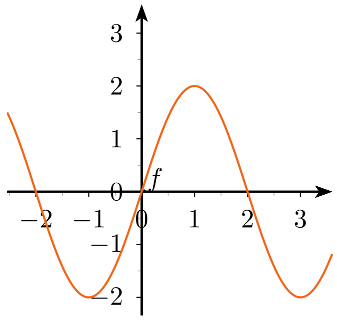


Figura 1.14 Função descontínua em $x = 1$.

tipo distinto de descontinuidade. Quando aproximamos de 1 por valores maiores que 1, temos que $f(x)$ se aproxima de 2, enquanto que se aproximarmos de 1 por valores menores que 1 então $f(x)$ se aproxima de 1. Veja que isso se manifesta no "salto" da função no ponto $x = 1$. Vamos agora examinar um exemplo de função contínua, a fun-

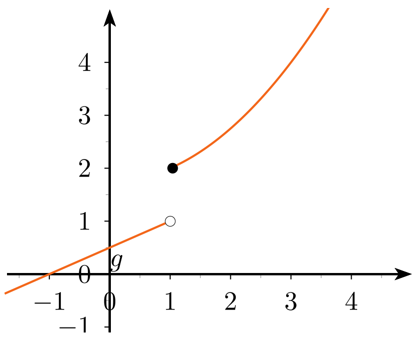
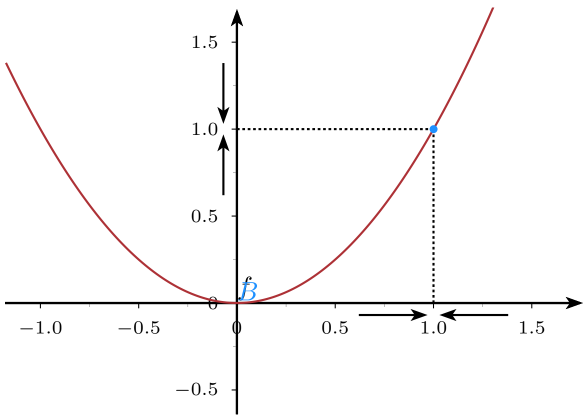


Figura 1.15 Função descontínua em $x = 1$

ção $f(x) = x^2$. Vamos nos concentrar em entender o porquê dessa função ser contínua numa vizinhança do ponto $x = 1$.

x	x^2
2	4
1.5	2.25
1.3	1.69
1.2	1.44
1.1	1.21
1.01	1.0201
1.001	1.002001

Intuitivamente, quando tomamos valores de x diferentes de 1 porém cada vez mais próximos de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de de $f(1) = 1$, e logo a função $f(x) = x^2$ é contínua nesse ponto.



1.1 **Definição 6.**

Dada uma função $f : A \to B$ definida em pelo menos um conjunto aberto contendo o ponto a. Dizemos que a função $f(x)$ é **contínua** em a se e somente se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ou equivalentemente

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Uma função que é contínua em todo o seu domínio é dita **contínua**.

1.2 **Definição 6.**

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita **contínua por partes** se existe um conjunto finito $F \subseteq [a, b]$ tal que f é contínua em $[a, b] \setminus F$.

Utilizaremos a definição de continuidade apresentada anteriormente para provarmos que algumas funções clássicas são contínuas:

1.3 **Teorema 6.**

As seguintes funções são contínuas (em todo o seu domínio):

1. Funções Polinomiais.
2. Funções Racionais.

3. $\operatorname{sen}(x)$
4. $\cos(x)$
5. c^x

Demonstração. A demonstração da continuidade das funções polinomiais e racionais já foi feita implicitamente nos teoremas 1.5 e 1.5, nos quais provamos que dados polinômios $p(x)$ e $q(x)$ com $q(a) \neq 0$ então:

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a) \qquad \lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$

Vamos provar que $\operatorname{sen}(x)$ é contínua. Para isso começamos mostrando que $|\operatorname{sen}(x)| < |x|$. Considere no círculo trigonométrico um ângulo x tal que

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

conforme apresentado na Figura 1.16.

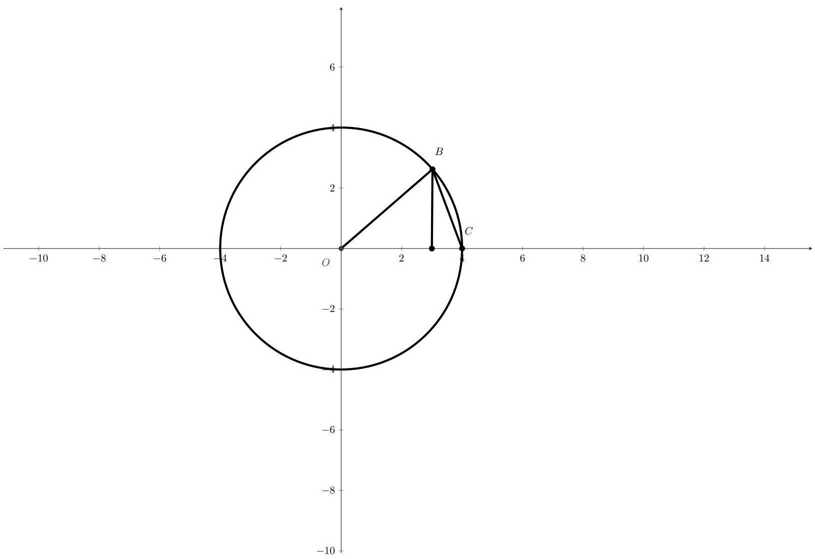


Figura 1.16

Geometricamente, temos que área do triângulo OBC, que vale $|\operatorname{sen}(x)/2|$, é menor que a área do setor circular OBC, cujo valor é $\left|\frac{x}{2}\right|$. Consequentemente para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, vale a desigualdade:

$$|\operatorname{sen}(x)| < |x|$$

e assim

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| \tag{1.19}$$

$$= 2\operatorname{sen}\left|\frac{x-a}{2}\right|\cos\left|\frac{x+a}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right| \tag{1.20}$$

$$\leq \qquad |x-a| \tag{1.21}$$

E assim

$$0 < \lim_{x \to a} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| < \lim_{x \to a} |x - a|$$

Pelo Teorema do Confronto temos:

$$\lim_{x \to a} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = 0$$

e logo $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$. Consequentemente a função $\operatorname{sen}(x)$ é contínua. A continuidade da função exponencial será demonstrada em 2.3. ■

Como consequência das propriedades do limite, temos as seguintes propriedades da continuidade de funções.

1.4 Teorema 6.

Se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas num ponto a, então:

1. $f(x) + g(x)$ é contínua em a
2. $f(x).g(x)$ é contínua em a
3. Se $g(a) \neq 0$ então $f(x)/g(x)$ é contínua em a

Demonstração. Faremos apenas a demonstração do item a. A demonstração dos outros itens é similar e deixamos como exercício ao leitor. Como as funções f e g são contínuas em a temos que os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem e que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Logo pelo limite da soma (1) temos que o limite da some existe e que:

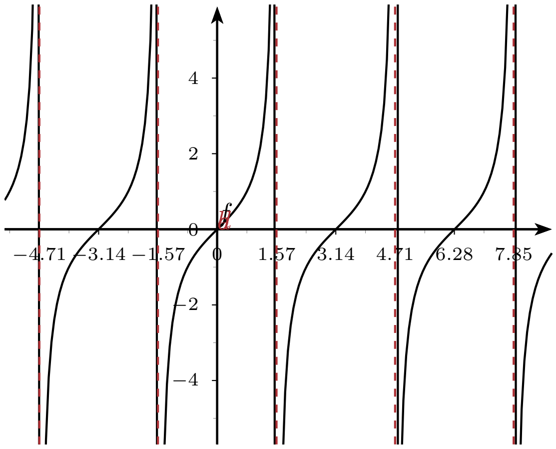
$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a)$$

o que prova a continuidade da soma em a. ■

Como corolário do teorema anterior temos que a função $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ é contínua em todos os pontos do seu domínio, i.e, em $\mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}\}$ Podemos calcular o limite de funções compostas $\lim_{x \to a} f \circ g(x)$, desde que a função f seja contínua, calculando $f(\lim_{x \to a} g(x))$.

1.5 Teorema 6. : Limite da Composta

Sejam f e g duas funções tais que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Dom} g$. Se f é contínua



em b e $\lim_{x \to a} g(x) = b$ então $\lim_{x \to a} f(g(x)) = \lim_{y \to b} f(y) = f(b)$.

Demonstração. Como f é contínua em b, temos que $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$. Por hipótese temos que $\lim_{x \to a} g(x) = b$ Se $g(x) \neq b$ numa vizinhança de a, pelo Teorema 1.5

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(g(a))$$

O outro caso é imediato. ■

O Teorema do Limite da Composta permite calcular limites utilizando a mudança de variáveis, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.6 Mostre que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + 4x + \pi) + 2}{\cos(x^3 + x^5)} = 2.$

Solução Como já dissemos as funções $sen(x)$ e $cos(x)$ são contínuas em todos os pontos. Além disso temos:

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 + 4x + \pi\right) = \pi \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} x^3 + x^5 = 0$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x^2 + 4x + \pi) + 2 = \operatorname{sen}(\lim_{x \to 0} x^2 + 4x + \pi) + 2 = \operatorname{sen}(\pi) + 2 = 2$$

e

$$\lim_{x \to 0} \cos(x^3 + x^5) = \cos(\lim_{x \to 0} x^3 + x^5) = \cos(0) = 1$$

Logo por $\boxed{5}$ temos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + 4x + \pi) + 2}{\cos(x^3 + x^5)} = \frac{\lim_{x \to 0} \left(\operatorname{sen}(x^2 + 4x + \pi) + 2\right)}{\lim_{x \to 0} \cos(x^3 + x^5)} = 2$$

■

Como consequência do Teorema do Limite da Composta (vide pág. 37) temos que a composição de funções contínuas é contínuas:

1.7 **Teorema 6.**

Dadas funções $g : A \to B$ definida num aberto contendo o ponto a e $f : B \to C$ definida num aberto contendo o ponto $g(a)$. Então se g é contínua em a e se f é contínua em $g(a)$, então $f(g(x))$ é contínua em a.

Finalmente, temos que a inversa de uma função contínua é contínua.

1.8 **Teorema 6.**

Dado um intervalo I e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e monótona em I. Então $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ é contínua em $f(I)$.

Como consequência do Teorema 3.6 temos que as funções trigonométricas inversas $\operatorname{arcsen}(x)$, $\arccos(x)$, $\operatorname{arctg}(x)$, etc. e a função $\log$ são contínuas em todos os pontos de seus respectivos domínios de definição. E, ainda, como consequência do Teorema 1.6 temos que funções elementares, i.e, funções que são obtidas por soma, produto, quociente e compostas de funções polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas são contínuas em todos os pontos nos quais estão definidas.

Exercícios

Ex. 1.10 — Use o limite da composta para calcular os seguintes limites:

1. $\lim_{x\to 0} \cos(x^2 + x + \dfrac{1}{1+x}$
2. $\lim_{x\to 0} e^{\operatorname{sen}(x^2)}$
3. $\lim_{x\to 2} \operatorname{arcsen} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 8}$
4. $\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4 * x + 3}$

Ex. 1.11 — Calcule os seguintes limites:

1. $\lim_{x\to 1} \left(3x^3 + \dfrac{1}{x} + 4\right)$
2. $\lim_{x\to 0} \cos(x)$
3. $\lim_{x\to 3} \left|-5x^3 + x\right|$
4. $\lim_{x\to 2} (x^3 + 2)(x^2 - 5x)$
5. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$
6. $\lim_{t\to 4} \dfrac{4 - t}{2 - \sqrt{2}}$
7. $\lim_{t\to 0} \dfrac{(a+t)^3 - a^3}{t}$

8. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2+t}-\sqrt{2}}{t}$

9. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2+t}-\sqrt{2}}{t}$

10. Prove que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 2^{\cos(x)} = 0$.

Ex. 1.12 — Prove que se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas num ponto a, então:

1. $f(x)+g(x)$ é contínua em a

2. $f(x).g(x)$ é contínua em a

3. Se $g(a) \neq 0$ então $f(x)/g(x)$ é contínua em a

Ex. 1.13 — Seja $f(x)$ a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 \text{ se } x<0 \\ ax+3 \text{ se } x\geq 0 \end{cases}$$

Encontre o valor de a de modo que f seja contínua em 0.

Ex. 1.14 — Dado $g(x)$ a função definida como:

$$g(x) = \begin{cases} x^3+3x+1 \text{ se } x<b \\ ax^2+3 \text{ se } x\geq b \end{cases}$$

Encontre o valor de a de modo que g seja contínua em b.

Ex. 1.15 — Dado $h(x)$ a função definida como:

$$h(x) = \begin{cases} \cos(x)+1 \text{ se } x<b \\ ax^2+b \text{ se } x\geq b \end{cases}$$

Encontre o valor de a de modo que h seja contínua em b.

1.7 Propriedades das Funções Contínuas

Nessa seção apresentaremos algumas propriedades das funções contínuas.

1.7.1 Teorema do Valor Intermediário

Geometricamente, o Teorema do Valor Intermediário nos diz que o gráfico de uma função contínua assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, ou dito de outra forma, dado d entre $f(a)$ e $f(b)$, o gráfico de $f(x)$ deve interceptar a reta horizontal $y=d$.

1.1 **Teorema 7. :** Teorema do Valor Intermediário

> Seja f uma função contínua em todos os pontos de um intervalo fechado $[a, b]$ e com $f(a) \neq f(b)$ então para todo d entre $f(a)$ e $f(b)$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$;

A demonstração desse teorema será apresentada na Seção ??. Nessa seção apresentaremos algumas aplicações do Teorema do Valor Intermediário na demonstração de existência de soluções para equações. Para tanto, por sua utilidade, enunciaremos o Teorema do Valor Intermediário em uma forma especial e mais restrita: o Teorema de Bolzano.

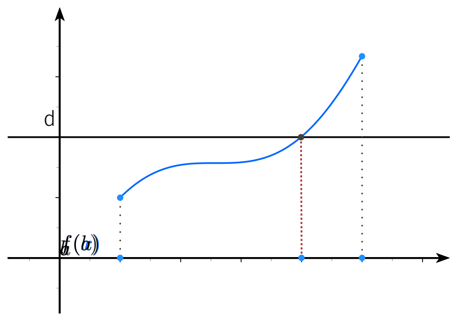
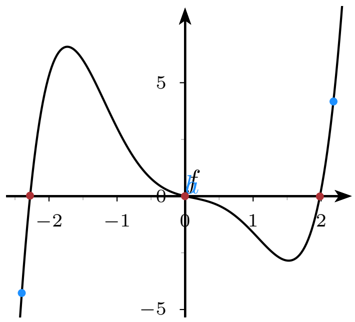


Figura 1.17 O Teorema do Valor Intermediário só é válido para funções contínuas.

> 1.2 **Teorema 7. : Teorema de Bolzano**
>
> Seja f uma função contínua em todos os pontos de um intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais opostos. Então existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

O teorema anterior nos diz que o gráfico de uma função contínua que em a está abaixo do eixo x e em b está sobre este (ou vice-versa), em algum ponto do intervalo $[a, b]$ deve cruzar o eixo x.



Exemplo 1.3 Mostre que a equação $\cos(x) = x$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0, \pi]$.

Solução Note que a equação anterior é equivalente $\cos(x) - x = 0$. Assim começaremos considerando a função $g(x) = cos(x) - x$, que é contínua pois é soma de funções contínuas. Agora observamos que $g(0) = \cos(0) - 0 = 1$, e logo $g(0) > 0$ e que $g(\pi) = \cos(\pi) - \pi = -1 - \pi$, e logo $g(\pi) < 0$. Logo pelo Teorema de Bolzano existe $c \in (0, \pi)$ tal que $g(c) = \cos(c) - c = 0$, e desta forma temos que a equação tem uma solução. ■

Exemplo 1.4 Mostre que a equação $3^x = x^2 + 4$ tem pelo menos uma

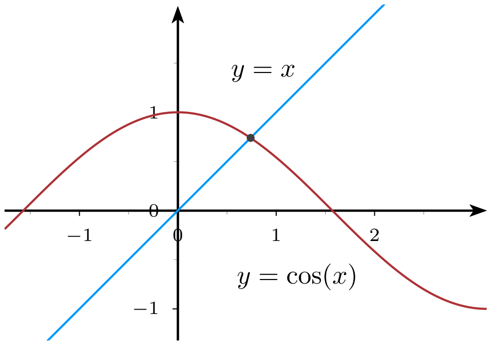


Figura 1.18 Intersecção dos gráficos de $y = x$ e $y = \cos(x)$

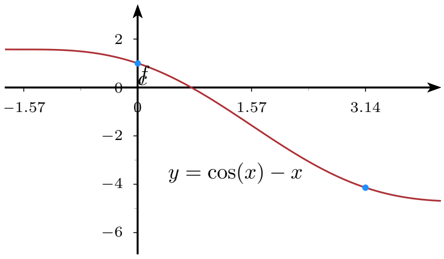


Figura 1.19 Gráfico de $y = \cos(x) - x$.

solução no intervalo $(1, 2)$.

Solução Note que a equação anterior é equivalente $3^x - x^2 - 4 = 0$. Assim começaremos considerando a função $g(x) = 3^x - x^2 - 4$, que é contínua pois é soma de funções contínuas. Agora observamos que $g(0) = 3^0 - 4 = -3$, e logo $g(0) < 0$ e que $g(2) = 9 - 4 - 4 = 1$, e logo $g(2) > 0$. Logo pelo Teorema de Bolzano existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 3^c - c^2 - 4 = 0$, e desta forma temos que a equação tem pelo menos uma solução. ■

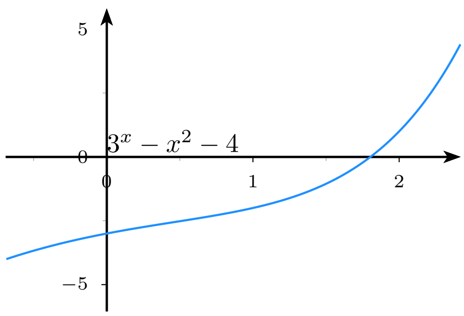


Figura 1.20 Gráfico de $y = 3^x - x^2 - 4$.

Demonstração. O teorema é consequência da propriedade de completude dos números reais. Provaremos apenas o caso no qual $f(a) < d < f(b)$. A demonstração do outro caso, $f(b) < d < f(a)$, é similar.

Seja S o conjunto de todos os x em $[a, b]$ tais que $f(x) < d$. Então S é um conjunto não-vazio pois a é um elemento de S, e S é limitado superiormente por b. Assim, por completude, existe o supremo $c = \sup S$. Provaremos que $f(c) = d$. Dado $\varepsilon > 0$, como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ sempre que $|x - c| < \delta$. Isso significa que

$$f(x) - \varepsilon < f(c) < f(x) + \varepsilon$$

para todo x entre $c - \delta$ e $c + \delta$. Pelas propriedades do supremo, existem entre um x^* entre $c - \delta$ e c e que está contido em S, de modo que, para esse x^*

$$f(c) < f(x^*) + \varepsilon < d + \varepsilon.$$

Escolha $\hat{x}$ entre c e $c + \delta$, que obviamente não estará contido em S, e dessa forma teremos:

$$f(c) > f(\hat{x}) - \varepsilon \geq d - \varepsilon.$$

Combinando as desigualdades anteriores temos que

$$d - \varepsilon < f(c) < d + \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, e pelo Exercício **??** temos que $f(c) = d$. ■

1.5 Proposição 7.

Uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$ de um intervalo fechado $I = [a, b]$ em $\mathbb{R}$ é injetiva se e somente se a função f é estritamente monotônica em $[a, b]$.

Demonstração. Se f é estritamente crescente ou decrescente em qualquer conjunto I, a aplicação $f : I \to \mathbb{R}$ é obviamente injetiva. Assim, a parte mais substancial da proposição consiste na afirmação que cada função injetiva e contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função monótona. Vamos provar por absurdo, suponha que existam três pontos $x_1 < x_2 < x_3$ em $[a, b]$, tal que $f(x_2)$ não se encontra entre $f(x_1)$ e $f(x_3)$. Sem perda de generalidade vamos assumir que $f(x_1)$ está entre $f(x_2)$ e $f(x_3)$. Por hipótese f é contínua em $[x_2, x_3]$. Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe x' neste intervalo tal que $f(x') = f(x_1)$. Temos, então, $x_1 < x'$, mas $f(x_1) = f(x')$, que é incompatível com a injetividade da função. ■

Exercícios

Ex. 1.16 — Mostre que a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(1, 2)$

Ex. 1.17 — Mostre que a equação $4^{x^2} - 2(x+1)^2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(-1, 1)$

Ex. 1.18 — Mostre que a equação $x^5 - x^2 - 2 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(0, 2)$

Ex. 1.19 — Mostre que a equação $x^2 = \sqrt{x+2}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(0, 2)$

Ex. 1.20 — Mostre que a equação $\text{tg}(x) = x$ tem pelo menos 3 soluções.

Ex. 1.21 — Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe um número real b tal que $b^2 = 2$, conclua que existe raiz quadrada de 2.

1.7.2 Valores Extremos

1.6 **Teorema 7.**

Se uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então ela é limitada nesse intervalo.

Demonstração. Suponha que f não é limitada no intervalo $[a, b]$. Deixe c ser o ponto médio de $[a, b]$. Então f será ilimitada em pelo menos um dos dois intervalos de $[a, c]$ e $[c, b]$. Nós escolhemos o intervalo em que é ilimitada (no caso, em que a função seja ilimitada em ambos os intervalos, nós escolheremos o intervalo de esquerda). Denotaremos esse intervalo como $[a_1, b_1]$. Este processo de bisseção será realizado indefinidamente e o intervalo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ indicará a metade de $[a_n, b_n]$ em que f é ilimitada. Caso seja ilimitada em ambas as metades, a metade esquerda será selecionada. O comprimento do n-ésimo intervalo é $(b - a)/2^n$. Deixe A denotar o conjunto de pontos de extremidade mais à esquerda $a, a_1, a_2, a_3...$ assim obtido. Deixe α denotar o supremo A. Então α encontra-se em $[a, b]$. Como f é contínua em α, existe um $delta > 0$ tal que

$$|f(x)| < 1 + |f(\alpha)|$$

no intervalo de $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ (No caso $\alpha = a$, o intervalo deve ser $[a, a+\delta)$. Em caso $\alpha = b$, o intervalo deve ser $(b - \delta, b])$ No entanto, o intervalo $[a_n, b_n]$ situa-se dentro do intervalo de $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, pois $(b - a)/2^n < \delta$. Portanto, f é limitada em $(b - a)/2^n$, o que é uma contradição. ■

1.7 **Definição 7.**

Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.

- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de máximo global (ou absoluto)** de f, se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é **máximo global**.
- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de mínimo global** de f, se $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é **mínimo global**.
- Um ponto $x_0 \in I$ será dito um **ponto extremo global**, se x_0 for um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global.

1.8 **Teorema 7.** : Teorema de Weierstrass do Valor Extremo

Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, então f atinge seus valores máximos e mínimos em $[a, b]$.

Demonstração. Como f é contínua, então f possui a menor cota superior, que denominaremos M. Suponha que não há nenhum valor $c\ in[a, b]$ para que $f(c) = M$. Portanto, $f(x) < M$ para todo $x \in [a, b]$. Defina uma nova função g por $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ Observe que $g(x) > 0$ para cada $x \in [a, b]$ e que g é contínua e limitada em $[a, b]$. Portanto, existe $K > 0$ tal que $g(x) \leq K$ para cada x in [a, b] . Uma vez que para cada $x\ in[a, b]$,

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq K \text{ é equivalente a } f(x) \leq M - \frac{1}{K}$$

Contradizemos o fato de que M foi assumido como sendo o extremo superior de f em [a, b]. Assim, deve haver uma valor $c \in [a, b]$ tal que $F(C) = M$. ■

1.8 ⋆Demonstração das Propriedades Básicas de Limite

1.1 **Teorema 8.**

Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem, então

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Antes de começarmos efetivamente a demonstração faremos algumas estimativas que nos guiarão na demonstração. Como ambos os limites existem, vamos supor que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$. E dessa forma queremos mostrar que

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = L_1 + L_2.$$

Pela definição de limite, queremos provar que dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$, então $|(f(x)+g(x)) - (L_1+L_2)| < \varepsilon$ Como $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ temos que para todo $\varepsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta_1$, então $|f(x) - L_1| < \varepsilon_1$. Por outro lado, como $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ temos que para todo $\varepsilon_2 > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta_2$, então $|g(x) - L_2| < \varepsilon_2$. Queremos estimar $|(f(x)+g(x)) - (L_1+L_2)|$ usando a desigualdade triangular temos:

$$|(f(x)+g(x)) - (L_1+L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Assim se pudermos escolher δ_1 e δ_2 de modo que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ teríamos:

$$|(f(x)+g(x)) - (L_1+L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$$

Agora vamos transformar o esboço de demonstração acima em uma prova.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ temos que para $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta_1$, então $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$.De modo similar, como $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ temos que para $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta_2$, então $|g(x) - L_2| < \varepsilon_2$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Para esse δ temos que se $0 < |x-a| < \delta$ então $0 < |x-a| < \delta_1$ e $0 < |x-a| < \delta_2$ e logo para esse δ temos que $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Consequentemente:

$$|(f(x)+g(x)) - (L_1+L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

■

1.2 **Teorema 8.**

Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem, então

$$\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ e suponha que Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = G$. A existência dos limites de $f(x)$ e $g(x)$ implicam na existência de $\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3$ tais que

$$|f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{2(1+|G|)} \quad \text{quando} \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \tag{1.22}$$

$$|g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2(1+|F|)} \quad \text{quando} \quad 0 < |x-a| < \delta_2, \tag{1.23}$$

$$|g(x) - G| < 1 \quad \text{quando} \quad 0 < |x-a| < \delta_3. \tag{1.24}$$

Da condição 1.8 temos:

$$|g(x)| = |g(x)–G+G| \leqq |g(x)–G|+|G| < 1+|G| \quad \text{quando} \quad 0 < |x-a| < \delta_3.$$

Suponha que $0 < |x-a| < \min\{\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3\}$ então a partir de e temos:

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - FG| &= |f(x)g(x) - Fg(x) + Fg(x) - FG| \\
&\leqq |f(x)g(x) - Fg(x)| + |Fg(x) - FG| \\
&= |g(x)| \cdot |f(x) - F| + |F| \cdot |g(x) - G| \\
&< (1+|G|)\frac{\varepsilon}{2(1+|G|)} + (1+|F|)\frac{\varepsilon}{2(1+|F|)} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

■

1.3 **Teorema 8. : Limite do Quociente**

Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem e $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Demonstração. Se pudermos mostrar que

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M},$$

então escrevemos $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ e utilizando a Regra do Produto teremos o resultado. Assim vamos provar que

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}.$$

Seja $\varepsilon > 0$. A existência do limite implica que existem δ_1, δ_2 tais que

$$|g(x) - M| < \varepsilon |M| (1 + |M|) \text{ se } 0 < |x - c| < \delta_1 \tag{1.25}$$

$$|g(x) - M| < 1 \text{ se } 0 < |x - c| < \delta_2 \tag{1.26}$$

Assim

$$|g(x)| = |g(x) - M + M| \leq |g(x) - M| + |M| < 1 + |M|$$

quando

$$0 < |x - c| < \delta_2$$

e logo

$$\left| \frac{1}{g(x)} \right| > \frac{1}{1 + |M|} \text{ quando } 0 < |x - c| < \delta_2 \tag{1.27}$$

Suponha agora que

$$0 < |x - c| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

de 1.25 e 1.27 obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| &= \left| \frac{M - g(x)}{M g(x)} \right| && (1.28)\\
&= \left| \frac{g(x) - M}{M g(x)} \right| && (1.29)\\
&= \left| \frac{1}{g(x)} \right| \cdot \left| \frac{g(x) - M}{M} \right| && (1.30)\\
&< \frac{1}{1 + |M|} \cdot \left| \frac{g(x) - M}{M} \right| && (1.31)\\
&< \frac{1}{1 + |M|} \cdot \left| \frac{\varepsilon |M| (1 + |M|)}{M} \right| && (1.32)\\
&= \varepsilon && (1.33)
\end{aligned}$$

■

1.9 ⋆ Continuidade Uniforme

Vamos agora considerar uma noção de continuidade que é mais forte do que a continuidade normal.

1.1 **Definição 9.**

Seja $f : A \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é *uniformemente contínua* em A se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in A$

$$\text{se } |x - y| < \delta, \quad \text{então } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

A diferença entre continuidade e continuidade uniforme. Começamos analisando a definição de continuidade:

> *Dado $x \in A$ e $\varepsilon > 0$. Seja $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$. Então para todo $y \in A$. tal que $|x - y| < \delta$. Temos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Logo a expressão $\delta(x, \varepsilon)$ pode depender de x e ε mas deve ser independente de y. A ordem de os quantificadores na definição já nos diz isso; no ponto de escolha do δ, $x \in A$ e $\varepsilon > 0$já foram escolhidos, mas y não de modo a definição de δ não deve envolver y.

Por outro lado na definição de continuidade uniforme:

> *Dado $\varepsilon > 0$. Seja $\delta = \delta(\varepsilon)$. Então para $x, y \in A$. satisfazendo $|x - y| < \delta$. Temos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Desta forma a expressão de δ só depende de ε e não depende do ponto x. Ou seja, o mesmo ε funciona para todos os pontos É óbvio que uma função uniformemente contínua é contínua: se podemos encontrar um δ que funciona para todos os valores $x \in A$, podemos encontrar um (o mesmo), que funciona para um valor em especial x. Veremos a seguir exemplos de funções contínuas que não são uniformemente contínua.

1.2 **Teorema 9.**

Se f é uniformemente contínua, então f é contínua.

Exemplo 1.3 Seja $f(x) = 3x + 7$. Então f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$. Deixe $\delta = \varepsilon/3$. Então dados $x, y \in \mathbb{R}$. Se $|x - y| < \delta$. Então

$$|f(x) - f(y)| = |(3x + 7) - (3y + 7)| = 3|x - y| < 3\delta = \varepsilon.$$

■

Exemplo 1.4 Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 4\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Então f é uniformemente contínua em A.

Demonstração. Escolha $\varepsilon > 0$. Escolha $\delta = \varepsilon/8$. Então dados $x, y \in A$. Se $0 < x < 4$ e $0 < y < 4$ então $0 < x + y < 8$. Então se $|x - y| < \delta$ temos que

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = (x + y)|x - y| < (4 + 4)\delta = \varepsilon.$$

■

Em ambas as provas anteriores a função f satisfaz uma desigualdade da forma

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \tag{1.34}$$

Para todo $x_1, x_2 \in A$. No Exemplo 3 tínhamos

$$|(3x_1 + 7) - (3x_2 + 7)| \leq 3|x_1 - x_2|$$

e no Exemplo 4 nós tínhamos

$$|x_1^2 - x_2^2| \leq 8|x_1 - x_2|$$

para $0 < x_1, x_2 < 4$. Uma desigualdade da forma (1.34) é dita uma **desigualdade de Lipschitz** e a constante M é dita a correspondente **Constante de Lipschitz**.

1.5 Teorema 9.

Se f satisfaz (1.34) para todo $x_1, x_2 \in A$, então f é uniformemente contínua em A.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$. Seja $\delta = \varepsilon/M$. Então para todo $x, y \in A$. Então se $|x - x_0| < \delta$ teremos que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = \varepsilon.$$

■

1.6 Teorema 9.

Se f e g uniformemente contínua em $A \subset \mathbb{R}$. Então

1. A função $f + g$ é uniformemente contínua em A.
2. Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, a função $c \cdot f$ é uniformemente

contínua em A.

Exemplo 1.7 A função $f(x) = x^2$ é contínua mas não uniformemente contínua em $A = (0, \infty)$.

Demonstração. Primeiramente mostraremos que f é contínua em A, i.e.

$$\forall x_0 \in A \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in A \left[|x - x_0| < \delta \implies |x^2 - x_0^2| < \varepsilon \right].$$

Dado x_0. Seja $a = x_0 + 1$ e $\delta = \min(1, \varepsilon/2a)$. Observe que δ depende de x_0 pois a depende.) Dado $x \in S$. Se $|x - x_0| < \delta$ então $|x - x_0| < 1$ logo $x < x_0 + 1 = a$ e assim $x, x_0 < a$ temos

$$|x^2 - x_0^2| = (x + x_0)|x - x_0| \leq 2a|x - x_0| < 2a\delta \leq 2a\frac{\varepsilon}{2a} = \varepsilon$$

como desejado. Agora demonstraremos que f não é uniformemente contínua em A, i.e.

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x_0 \in A \; \exists x \in A \left[|x - x_0| < \delta \text{ e } |x^2 - x_0^2| \geq \varepsilon \right].$$

Dado $\varepsilon = 1$ seja $\delta > 0$. Então se escolhermos $x_0 = 1/\delta$ e $x = x_0 + \delta/2$. Então $|x - x_0| = \delta/2 < \delta$ mas

$$|x^2 - x_0^2| = \left| \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{\delta} \right)^2 \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon$$

Observe que neste caso x_0 é grande quando δ é pequeno. ■

1.8 **Teorema 9.**

Suponha que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua. Então f é uniformemente contínua.

Capítulo 2

Limites Infinitos e no Infinito

2.1 Limites no Infinito

Vamos considerar a função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, cujo gráfico é apresentado na Figura 2.1. Podemos observar que conforme os valores de x se tor-

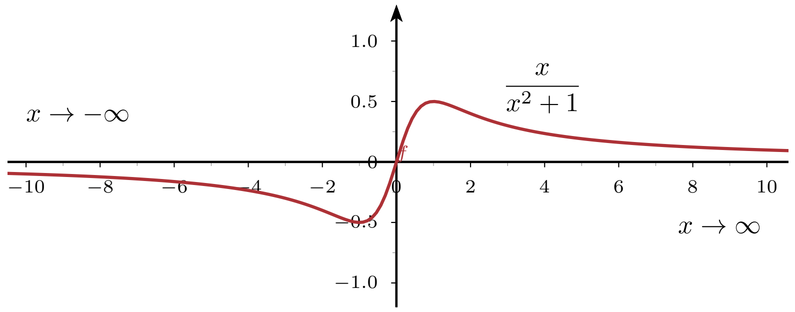


Figura 2.1 Gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

nam suficientemente grandes temos que os valores da função se aproximam de 0. Denotaremos tal fato por

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

Por outro lado, conforme os valores de x se tornam suficientemente grandes negativos (negativos e com valores absolutos grandes) temos que os valores da função também se aproximam de 0. Denotaremos tal fato por

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

Podemos modificar a noção de limite anterior de modo a lidar com esses casos. A modificação essencial é formalizar a afirmação que "se x é suficientemente grande" através de "existe δ tal que se $x > \delta$".

2.1 **Definição 1.**

Limite no Infinito Seja f uma função definida para $x > c$ para algum $c \in \mathbb{R}$ e seja L um número real. Dizemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } x > \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Seja f uma função definida para $x < c$ para algum $c \in \mathbb{R}$ e seja L um número real. Dizemos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } x < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo 2.2 Mostre a partir da definição que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

Solução Queremos mostrar que existe δ tal que se $x > \delta$ então $|f(x)| < \varepsilon$. Para tanto começaremos determinando quando $|f(x)| < \varepsilon$. Como estamos interessados no comportamento no infinito, podemos supor sem perda de generalidade que $x > 0$, e assim temos que a desigualdade $\frac{1}{x} < \varepsilon$ é equivalente a $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Assim escolhemos $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$. Quando $x > \delta$ então $x > \frac{1}{\varepsilon}$ e assim $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$. O que prova que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$ ■

Exemplo 2.3 Mostre a partir da definição que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0.$

Solução Queremos mostrar que existe δ tal que se $x > \delta$ então $|f(x)| < \varepsilon$. Para tanto começaremos determinando quando $|f(x)| < \varepsilon$. Como estamos interessados no comportamento no infinito, podemos supor sem perda de generalidade que $x > 0$, e assim temos que a desigualdade $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$ é equivalente a $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Assim escolhemos $\delta = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Quando $x > \delta$ então $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$ e assim $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$. O que prova que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0.$ ■

2.2 Limites Infinitos

No Exercício Resolvido 5 vimos que não existe o limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}$. Em es-

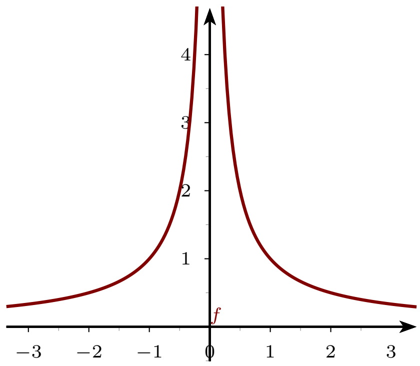


Figura 2.2 Não existe $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|}$

pecial, vimos que escolhendo o valor de x suficientemente pequeno podemos fazer o valor da função $\dfrac{1}{|x|}$ arbitrariamente grande. Nesses casos nos quais o limite não existe, mas a função toma valores que crescem de forma ilimita dizemos que o limite da função é infinito. Vejamos outro exemplo: Os limites $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{7}{x-4}$ e $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{7}{x-4}$. A partir da

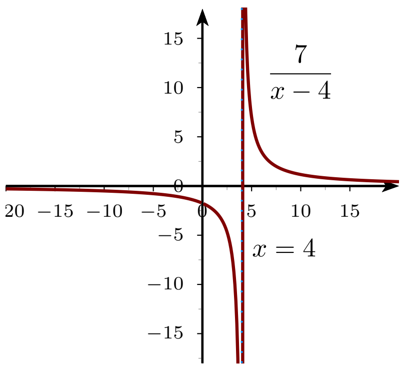


Figura 2.3

Figura 2.3 podemos observar que quando x tende a 4 pela direita, isto é, por valores maiores que 4 a função $\dfrac{7}{x-4}$ cresce indefinidamente, tomando valores arbitrariamente grandes. Enquanto que quando x tende a 4 pela esquerda, isto é, por valores menores que 4 a função $\dfrac{7}{x-4}$ decresce indefinidamente, tomando valores arbitrariamente grandes e negativos. Representamos esses comportamentos por:

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{7}{x-4}=\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 4^-}\frac{7}{x-4}=-\infty$$

2.1 **Definição 2.**

Limites Infinitos

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a.

- Dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta \text{ então } f(x) > \varepsilon.$$

- Dizemos que $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x-a| < \delta \text{ então } f(x) < \varepsilon.$$

- Dizemos que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } a < x < a+\delta \text{ então } f(x) > \varepsilon.$$

- Dizemos que $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } a-\delta < x < a \text{ então } f(x) > \varepsilon.$$

De maneira análoga, podemos definir os limites laterais infinitos negativos : $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ e os limites infinitos no infinito $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exemplo 2.2 Mostre que $\lim_{x\to\infty} x = \infty$.

Solução Pela definição temos que mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x > \delta$ então $f(x) > \varepsilon$. A demonstração nesse caso é imediata pois escolhendo $\delta = \varepsilon$ temos o resultado desejado. ■

Exemplo 2.3 Mostre que $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

Solução Nesse caso basta escolher $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ para termos que se $x > \delta > 0$ então $x^2 > \varepsilon$. ■

2.4 Proposição 2.

- Se $f(x) > g(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ então $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.
- Se $f(x) < g(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ então $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- Se $f(x) > 0$ e $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ então $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.
- Se $f(x) < 0$ e $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ então $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.
- Se $f(x) \neq 0$ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ então $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Exemplos 5. *Como corolário do teorema anterior, temos os seguintes limites, que são facilmente obtidos através de comparação com uma das funções x e ou $-x$.*

1. *Dado $c > 0$ então $\lim_{x\to\infty} c^x = \infty$.*
2. *Dado $k \in \mathbb{N}^*$ então $\lim_{x\to\infty} x^k = \infty$.*
3. *Dado $k \in \mathbb{N}^*$ ímpar então $\lim_{x\to-\infty} x^k = -\infty$.*
4. *Dado $k \in \mathbb{N}^*$ par então $\lim_{x\to-\infty} x^k = \infty$.*

2.2.1 Propriedades do Limite Infinito e no Infinito

O limite infinito possui as seguintes propriedades algébricas:

2.6 Proposição 2. : Propriedades Aditivas do Limite Infinito

Sejam $f(x), g(x), h(x)$ e $m(x)$ funções, tais que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} h(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a} m(x) = -\infty$$

e seja $n(x)$ uma função limitada. Então:

1. $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \infty.$
2. $\lim_{x\to a} (f(x) - h(x)) = \infty.$
3. $\lim_{x\to a} (f(x) + n(x)) = \infty.$
4. $\lim_{x\to a} (h(x) + n(x)) = -\infty.$
5. $\lim_{x\to a} (h(x) + m(x)) = -\infty.$
6. $\lim_{x\to a} (h(x) - f(x)) = -\infty.$

2.7 Proposição 2. : Propriedades Multiplicativas do Limite Infinito

Seja c um número real e $f(x), g(x), h(x), m(x), n(x)$ e $p(x)$ funções , tais que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} h(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a} m(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a} n(x) = L_1 > 0 \qquad \lim_{x\to a} p(x) = L_2 < 0$$

Então:

1. $\lim_{x\to a} n(x)f(x) = \infty$
2. $\lim_{x\to a} p(x)f(x) = -\infty$
3. $\lim_{x\to a} n(x)h(x) = -\infty$
4. $\lim_{x\to a} p(x)h(x) = \infty$
5. $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \infty$
6. $\lim_{x\to a} f(x) \cdot h(x) = -\infty$
7. $\lim_{x\to a} h(x) \cdot m(x) = \infty$

As propriedades anteriores permanecem válidas se trocamos o limite no ponto a por limites laterais ou por limites infinitos.

2.8 Proposição 2. : Propriedades do Limite no Infinito

Seja c um número real e f e g duas funções reais tais que $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = B$. Então:

1. $\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = A + B.$
2. $\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = A - B.$
3. $\lim_{x\to\infty} (f(x) \cdot g(x)) = AB.$
4. $\lim_{x\to\infty} (cf(x)) = cA.$
5. Se $B \neq 0$ então $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}.$
6. $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = |A|.$
7. $\lim_{x\to\infty} (f(x)^n) = A^n$
8. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$

Quando tivermos $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ com $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ dizemos que temos uma **indeterminação do tipo** $\frac{\infty}{\infty}$. Nesses casos para o cálculo do limite, de modo análogo as indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$, temos que realizar uma simplificação antes da utilização das propriedades do limite. As estratégias de simplificação usuais são a fatoração e a multiplicação pelo conjugado e também multiplicar ou dividir o numerador e o denominador por um termo apropriado, como ilustram os exemplos a seguir.

Exemplo 2.9 Calcule $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Solução

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}\frac{\div x^2}{\div x^2} \tag{2.1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} \tag{2.2}$$

$$\tag{2.3}$$

Como $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$, temos que $\lim_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1 = \lim_{x\to\infty} 1-\frac{1}{x^2}$ Temos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

■

Exemplo 2.10 Calcule $\lim_{x\to\infty}(2x^3-3x^2+1)$.

Solução Colocando o termo de maior grau em evidência:

$$\lim_{x\to\infty}(2x^3-3x^2+1) = x^3\lim_{x\to\infty} 2-3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3} \tag{2.4}$$

$$= \infty\cdot 2 = \infty \tag{2.5}$$

■

Exemplo 2.11 Calcule $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+1}{4x^2-2x+1}$.

Solução

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+1}{4x^2-2x+1} = \frac{x^3(2+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{x^2(4-2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \tag{2.6}$$

$$= x\frac{(2+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{(4-2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \tag{2.7}$$

$$= \infty\cdot\frac{2}{4} = \infty \tag{2.8}$$

$$\tag{2.9}$$

■

Exemplo 2.12 Mostre que $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+1}} = \frac{1}{3}$.

Solução

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+1}}\frac{\div x}{\div x} \tag{2.10}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}} \tag{2.11}$$

Como $\lim_{x\to\infty}\sqrt{9+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} 9+\frac{1}{x^2}} = 3$ então

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+1}} = \frac{1}{3}.$$

■

Exemplo 2.13 Calcule $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2-3}{2x^3-x+5}$.

Solução

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2-3}{2x^3-x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2-3}{2x^3-x+5}\frac{\div x^3}{\div x^3} \tag{2.12}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x}-3\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x^2}+5\frac{1}{x^3}} \tag{2.13}$$

$$= \frac{5}{2} \tag{2.14}$$

■

Exemplo 2.14 Calcule $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-3}{4x^4-x+2}$.

Solução

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+x-3}{4x^4-x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+x-3 \div x^4}{4x^4-x+2 \div x^4} \tag{2.15}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-3\frac{1}{x^4}}{4-\frac{1}{x^3}+2\frac{1}{x^4}} \tag{2.16}$$

$$= 0 \tag{2.17}$$

■

2.3 O Número e e as Funções Exponencial e Logaritmo

O próximo limite é conhecido como Limite Exponencial Fundamental é a base dos logaritmos naturais ou neperianos.

2.1 Teorema 3. : Segundo Limite Fundamental

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

onde $e \approx 2,71828$ é a constante de Euler.

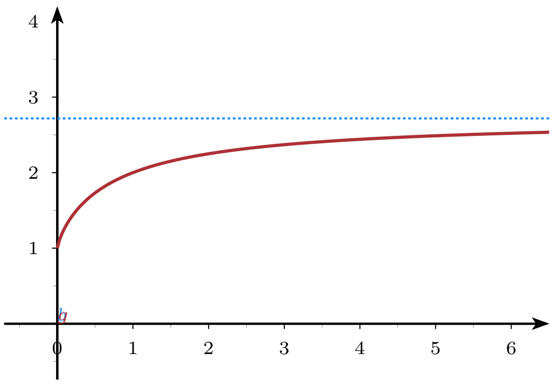


Figura 2.4 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Exemplo 2.2 Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$.

Solução Fazemos a mudança de variável $t = \dfrac{x}{5}$ temos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5t} \tag{2.18}$$

$$= \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{5} \tag{2.19}$$

$$= e^{5} \tag{2.20}$$

■

Exemplo 2.3 Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$.

Solução Dividindo o numerador e o denominador por x temos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^{x} \tag{2.21}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} \tag{2.22}$$

$$= e^{-1} \tag{2.23}$$

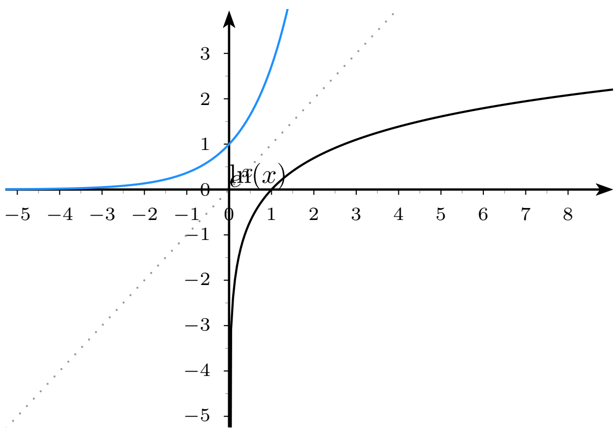
■

2.4 Definição 3.

O logaritmo de base e é denominado **função logaritmo natural** ou simplesmente **logaritmo**. Assim pelos fatos apresentados na seção **??**, a função logaritmo é a função $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada pela regra

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^{y} = x$$

O gráfico da função logaritmo natural está representado abaixo:



2.5 Teorema 3. : Continuidade das Funções Exponencial e Logaritmo

As funções $f(x) = c^x$ e $f(x) = \log_c(x)$ são contínuas.

Como a função e^x é contínua e crescente, pelo Teorema 3.6 a sua função inversa $\ln(x) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínua em todo o seu domínio.

2.6 Teorema 3. : Terceiro Limite Fundamental

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Demonstração. Fazendo a substituição $u = a^h - 1$ temos que $h = \log_a(1+u) = \dfrac{\ln(1+u)}{\ln a}$ e assim:

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{u}{\ln(u+1)\cdot \ln a} = \frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}} \cdot \ln a.$$

Quando $h \to 0$, $u \to 0$, e assim

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}} \cdot \ln a = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a.$$

∎

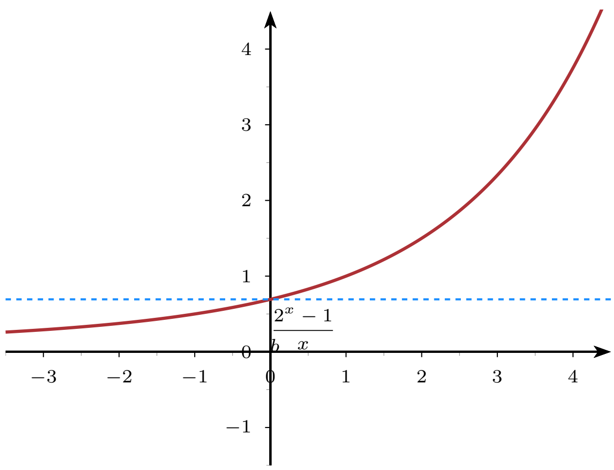


Figura 2.5 $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{x} = \ln 2.$

Exemplo 2.7 Calcule o limite $\lim_{x\to 2} \dfrac{3^{\frac{x-2}{5}} - 1}{x - 2}$.

Solução Fazendo a troca de variáveis $t = \dfrac{x-2}{5}$ temos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3^{\frac{x-2}{5}} - 1}{x-2} = \lim_{t\to 0} \frac{3^t - 1}{5t} \tag{2.24}$$
$$= \frac{\ln 3}{5} \tag{2.25}$$

■

2.3.1 Juro Composto

Suponha que façamos um investimento de capital inicial C, uma taxa de juros anual de r quanto dinheiro vamos ter decorrido k anos? Resposta: isso depende de como os juros são pagos. Se for utilizado *juros simples* o total de juros será aplicado ao final investimento, de modo que o acréscimo total produzido pelos juros é Crk, e o capital final será igual $C(1+rk)$. No entanto, o mais comum é que os juros sejam pagos em períodos mais curtos de tempo. Dessa forma cada vez que esses interesses são pagos eles aumentam o capital inicial e produzirão, por sua vez, mais capital quando novos interesses forem pagos. Isto é conhecido como *juros compostos*. Por exemplo, se os juros são pagos n vezes por ano (Trimestral (n = 4), mensal ($n = 12$), etc). No final do primeiro período, teremos $C(1+r/N)$, final do segundo $C(1+r/n)^2$; no final do exercício $C(1+r/n)^n$, fim do k ésimo ano teremos $C(1+r/n)n^{nk}$. Quando n é grande, o número $(1+r/n)^n$ é aproximadamente igual a e^r. Precisamente, se os juros são aplicados acumulam, instantaneamente ao capital o que conhecido como *compostos continuamente*, em seguida, o capital no final do k ésimo ano é dado pela Ce^{rk}.

2.3.2 Crescimento demográfico

Se denotarmos por P_0 a a população mundial atual, e por λ a taxa anual de crescimento, a qual suporemos que se mantém constante. Denotaremos por $P(t)$ a população mundial passados t anos. Passado um ano, temos que a população mundial será

$$P(1) \approxeq P_0 + \lambda P_0 = (1+\lambda)P_0.$$

Utilizamos o sinal de aproximação $\approxeq$ e não o $=$ porque calculamos o crescimento da população λP_0 como se esta fosse constantemente igual a P_0 em todo o ano, o que não é correto. Obteríamos um resultado mais exato se consideramos o crescimento da população mensalmente. Como a taxa de crescimento mensual é $\lambda/12$, passado um mês a população será $(1+\frac{\lambda}{12})P_0$, e passados doze meses

$$P(1) \approxeq \left(1+\frac{\lambda}{12}\right)^{12} P_0.$$

O cálculo segue sendo aproximado, pois a população cresce continuamente. Para obter uma melhor aproximação poderíamos considerar dias em vez de meses. Em general, se dividimos o ano em n períodos, obteríamos como aproximação:

$$P(1) \approxeq \left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{n} P_0$$

Quanto maior seja n menor será o erro que cometemos. Se fazemos que n cresça indefinidamente, então o número $\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{n}$ se converte em e^{λ}, pelo que $P(1) = e^{\lambda}P_0$. Se o período de tempo é de t anos, então $P(t) = P_0 e^{\lambda t}$. Observa que tanto o juro composto contínuo como o crescimento demográfico são, matematicamente, o mesmo. Em ambos casos o que temos é uma magnitude que se incrementa de forma proporcional a sua quantidade em cada momento. Outro processo que entra nesta descrição é o decaimento radioativo, a única diferencia é que a masa de matéria radioativa vá diminuindo, ou seja, que a constante de proporcionalidade é negativa.

Parte II

Derivadas

Capítulo 3

Derivadas

Neste capítulo vamos desenvolver o conceito de derivada, que descreve a reta tangente à uma curva, bem como serve de ferramenta para descrever as taxas de variação de uma grandeza em relação a outra. Este capítulo começa descrevendo a derivada como reta tangente e utilizando esse conceito na compreensão de velocidades. Uma das realizações fundamentais do cálculo foi a capacidade de descrever movimentos contínuos matematicamente. Depois apresentaremos um conjunto de propriedades das derivadas, o que nos capacitará a derivar efetivamente.

Neste capítulo:

3.1 Motivações

3.1.1 O Problema da Reta Tangente

Dica
Semana 1

Uma das ideias centrais do cálculo diferencial é a noção de derivada. O surgimento do conceito de derivada foi motivado por um problema de geometria: encontrar a reta tangente a um ponto de uma curva. O conceito de derivada não foi formulado até o início do século XVII, quando o matemático francês Pierre de Fermat, tentou determinar máximos e mínimos de determinadas funções especiais. A ideia de Fermat pode ser entendida se nos referirmos à curva na Figura 3.1. Suponha que cada ponto desta curva tem uma direção definida de que pode ser descrito por uma reta tangente. Algumas destas retas tangentes são indicadas por linhas em vermelho na figura. Fermat observou que nos pontos nos quais a curva tem um máximo ou mínimo, tais como os destacados na figura, a reta tangente deve ser horizontal. Assim, o problema de localizar tais valores extremos foi reduzido a resolver outro problema, o de localizar as tangentes horizontais. Isso nos leva a questão mais geral de determinação da direção da tangente num ponto arbitrário da curva. Foi a tentativa de resolver este problema em sua generalidade que levou Fermat a descobrir algumas das ideias rudimentares subjacentes à noção de derivada. Embora o conceito de derivada tenha

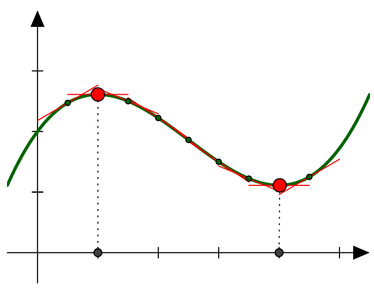
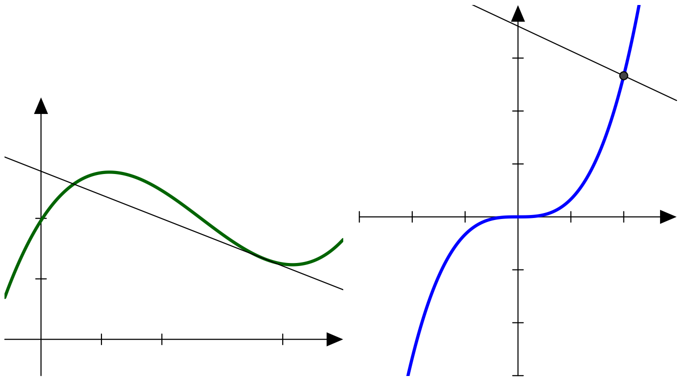


Figura 3.1 Retas tangentes em vários pontos e o máximo e mínimo de uma função.



(a) (b)

sido originalmente formulado para estudar o problema das tangentes, logo descobriu-se que ele também fornece uma maneira de calcular a velocidade e, mais geralmente, a taxa de variação de uma função. Vamos começar a colocar matematicamente o problema da reta tangente. Nesse problema temos uma função f e um ponto P no gráfico de f e queremos determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P, como mostra a Figura 3.2. Uma primeira tentativa de definir a reta tangente à curva no ponto seria como a reta que toca a curva apenas nesse ponto, como é usual definirmos no caso de retas tangentes a círculos. Mas essa definição não se mostra correta como as imagens subsequentes irá convencê-lo. Na Figura 3.3a a reta que gostaríamos de denominar de tangente corta a curva em outro mais de um ponto. Na Figura 3.3b, vemos que a reta desenhada corta o gráfico em um único ponto, mas com certeza essa não é a reta que queremos chamar de reta tangente. Destacamos que essas dificuldades não podem ser contornadas facilmente e temos que desistir da idéia de definir a tangente a partir do conceito de "tocar a curva em só em um ponto", e procurar uma outra idéia. Para isso começamos observando que exceto nos pontos nos quais a reta tangente é vertical, o problema de encontrar reta tangente no ponto P se resume ao problema de determinar a inclinação da reta tangente à f no ponto P, i.e., o coeficiente angular da reta tangente. Um modo de atacar esse problema é aproximar o coeficiente angular da reta tangente utilizando retas que passam pelo ponto P e por um segundo ponto, que denotaremos por Q. Ou seja, aproximando o coeficiente da reta tangente a P pelo coeficiente da reta secante por P e Q. Se considerarmos que o ponto P tenha coordenadas $P : (x, f(x))$ e que o ponto Q tenha coordenadas $Q : (x+h, f(x+h))$, então o coeficiente angular da reta secante é dado por:

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Conforme o ponto Q se aproxima do ponto P temos que a inclinação da reta secante por P e Q se aproxima da inclinação da reta tangente

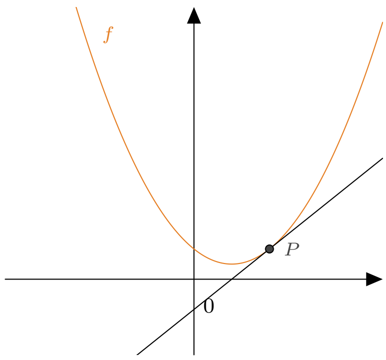


Figura 3.2 Reta tangente a função f no ponto P.

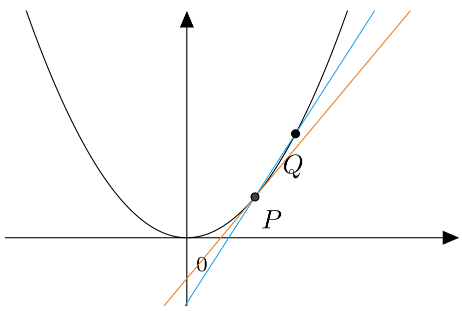


Figura 3.4 Reta secante por P e Q e a reta tangente por P.

a f no ponto P e no "limite" é igual a inclinação. Assim temos:

$$m := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

O limite anterior se existir, é denominado de derivada da função f no ponto x.

3.1 Definição 1.

- Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a. A **inclinação da reta tangente** ao gráfico de f no ponto $(a, f(a)$ é dada por

  $$m := f'(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  desde que o limite exista.

- A equação da reta tangente f no ponto $(a, f(a)$ é dada por

  $$y - f(a) = f'(a)(x - 1)$$

  desde que $f'(a)$ exista.

Exemplo 3.2 Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (a, a^2).

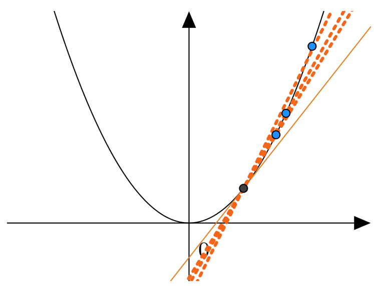


Figura 3.5 Conforme o ponto Q se aproxima de P as retas secantes se aproximam da reta tangente.

Solução A inclinação da reta tangente no ponto a é dada pelo limite:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

e logo

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2a + h}{h} \\ &= 2a \end{aligned}$$

Assim a inclinação da reta tangente no ponto a é $2a$. ■

3.1.2 O Problema da Velocidade

Suponha uma partícula que se move em linha reta e cuja posição em função de t é dada pela função $s(t)$. A a velocidade média no intervalo

$[t_0, t_0 + \Delta t]$ é dada por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Podemos aproximar a velocidade instantânea no tempo t, como a velocidade média no intervalo $[t_0, t_0 + \Delta t]$ tomando valores de Δt suficientemente pequenos. A velocidade instantânea será o limite, quando $\Delta t \to 0$, das velocidades médias da partícula entre os instantes t_0 e $t_0 + \Delta t$. Ou seja, temos a seguinte definição:

3.3 **Definição 1.**

Se um ponto se move sobre a reta l tal que sua posição é descrita por $s(t)$, então a **velocidade instantânea** em t_0 é dada por:

$$v := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

desde que o limite exista.

Exemplo 3.4 Se a posição de uma partícula é dada por $f(t) = t^2 - 5t$, onde $f(t)$ é medido em metros e t em segundos. Determine a velocidade no instante a. Qual a velocidade no instante $t = 0$? E em $t = 4$?. Determine os intervalos de tempo que a partícula se move para a direita e para a esquerda. Em que instantes a velocidade é 0?

Solução A velocidade no instante a é dada por

$$\begin{aligned}
v &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(a + \Delta t) - f(a)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(a + \Delta t)^2 - 5(a + \Delta t) - a^2 + 5a}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a^2 + 2a\Delta t + (\Delta t)^2 - 5a - 5\Delta t - a^2 + 5a}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2a\Delta t + (\Delta t)^2 - 5\Delta t}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} 2a + \Delta t - 5 \\
&= 2a - 5
\end{aligned}$$

Logo a velocidade no instante a, $v(a)$ é dada por $v(a) = 2a - 5$. A velocidade no instante $t = 0$ é dada por $v(0) = -5m/s$ e no instante $t = 4$ é dada por $v(4) = 3m/s$. Para determinarmos os instantes de tempo em que a partícula se move para a direita, temos que determinar os instantes de tempo nos quais a velocidade é positiva. Ou seja, queremos resolver:]

$$2a - 5 > 0 \text{ e logo } a > 5/2$$

De modo análogo, para determinarmos os instantes de tempo em que a partícula se move para a esquerda, temos que determinar os instantes de tempo nos quais a velocidade é positiva. Ou seja, queremos resolver:

$$2a - 5 < 0 \text{ e logo } a < 5/2$$

Para determinarmos os instantes em que a velocidade é zero temos que resolver $2a - 5 = 0$ e logo $a = 5/2$. ■

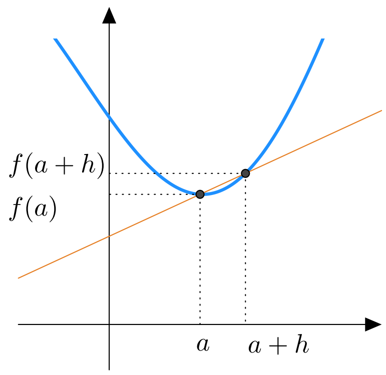
3.2 Definição de Derivada

3.1 Definição 2.

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto a. Definimos a **derivada** de $f(x)$ em a, denotada como $f'(a)$, como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

se o limite existir.



O símbolo $f'(a)$ lê-se “f linha de a”. E a terminologia “f(a) existe” significa que o limite da Definição 3.2 existe.

Exemplo 3.2 Calcule a derivada de $g = \sqrt{x}$ em $x = 4$.

Solução Queremos calcular $g'(4)$. Para tanto usaremos a definição de derivada:

$$g'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{g(4+h) - g(4)}{h}$$

Como

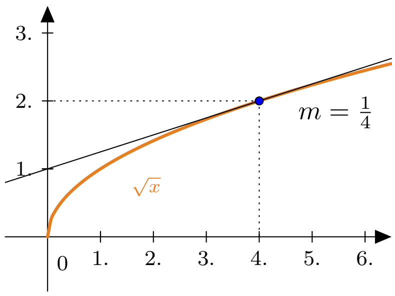
$$g(4) = 2 \text{ e } g(4+h) = \sqrt{4+h}$$

temos que

$$g'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo confugado temos:

$$\begin{aligned} g'(4) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \frac{\sqrt{4+h} + 2}{\sqrt{4+h} + 2} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4 + h - 4}{h\left(\sqrt{4+h} + 2\right)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{4+h} + 2\right)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$



■

Exemplo 3.3 Calcule a derivada de $f(x) = x$ no ponto a.

Solução A derivada se existir será dada por:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

■

3.2.1 Função Derivada

Quando existir $f'(a)$ dizemos que a função é **diferenciável** no ponto a. Se uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável em todos os pontos de seu domínio dizemos simplesmente que f é diferenciável. Se considerarmos o conjunto $S = \{a \in \operatorname{Dom} f : f'(a) \text{ existe}\}$ podemos definir a função $f' : S \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in S$ o número $f'(x)$. A função é denominada de função derivada de f ou simplesmente de derivada de f.

Exemplo 3.4 O Exemplo 3 mostra que $f(x) = x$ é diferenciável em todos os reais. Assim podemos definir a função derivada de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e nesse caso a função é constante $f'(x) = 1$.

Exemplo 3.5 Calcule a derivada de $f(x) = x^3 + x^2$. Qual o domínio de f'?

Solução Pela definição

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Como

$$\begin{aligned} f(x+h) &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x2 + 2hx + h^2 \\ f(x) &= x^3 + x^2 \end{aligned}$$

Temos que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x^2 + 2hx + h^2 - (x^3 + x^2)}{h}$$

Simplificando temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h = 3x^2 + 2x$$

Como a função f é sempre diferenciável o domínio de f' é $\mathbb{R}$. ■

Exemplo 3.6 Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule a derivada de f. Qual o domínio de f'?

Solução Pela definição

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Como

$$f(x+h) = \sqrt{x+h}$$
$$f(x) = \sqrt{x}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

O domínio de f' é o conjunto dos reais positivos. ■

3.2.2 Definição Equivalente de Derivada

Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função e seja $c \in \mathbb{R}$ Fazendo a substituição $x = c + h$ no limite e observando que $h = x - c$ e $h \to 0 \iff x \to c$. temos que

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

De posse dessa informação podemos dar uma nova definição de derivada, equivalente a anterior:

3.7 Definição 2.

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto a. Definimos a **derivada** de $f(x)$ em a, denotada como $f'(a)$, como:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

se o limite existir.

O limite $f'(c) = \lim_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ pode ser escrito de maneira abreviada usando a notação de variação como:

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Isso motiva a notação de Leibniz:

Notação 8 - Notação de Leibniz. *A derivada de f em c, $f'(c)$ é denotada, também, da seguinte maneira*

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c}$$

Já a função derivada f' denotada também do seguinte modo:

$$\frac{df}{dx}$$

A notação de Leibniz tem a vantagem de deixar claro que a derivada é o limite do quociente das variações

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Exemplo 3.9 Calcule a derivada de $f(x) = x^{1/3}$ no ponto $a \neq 0$.

Solução

$$\begin{aligned}
\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{(x^{1/3})^3 - (a^{1/3})^3}
\end{aligned}$$

Usaremos a fatoração:

$$c^3 - d^3 = (c - d)(c^2 + cd + d^2)$$

com $c = x^{1/3}$ e $d = a^{1/3}$. Logo

$$\begin{aligned}
\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} &= \lim_{x \to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{(x^{1/3} - a^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3})} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{1}{(x^{2/3} + x^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3})} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{1}{(a^{2/3} + a^{2/3} + a^{2/3})} \\
&= \frac{1}{3a^{2/3}}
\end{aligned}$$

■

3.2.3 Derivadas Laterais

Como a derivada de uma função f em um ponto a é definida como um limite, podemos calcular os limites laterais, à esquerda e à direita de a dando origem aos conceitos de derivada pela direita e pela esquerda:

3.10 Definição 2. : Derivadas Laterais

A derivada pela direita é definida como

$$f'_+(a) := \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e a derivada pela esquerda é definida como

$$f'_-(a) := \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Claramente uma função é diferenciável no ponto a se e somente se existem $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$ e $f'_-(a) = f'_+(a)$.

Exemplo 3.11 Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Mostre que existe $f'(0)$.

Solução A derivada $f'(0)$ se existir é dada pelo limite:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}_{\text{limitado}} \\ &= 0 \text{ (pelo Teorema do Confronto)} \end{aligned}$$

Logo $f'(0)$ existe e $f'(0) = 0$. ■

Exemplo 3.12 Mostre que a função $f(x) = |x|$ não é diferenciável no 0.

Solução Vamos calcular as derivadas laterais e ver que são diferentes: Calculando a derivada pela direita

$$f'_+(0) := \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} 1 = 1$$

Calculando a derivada pela esquerda

$$f'_-(0) := \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x}$$

$$f'_-(0) := \lim_{x \to 0-} -1 = -1$$

Como as derivadas laterais são diferentes a derivada não existe. ■

Este exemplo mostra que a continuidade de uma função em um ponto não garante a existência da derivada da função neste mesmo ponto, mas a recíproca é verdadeira, isto é, a existência da derivada de f em um ponto, implica na continuidade de f neste ponto.

3.13 Teorema 2.

Se f é diferenciável no ponto x então f é continua em x. Equivalentemente, se f não é continua em x então f não é diferenciável em x.

Demonstração. Como f é diferenciável em x temos que

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x).$$

Então

$$\lim_{y \to x} [f(y) - f(x)] = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \lim_{y \to x} (y - x) = f'(x)\, 0 = 0$$

Assim, $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$, logo f é contínua em x. ■

Exemplo 3.14 Determine a e b de modo que $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ ax + b & x \geq 1 \end{cases}$ seja diferenciável em todos os pontos.

Solução A função $f(x)$ é diferenciável em $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ pois é uma função quadrática no primeiro intervalo e uma função linear no segundo e essas funções são diferenciáveis em todos os pontos do domínio

Logo precisamos apenas escolher a, b de modo que a função seja diferenciável em $x = 1$. Para isso as derivadas laterais devem existir e serem iguais.

Calculando as derivadas laterais:

$$\begin{aligned} f'_+(1) := & \lim_{x \to 1+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \\ & \lim_{x \to 1+} \frac{ax + b - a - b}{x - 1} \\ & a \end{aligned}$$

$$f'_-(1) := \lim_{x\to 1-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^2-a-b}{x-1}$$

Para que esse limite exista precisamos que $-a-b=-1$ e dessa forma

$$f'_-(1) \lim_{x\to 1+} \frac{x^2-a-b}{x-1}$$
$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^2-1}{x-1}$$
$$\lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$
$$= 2$$

Para que a função seja diferenciável $f'_+(1) = f'_-(1)$ e assim $a = 2$ e como $-a-b=-1$ temos que $b=-1$.

É interessante observar que para esses valores de a, b a função será contínua em $x=1$. ■

Exercícios

Ex. 3.1 — Para as seguintes funções calcule a derivada no ponto indicado através do limite do quociente de Newton:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

1. derivada de $f(x) = x$ no ponto $a = 0$
2. derivada de $f(x) = x^2+1$ no ponto $a = 1$
3. derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $a = 1$
4. derivada de $f(x) = 3x^3 - x$ no ponto $a = 2$
5. derivada de $f(x) = x^3$ no ponto $a = -1$
6. derivada de $f(x) = x^4$ no ponto $a = 0$
7. derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $a = 4$
8. derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $a = 8$
9. derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $a = 1$
10. derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $a = -1$

Ex. 3.2 — Mostre $\frac{d}{dx}a^x = \ln(a)a^x$. (Use que $\frac{d}{dx}e^x = e^x$).

Ex. 3.3 — Determine a, b reais de modo que a função $f(x) = \begin{cases} x^2+2x & x<1 \\ ax+b & x \geq 1 \end{cases}$ seja diferenciável em todos os pontos.

3.3 Derivadas das Funções Clássicas

No próximo teorema apresentaremos as derivadas das principais funções. De posse do conhecimento dessas derivadas e das regras de derivação apresentadas na próxima seção seremos capazes de derivar uma ampla família de funções.

3.1 Teorema 3. : Fórmulas de Derivação

São válidas as seguintes fórmulas de derivação

a) Se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$,

b) Se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = n\,x^{n-1}$ para todo n inteiro positivo,

c) Se $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ então $f'(x) = \dfrac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}$ para todo n inteiro positivo,

d) Se $f(x) = \operatorname{sen} x$ então $f'(x) = \cos x$,

e) Se $f(x) = \cos x$ então $f'(x) = -\operatorname{sen} x$,

f) Se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$,

g) Se $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$.

Demonstração. Começaremos demonstrando o item a. Nesse caso

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Faremos duas demonstrações do item b. A primeira demonstração se baseia na seguinte fatoração:

$$y^n - x^n = (y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Então,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y\to x} \frac{y^n - x^n}{y - x} \\
f'(x) &= \lim_{y\to x} \frac{(y-x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1})}{y-x} \\
&= \lim_{y\to x} (y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}) \\
&= x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1} \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}
$$

A segunda demonstração se baseia no Binômio de Newton

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)x^{n-2}h^2}{1\cdot 2} + \cdots + h^n\right) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{(n)(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{(n)(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}h^1 + \cdots + h^{n-1}\right) \\
&= nx^{n-1} + 0 + \cdots + 0 \\
&= nx^{n-1},
\end{aligned}
$$

Demonstração do item $\boxed{c}$. Fazendo a substituição $u = \sqrt[n]{y}$ e $v = \sqrt[n]{x}$ temos que quando $y \to x$, $u \to v$. Assim

$$
f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{y - x} = \lim_{u\to v} \frac{u - v}{u^n - v^n} = \lim_{u\to v} \frac{1}{\dfrac{u^n - v^n}{u - v}}
$$

Usando o item anterior, temos finalmente que

$$
= \frac{1}{nv^{n-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.
$$

Demonstração do item $\boxed{d}$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{y\to x} \frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{y - x} \\
&= \lim_{y\to x} \frac{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{y-x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{y+x}{2}\right)}{y-x} \\
&= \lim_{y\to x} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{y-x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{y+x}{2}\right)}{\dfrac{y-x}{2}} \\
&= \lim_{y\to x} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{y-x}{2}\right)}{\dfrac{y-x}{2}} \lim_{y\to x} \cos\left(\dfrac{y+x}{2}\right)
\end{aligned}
$$

O primeiro limite pode ser calculado fazendo a substituição $h = (y - x)/2$ e assim quando $y \to x$ temos que $h \to 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \lim_{y\to x} \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

No limite acima usamos o Primeiro Limite Fundamental apresentado na Seção **??**,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1.$$

Demonstração do item $\boxed{e}$. A demonstração da derivada do cosseno pode ser feita de maneira análoga ao item anterior usando a identidade soma-produto. Uma segunda forma de demonstrar ambos os limites trigonométricos é a seguinte, usando apenas a fórmula da adição do cosseno e do seno:

$$\frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}\right).$$

Usando a fórmula da adição para o cosseno:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

temos

$$\frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\cos h - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} h - \cos x}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{\cos h - 1}{h}\cos x\right) - \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\operatorname{sen} x\right)\right].$$

E assim

$$\frac{d}{dx}\cos x = (0\cdot\cos x) - (1\cdot\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x$$

Demonstração do item $\boxed{f}$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

No cálculo do limite acima usamos o Terceiro Limite Fundamental apresentado na Seção **??**,

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Demonstração do item $\boxed{g}$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right).$$

Fazendo $u = \dfrac{h}{x}$ temos que para $h \to 0$, $u \to 0$, assim

$$\lim_{h\to 0}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x},$$

na última igualdade usamos o Segundo Limite Fundamental, $\lim_{u\to 0}(1 + u)^{\frac{1}{u}} = e$. ■

3.4 Regras de Derivação

3.1 **Teorema 4. :** Derivada da Soma e Subtração

Se f e g são funções diferenciáveis em $x = a$ então a função $f \pm g$ é diferenciável em a e

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a).$$

Demonstração. Faremos a demonstração do caso da soma. O caso da subtração é similar. Seja $h(x) = f(x) + g(x)$, e suponha que f e g são ambas diferenciáveis em x. Queremos provar que h é diferenciável em x e que sua derivada $h'(x)$ é dada por $f'(x) + g'(x)$.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{h(x+t) - h(x)}{t} && (3.1)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{[f(x+t) + g(x+t)] - [f(x) + g(x)]}{t} && (3.2)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x) + g(x+t) - g(x)}{t} && (3.3)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} && (3.4)\\
&= f'(x) + g'(x). && (3.5)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.2 Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x^5} + \sqrt[5]{x^3}$

Solução

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[5]{x^3}\right] &= \frac{d}{dx}\sqrt[3]{x^5} + \frac{d}{dx}\sqrt[5]{x^3}\\
&= \frac{d}{dx}x^{5/3} + \frac{d}{dx}x^{3/5}\\
&= \frac{5}{3}x^{5/3-1} + \frac{3}{5}x^{3/5-1}\\
&= \frac{5}{3}x^{2/3} + \frac{3}{5}x^{-2/5}\\
&= \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3} + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.3 Calcule a equação reta tangente a $f(x) = x^4 + \sqrt{x}$ no ponto $x = 1$.

Solução Começaremos calculando o coeficiente angular $m = f'(1)$. Para calcularmos a derivada utilizaremos a propriedade da Derivada da Soma:

$$f'(x) = 4x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Calculando em $x = 1$:

$$f'(1) = 4 + \frac{1}{2}$$

e logo $f'(1) = \frac{9}{2}$ A reta tangente passa pelo ponto $(1, f(1)) = (1, 2)$ e tem coeficiente angular $\frac{9}{2}$, logo sua equação é:

$$y - 2 = \frac{9}{2}(x - 1)$$

■

3.4 **Teorema 4. : Derivada do Produto por uma Constante**

Se f é uma função diferenciável em x e $c \in \mathbb{R}$ então a função cf é diferenciável em x e

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

Demonstração. Seja $h(x) = cf(x)$. Queremos provar que h é diferenciável em x e que sua derivada $h'(x)$ é dada por $f'(x) + g'(x)$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{t \to 0} \frac{h(x+t) - h(x)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{cf(x+t) - cf(x)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{c[f(x+t) - f(x)]}{t} \\ &= c \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \\ &= cf'(x). \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.5 Calcule a derivada de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$

Solução

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[2x^3 - 9x^2 + 12x + 4\right] &= \frac{d}{dx}2x^3 - \frac{d}{dx}9x^2 + \frac{d}{dx}12x + \frac{d}{dx}4 \\ &= 2\frac{d}{dx}x^3 - 9\frac{d}{dx}x^2 + 12\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}4 \\ &= 6x^2 - 18x + 12 \end{aligned}$$

■

3.6 Teorema 4. : Derivada do Produto

Se f e g são funções diferenciáveis em x então a função $f \cdot g$ é diferenciável em x e

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Demonstração. Seja $m(x) = f(x)g(x)$, e suponha que f e g são ambas diferenciáveis em x. Queremos provar que h é diferenciável em x e que a derivada $m'(x)$ é dada por $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

$$\begin{aligned}
m'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h) - m(h)}{h} &\quad (3.6)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &\quad (3.7)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &\quad (3.8)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] \cdot g(x+h) + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h} &\quad (3.9)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &\quad (3.10)\\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) &\quad (3.11)
\end{aligned}$$

■

Como consequência do teorema anterior temos que em todos os pontos onde $f(x)$ e $g(x)$ são diferenciáveis temos que

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Exemplo 3.7 Derive $f(x) = x \operatorname{sen} x$

Solução Utilizando a fórmula da derivada do produto temos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1. \operatorname{sen} x + x \cos x\\
&= \operatorname{sen} x + x \cos x
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.8 Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt[3]{(x^2)}(x^2 + x)$.

Exemplo 3.9 Calcule a derivada de $g(x) = e^x \sqrt{x}$

Solução Utilizando a fórmula da derivada do produto temos:

$$
\begin{aligned}
f'(c) &= e^x.\sqrt{x} + e^x \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= \operatorname{sen} x + x \cos x
\end{aligned}
$$

■

 **Teorema 4. : Derivada do Quociente**

Se f e g são funções diferenciáveis em $x = a$ com $g(a) \neq 0$, então a função $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a com

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Demonstração. Considere a função $m = \frac{f}{g}$. Como $g(a) \neq 0$ e g é contínua, existe $\epsilon > 0$ tal que $|h| < \epsilon \implies g(a+h) \neq 0$. Ou seja, a função m está definida numa vizinhança de a. Pela definição de derivada temos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{m(a+h) - m(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right) \tag{3.12}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a) - f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right) \tag{3.13}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a) - f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right) \tag{3.14}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)}}_{\text{Limite 1}} \cdot \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\text{Limite 2}} g(a) - f(a) \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}_{\text{Limite 3}} \tag{3.15}$$

O Limite 1 pode ser calculado pela continuidade de g em a

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a+h)g(a)} = \frac{1}{g(a)^2}$$

Os Limites 2 e 3 são as definições das derivadas de f e g em a, ou seja:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = g'(a)$$

Logo: $\lim_{h\to 0} \frac{m(a+h)-m(a)}{h} = \frac{1}{g(a)^2}\left(f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\right)$ ■

3.11 **Proposição 4.**

Se $x \neq 0$ e $f(x) = x^{-n}$ então $f'(x) = -n\, x^{-n-1}$ para todo n inteiro positivo.

Demonstração. $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ e logo $f'(x) = \dfrac{-n\, x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\, x^{-n-1}$. ■

Exemplo 3.12 Calcule a derivada de $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x + 1}$.

Solução Então, se $x \neq -1$ temos que

$$f'(x) = \frac{(4x-1)(x+1) - \left(2x^2 - x + 1\right)}{(x+1)^2}.$$

Temos que, para todo $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{2\left(x^2 + 2x - 1\right)}{(x+1)^2}.$$

■

Exemplo 3.13 Calcule a derivada de $\dfrac{4x-2}{x^2+1}$.

Solução

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{(4x-2)}{x^2+1}\right] &= \frac{(4)(x^2+1) - (4x-2)(2x)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{(4x^2+4) - (8x^2-4x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2+4x+4}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.14 Calcule a derivada de $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

Solução

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1) - \sqrt{x}2x}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{\dfrac{x^2+1-4x^2}{2\sqrt{x}}}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{-3x^2+12\sqrt{x}}{(x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.15 Calcule a derivada de $\operatorname{tg} x$

Solução Como $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, usando a regra do quociente temos:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \frac{d}{dx} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \tag{3.16}$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x} \tag{3.17}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \tag{3.18}$$

$$\tag{3.19}$$

■

Exemplo 3.16 Encontre todos os pontos no gráfico de $y = x^3 - 3x$, onde a reta tangente é horizontal.

Solução A inclinação de uma reta tangente ao gráfico de $y = x^3 - 3x$ é dada pela derivada

$$y' = 3x^2 - 3$$

Como as retas que são paralelas ao eixo dos x tem inclinação angular 0, nós agora encontraremos todos os valores de x para os quais $y' = 0$. Para isso resolveremos a equação

$$3x^2 - 3 = 0$$

E assim

$$x = -1 \text{ e } x = 1$$

Os valores acima são as coordenadas x dos pontos em que as linhas tangentes são paralelos ao eixo x. Encontraremos as coordenadas y destes pontos usando que $y = x^3 - 3x$. Assim, para $x = -1, y = 2$ e para $x = 1, y = -2$ Logo os pontos em que as linhas tangentes são paralelas ao eixo x, são: $(-1, 2)$ e $(1, -2)$. ■

Exercícios

Ex. 3.4 — Escreva a equação da reta tangente as curvas $y = f(x)$ no ponto especificado. Esboce o gráfico de $f(x)$ e da reta tangente.

1. $y = x^3$ no ponto $x = 3$
2. $y = x^7 + 3x$ no ponto $x = 1$
3. $y = \frac{1}{x-1}$ no ponto $(-1, -\frac{1}{2})$
4. $y = \operatorname{sen}(x)$ no ponto $x = \pi$

5. $y = 2^x$ no ponto $x = 2$

6. $y = \cos(x) + x^2$ no ponto $x = 0$

Ex. 3.5 — Encontre as derivadas das seguintes funções:

1. $f(x) = 3x^4 + 5x + 8$

2. $f(x) = x^7 + 6x^6 + \frac{1}{5}x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 + \pi$

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$

4. $f(x) = ax^m + bx^{m+n}$

5. $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \frac{\ln(4)}{x} + \sqrt{5}x + \ln(7)$

6. $f(x) = \frac{2}{5x-3} - \frac{1}{x}$

7. $f(x) = x^{\frac{a}{2}} + x^{\frac{a+4}{2}} + ax^{a-1}$

8. $f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x^2}}$

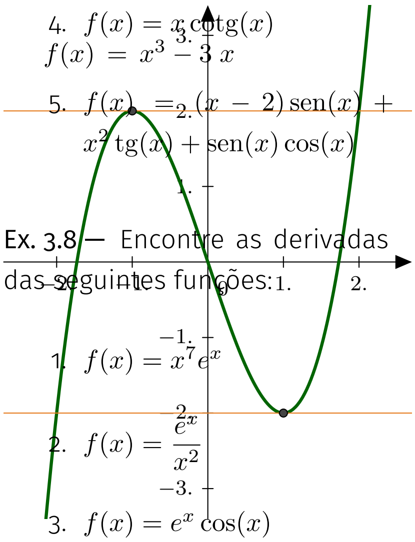
Ex. 3.6 — Quantas retas tangentes a curva $y = \frac{x}{x+1}$ passam pelo ponto $(1, 2)$. Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

Ex. 3.7 — Encontre as derivadas das seguintes funções:

1. $f(x) = 5\,\mathrm{sen}(x) + 6\cos(x)$

2. $f(x) = \mathrm{tg}(x) - \mathrm{cotg}(x)$

3. $f(x) = \frac{\mathrm{sen}(x) + \cos(x)}{\mathrm{sen}(x) - \cos(x)}$



4. $f(x) = x\,\mathrm{cotg}(x)$

5. $f(x) = (x-2)\,\mathrm{sen}(x) + x^2\,\mathrm{tg}(x) + \mathrm{sen}(x)\cos(x)$

Ex. 3.8 — Encontre as derivadas das seguintes funções:

1. $f(x) = x^7 e^x$

2. $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

3. $f(x) = e^x \cos(x)$

4. $f(x) = \frac{x^n}{\ln(x)}$

5. $f(x) = x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{3}$

6. $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x + 5^x + 6^x + 7^x$

7. $f(x) = \pi^x + 3^x x + 4^x \cos(x)$

8. $f(x) = \log_2(x) + \log_3(x) + \log_4(x)$

9. $f(x) = 2^x \log_3(x)$

Ex. 3.9 — Em que ponto a tangente a parábola $y = x^2 - 7x + 3$ é paralela a reta $5x + y - 3 = 0$.

Ex. 3.10 — Achar a equação da tangente e da normal a curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $(1, -4)$.

Ex. 3.11 — Achar a equação da tangente e da normal a curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $(-2, 5)$.

Ex. 3.12 — Dado $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Encontre os pontos do gráfico de f nos quais a tangente é horizontal.

Ex. 3.13 — Dado o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Determine a, b, c, d se $p(0) = p(1) = -2$ $p'(0) = -1$ e $p''(0) = 10$.

Ex. 3.14 — Seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \leq c \\ ax + b \text{ se } x > c \end{cases}$$

Ache os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

Ex. 3.15 — Seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) \text{ se } x \leq c \\ ax + b \text{ se } x > c \end{cases}$$

Ache os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

Ex. 3.16 — Dado $c > 0$, seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} \text{ se } |x| > c \\ a + bx^2 \text{ se } |x| < c \end{cases}$$

Ache os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

3.5 A Regra da Cadeia

Dica
Semana 2

A Regra da Cadeia nos fornece uma fórmula para determinar a derivada de uma função composta $h = m \circ g$ em termos das derivadas de f e g.

3.1 **Teorema 5. : Regra da Cadeia**

Sejam $f(x)$ e $g(t)$ funções diferenciáveis com $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Dom} f$. Então $h = f \circ g$ é diferenciável e sua derivada é dada por

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t), \quad \text{para todo } t \in \operatorname{Dom} g. \tag{3.20}$$

Demonstração. Faremos a demonstração apenas no caso no qual $g(t) \neq g(t_0)$, num intervalo aberto contendo t_0. Considere $h = f \circ g$ então,

$$h'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{g(t) - g(t_0)} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$$
$$= f'(g(t_0))g'(t_0).$$

■

Notação 2. *Nas condições do Teorema 3.5 fazendo as substituições:*

$$\begin{cases} y = f(x) & \text{então } \& \dfrac{dy}{dx} = f'(x) = f'(g(t)) \\ x = g(t) & \text{então } \& \dfrac{dx}{dt} = g'(t). \end{cases} \tag{3.21}$$

em (3.20), obtemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}, \quad \text{para todo } t \in \operatorname{Dom} g\,.$$

Exemplo 3.3 Calcule a derivada de $h(t) = \operatorname{sen}(t^2)$.

Solução Fazendo $g(t) = t^2$ e $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $h(t) = f(g(t))$, $g'(t) = 2t$, $f'(x) = -\cos x$. Pela Regra da Cadeia,

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t) = -\cos(t^2)2t.$$

■

Observação 4. *Observe que ao aplicar a Regra da Cadeia diferenciamos primeiro a função de fora f e avaliamos na função de dentro $g(x)$ e então multiplicamos pela derivada da função de dentro.*

$$f(g(x))' = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Derivada da função de fora calculada na de dentro}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada da função de dentro}}$$

Exemplo 3.5 Calcule a derivada de $h(t) = \ln(5t + 3)$.

Solução Fazendo $g(t) = 5t + 3$ e $f(x) = \ln x$, então $h(t) = f(g(t))$, $g'(t) = 6$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$. Pela Regra da Cadeia,

$$h'(t) = f'(g(t))g'(t) = \frac{1}{5t+3}5 = \frac{5}{5t+3}.$$

■

Exemplo 3.6 Calcule a derivada de $h(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$.

Solução Faça $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Então $h = m \circ g$. Como $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$ e $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ temos que

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = -\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

para todo $x > 0$. ■

Exemplo 3.7 Derive $g(x) = e^{\sqrt{7x+1}}$ Utilizando a regra da Cadeia podemos generalizar a regra de derivação de potências inteiras x^n, com $n \in \mathbb{N}$, para potências reais x^c, com $c \in \mathbb{R}$.

3.8 Teorema 5. : Regra da Potência

Seja c um número real e $x > 0$ então

$$(x^c)' = cx^{c-1} \text{ para todo } x > 0$$

Demonstração. Começamos notando que $x^c = e^{\ln x^c} = e^{c \ln x}$ e pela Regra da Cadeia

$$\frac{d}{dx}x^c = \frac{d}{dx}e^{c\ln x} = e^{c\ln x}\frac{d}{dx}(c\ln x) = x^c c\frac{1}{x} = cx^{c-1}.$$

Logo

$$(x^c)' = cx^{c-1} \text{ para todo } x > 0$$

■

Exemplo 3.9 Derive $(3x-7)^{\pi}$.

Solução Usando a Regra da Cadeia e da Potência temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(3x-7)^{\pi} &= \pi(3x-7)^{\pi-1}\frac{d}{dx}(3x-7)\\ &= 3\pi(3x-7)^{\pi-1}\end{aligned}$$

■

Exercícios

Ex. 3.17 — Calcule as derivadas das seguintes funções:

1. $f(x) = (2x+10)^{12}$
2. $f(t) = (3t-2)^5$
3. $g(\theta) = (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^3$
4. $h(t) = e^{3t^2+t-1}$
5. $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4$
6. $f(x) = \cos(3x)$
7. $g(x) = \operatorname{tg}(5x)$
8. $h(t) = \operatorname{sen}^4(2t)$
9. $p(t) = \cos^3(t^2+3t+1)$
10. $f(x) = \ln(\cos x)$
11. $f(x) = \ln(x^2)$
12. $f(x) = 2\ln(x)$
13. $g(r) = 4^r$
14. $g(t) = 5^{\cos t}$
15. $g(t) = 15^2$

16. $m(w) = \dfrac{3^w}{2^w}$

17. $m(w) = \dfrac{3^w + 1}{2^w}$

18. $f(x) = \dfrac{3^{x^2} + x}{2^{x^2}}$

19. $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(5x)$

20. $g(t) = \cos(t^2 + 3t)\operatorname{sen}(5t - 7)$

21. $g(t) = \cos(\frac{1}{t})e^{5t^2}$

Ex. 3.18 — Encontre as retas tangentes e normais nos pontos dados.

1. $f(x) = (4x^3 - x)^{10}$ em $x = 0$

2. $f(t) = (3t - 2)^5$ em $t = 1$

3. $g(\theta) = (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^3$ em $\theta = \pi/2$

4. $h(t) = e^{3t^2+t-1}$ em $t = -1$

Ex. 3.19 — Calcule $\frac{d}{dx}\big(\ln(kx)\big)$ de duas formas diferentes:

1. Usando a Regra da Cadeia, e
2. primeiro usando a regra do logaritmo $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, e então calculando a derivada.

Ex. 3.20 — Calcule $\frac{d}{dx}\big(\ln(x^k)\big)$ de duas formas diferentes:

1. Usando a Regra da Cadeia, e
2. primeiro usando a regra do logaritmo $\ln(a^p) = p\ln a$, e então calculando a derivada.

Ex. 3.21 — Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{se} x \neq 0 \\ 0 & \text{se} x = 0 \end{cases}$$

é contínua no 0 mas não diferenciável no 0

3.6 Derivada da Função Inversa

Se f é uma função continua e injetiva no intervalo I pode-se mostrar que f tem inversa f^{-1} e que esta é continua. O seguinte teorema nos diz quando a função inversa é diferenciável. Geometricamente, uma função e função inversa tem gráficos que são reflexões, na reta $y = x$. Esta operação reflexão leva uma reta com coeficiente angular m em uma reta com coeficiente angular que é o recíproco $1/m$.

3.1 **Teorema 6. :** Continuidade da Inversa

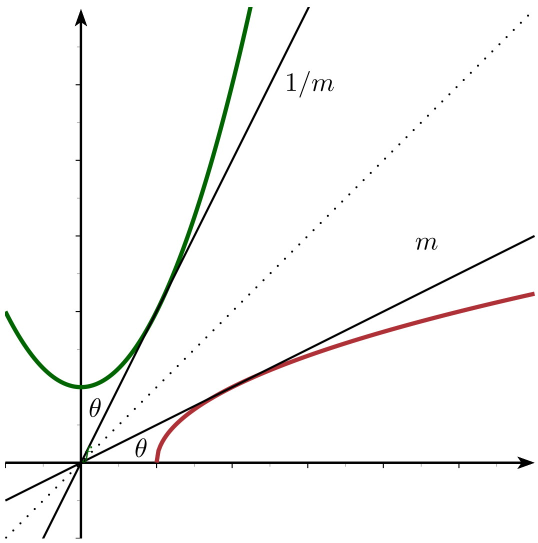


Figura 3.6 Derivada da Inversa. Se a reta tangente faz um ângulo θ com o eixo x, a reta tangente a inversa é obtida refletindo a reta em torno da reta $y = x$ faz um ângulo de $\pi/2 - x$ como eixo x. Como $\operatorname{tg} \pi/2 - x = 1/\operatorname{tg} x$, o coeficiente angular da reta refletida é o inverso da reta tangente.

> Se f é injetiva e contínua num intervalo, então sua função inversa f^{-1} também é contínua.

> 3.2 **Teorema 6. :** Teorema da Função Inversa
>
> Seja f uma função injetiva e diferenciável no intervalo I, com derivada $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Então f^{-1} é diferenciável em b, e
>
> $$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Demonstração. Pela definição de derivada temos:

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x - b}$$

Seja $a = f^{-1}(b)$ e $y = f^{-1}(x)$. Como f é diferenciável, f é continuae logo por 3.6 f^{-1} é contínua. Logo $f^{-1}(x) \to f^{-1}(b)$ quando $x \to b$. Logo

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(b) &= \lim_{x\to b} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x-b} \\ &= \lim_{y\to a} \frac{y-a}{f(x)-f(a)} \\ &= \lim_{y\to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{y-a}} \\ &= \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}\end{aligned}$$

■

Observação 3. *Um modo de recordar a fórmula anterior é utilizando a notação de Leibniz. Para isso escreva $y = f^{-1}(x)$ e assim $f(y) = x$.*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Exemplo 3.4 $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ então $g'(x) = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$, onde $x > 0$ se n for par e $x \neq 0$ se n for ímpar $(n \geq 2)$.

Solução Observamos inicialmente que $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ é a função inversa de $f(x) = x^n$. Assim

$$g'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

■

Exercícios

Ex. 3.22 — Calcule as derivadas das seguintes funções:

1. $h(t) = \operatorname{sen}^{-1}(2t)$
2. $f(t) = \sec^{-1}(2t)$
3. $g(x) = \operatorname{tg}^{-1}(2x)$
4. $f(x) = x \operatorname{sen}^{-1} x$
5. $g(t) = \operatorname{sen} t \cos^{-1} t$
6. $f(t) = \ln te^t$
7. $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\cos^{-1} x}$
8. $g(x) = \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{x})$
9. $f(x) = \sec^{-1}(1/x)$

3.7 Taxas de Variação

Podemos generalizar o conceito de velocidade apresentado anteriormente. Seja Q uma grandeza que pode ser expressa como função da variável x então:

> **3.1 Definição 7.**
>
> A **variação média** de uma grandeza Q com respeito a variável x no intervalo $[a, a+h]$ é definida como:
>
> $$\frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{Q(a+h) - Q(a)}{h}$$

E de modo análogo se tomarmos o limite $h \to 0$ podemos definir a variação instantânea.

> **3.2 Definição 7.**
>
> A **variação instantânea** de uma grandeza Q com respeito a variável x no ponto a é definida como:
>
> $$\frac{dQ}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

A taxa de variação encontra uma enorme aplicabilidade. Destacamos alguns exemplos de aplicações:

- Encontrar a velocidade (taxa de alteração da posição em relação ao tempo) de um carro desportivo movendo-se ao longo de uma estrada reta.
- Encontrar a taxa de crescimento de uma população de bactérias em função do tempo.
- Encontrar a taxa de variação do índice de preços ao consumidor em relação ao tempo.
- Encontrar a taxa de variação de lucro de uma empresa com respeito ao seu nível de venda.

Exemplo 3.3 A posição de uma partícula se movendo ao longo de uma linha reta é dada por

$$s = f(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t \, t \geq 0$$

onde t é medido em segundos e s em metros.

- a Encontre a expressão que forneçe a velocidade da partícula no instante t. Quais são a velocidade e a velocidade da partícula quando $t = 2$?
- b Determine a posição da partícula quando ela está parada.
- c Quando a partícula está se movendo na direção positiva? E na direção negativa?

Solução

a A velocidade da partícula é dada por

$$v(t) = f'(t) = \frac{d}{dt}(2t^3 - 15t^2 + 24t) \tag{3.22}$$
$$= 6t^2 - 30t + 24 = 6(t^2 - 5t + 4) \tag{3.23}$$
$$= 6(t-1)(t-4) \tag{3.24}$$

A velocidade da partícula quando $t = 2$ é

$$v(2) = 6(2-1)(2-4) = -12m/s$$

Em suma, a partícula está se movendo na direção negativa a uma velocidade de $12m/s$.

b A partícula está parada quando $v(t) = 0$, ou seja,

$$v(t) = 6(t-1)(t-4) = 0$$

e vemos que a partícula é estacionária em $t = 1$ e $t = 4$. Sua posição em $t = 1$ é dada por

$$f(1) = 2(1)^3 - 15(1)^2 + 24(1) = 11m$$

Sua posição em $t = 4$ é dada por

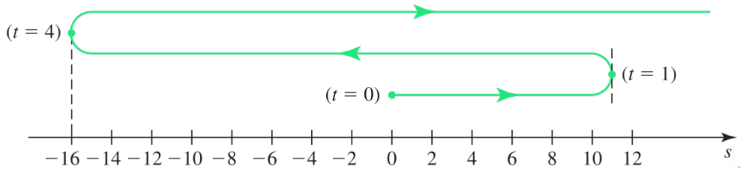
$$f(4) = 2(4)^3 - 15(4)^2 + 24(4) = -16m$$

c A partícula está se movendo na direção positiva quando $v(t) = 6(t-1)(t-4) > 0$

		1	4
$t-1$	$-$	$+$	$+$
$t-4$	$-$	$-$	$+$
$6(t-1)(t-4)$	$+$	$-$	$+$

Resolvendo a inequação acima temos $t < 1$ ou $t > 4$.

A partícula está se movendo na direção negativa quando $v(t) < 0$ e assim $1 < t < 4$.



Exemplo 3.4 Movimento Harmônico Simples

Suponha que uma mola flexível é fixada verticalmente a um suporte rígido. Se um peso for anexado à extremidade livre da mola, ele se acomodará em uma certa posição de equilíbrio. Suponha que o peso seja puxado para baixo (direção positiva) e liberado do repouso de uma posição que está 3 unidades abaixo do posição de equilíbrio no tempo $t = 0$.

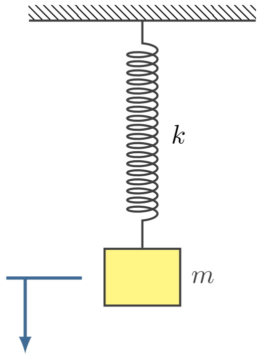


Figura 3.7 Movimento Harmônico Simples

Então, na ausência de forças opostas, como resistência do ar, o peso oscilará para frente e para trás em torno da posição de equilíbrio. Este movimento é conhecido como **Movimento Harmônico Simples**.

Suponha que para uma determinada mola e peso, o movimento é descrito pela equação

$$s(t) = 5\cos t \quad , t \geq 0$$

a Encontre as funções que descrevem a velocidade e aceleração do movimento.

b Encontre os valores de t quando o peso passa pela posição de equilíbrio.

Solução

a A velocidade do peso para $t > 0$ é

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(5\cos t) = -5\,\text{sen}\,t$$

e sua aceleração para $t > 0$ é

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-5\,\text{sen}\,t) = -5\cos t$$

b Quando $s = 0$, o peso está na posição de equilíbrio. Resolvendo a equação

$$s = 5\cos t = 0$$

temos que $t = \pi/2 + n\pi$, onde $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Exemplo 3.5 [Reação Química]

Uma reação química resulta na formação de uma ou mais substâncias a partir de um ou mais materiais de partida. Por exemplo, a equação de síntese do gás carbônico

$$\mathrm{C} + \mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2}$$

na qual uma molécula carbono e uma de oxigênio se combinam para formar uma mólecula de $\mathrm{CO_2}$. De maneira mais geral, vamos considerar a reação

$$A + B \to C$$

onde A e B são os reagentes e C é o produto. A concentração de um reagente A é o número de moles por litro e é denotado por $[A]$. As concentrações dos reagentes e dos produtos variam durante uma reação, e assim $[A]$, $[B]$ e $[C]$ são todas funções do tempo.

Os químicos estão interessados, por exemplo, na taxa instantânea de produção de C, que é dada por $\dfrac{d[C]}{dt}$.

Uma vez que a concentração do produto aumenta à medida que a reação prossegue, a derivada $d[C]/dt$ será positiva e, portanto, a taxa instantânea de produção de $[C]$ é positiva.

As concentrações dos reagentes, entretanto, diminuem durante a reação, portanto, para fazer as taxas de reação de A e B números positivos, colocamos sinais de menos na frente das derivadas $d[A]/dt$ e $d[B]/dt$. Uma vez que [A] e [B] diminuem na mesma taxa que [C] aumenta, temos que

$$\frac{d[C]}{dt} = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}$$

Como seria a relação entre as taxas para a reação entre ferro metálico e ácido clorídrico:

$$\mathrm{Fe} + 2\mathrm{H\,Cl} \to \mathrm{H_2} + \mathrm{Fe\,Cl_2}?$$

Capítulo 4

Tópicos em Diferenciação

4.1 Derivação Implícita

Até esse momento a maioria das funções que encontramos foram apresentadas na forma $y = f(x)$. Entretanto, algumas funções são definidas implicitamente por uma equação nas variáveis x e y:

$$F(x, y) = G(x, y) \tag{4.1}$$

Dizemos que uma função $y = f(x)$ é definida implicitamente por tal equação se o ponto $(x, f(x)$ for solução da equação 4.1 para todo $x \in \operatorname{Dom} f$.

Exemplo 4.1 Determine uma função definida implicitamente pela equação $y^2 + x^2y - 4 = 0$.

Solução Podemos usar Bhaskara para resolver em y e assim

$$y = -x^2 \pm \sqrt{x^4 + 162}$$

■

Exemplo 4.2 Uma elipse é caracterizada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Determine uma função definida implicitamente pela equação da elipse.

Solução

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{a^2} &= 1 - \frac{y^2}{b^2} \\
x^2 &= a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \\
x &= \pm a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}
\end{aligned}
$$

■

Quando uma função é dada implicitamente para calcular a derivada de y em relação a x utilizamos a **derivação implícita**, que consiste em supor que y pode ser escrito como uma função de x, $y(x)$, e diferenciar ambos os lados da equação, aplicar as regras de diferenciação e finalmente resolver a equação resultante de modo a isolar a derivada da função definida de forma implícita. Utilizaremos a técnica de derivação implícita para apresentar outra forma de deduzir a derivada do logaritmo natural.

Exemplo 4.3 Mostre que $\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solução Seja $y = \ln(x)$ logo $x = e^y$. Derivando implicitamente temos que $1 = e^y \dfrac{dy}{dx}$ e logo $\dfrac{dy}{dx} = 1/e^y = 1/x$. ■

Exemplo 4.4 Calcule a derivada de $\cos x + \cos y = 1/2$.

Solução Derivando implicitamente:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cos x + \cos y) &= \frac{d}{dx}1/2 \\
-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y y' &= 0 \\
y' &= -\operatorname{cossec} y \operatorname{sen} x
\end{aligned}
$$

■

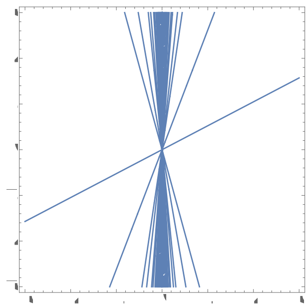


Figura 4.1 $\operatorname{sen}\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$

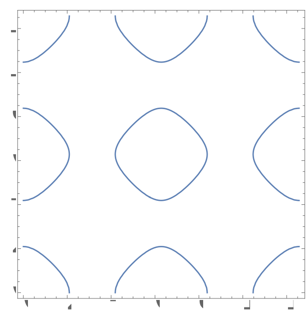


Figura 4.2 $\cos x + \cos y = 1/2$

Exemplo 4.5 Calcule a derivada de $\operatorname{sen}\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$

Solução Derivando implicitamente temos:

$$\operatorname{sen}\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{x}{y}\left(\frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}\right) = 0$$
$$y - x\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

■

Exemplo 4.6 Considere a função $y = y(x)$ definida implicitamente por

$$\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{sen}(xy).$$

Encontre a equação da reta tangente à curva no ponto $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$.

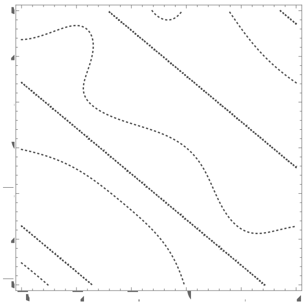


Figura 4.3 $\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{sen}(xy)$

Solução Diferenciando ambos lados da equação acima com relação a x temos que

$$\sec^2(x+y)\frac{d}{dx}(x+y) = \cos(xy)\frac{d}{dx}(xy).$$

Portanto,

$$\sec^2(x+y)(1+\frac{d}{dx}y) = \cos(xy)(y + x\frac{d}{dx}y).$$

Resolvendo, temos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos(xy) - \sec^2(x+y)}{\sec^2(x+y) - x\cos(xy)}.$$

Sabemos que $y(\sqrt{\pi}) = -\sqrt{\pi}$. Logo, a derivada de y com relação a x em $\sqrt{\pi}$ é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos(xy) - \sec^2(x+y)}{\sec^2(x+y) - x\cos(xy)}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}-1}{\sqrt{\pi}+1}.$$

Logo, a equação da reta tangente à curva no ponto $(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$ é dada por:

$$s = \frac{\sqrt{\pi}-1}{\sqrt{\pi}+1}(x - \sqrt{\pi}) - \sqrt{\pi}.$$

■

Exemplo 4.7 Se $x^3 + y^3 = 6xy$, encontre $\dfrac{dy}{dx}$.

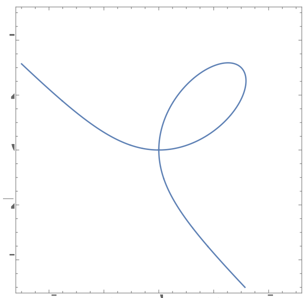


Figura 4.4 $x^3 + y^3 = 6xy$

Solução Derivando ambos os lados da equação em relação a x, obtemos $3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy'$. Resolvendo em y'

$$y' = \frac{2y^2 - x^2}{y^2 - 2x}.$$

■

Exercícios

Ex. 4.1 — Encontre dy/dx diferenciando implicitamente

1. $x^2 + y^2 = 1$
2. $x^2y + xy^2 = 3x$
3. $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$
4. $x\,\mathrm{sen}(y) + \cos(2y) = \cos(y)$
5. $x^y = y^x$
6. $y = \ln(x^2 + y^2)$
7. $x^4 + y^2 + y = 7$
8. $x^{2/5} + y^{2/5} = 1$

Ex. 4.2 — Mostre quw $\frac{dy}{dx}$ é a mesma para cada uma das seguintes funções definidas implicitamente.

1. $xy = 1$
2. $x^2y^2 = 1$
3. $\mathrm{sen}(xy) = 1$
4. $\ln(xy) = 1$

Ex. 4.3 — Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ no ponto $(-5, 9/4)$
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ no ponto $(-1, 4\sqrt{2})$
3. $y^2 = x^3(2-x)$ no ponto $(1,1)$

Ex. 4.4 — A função $y = f(x)$, $y > 0$ é dada implicitamente por $x^2 + 4y^2 = 2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto de abscissa 1.

Ex. 4.5 — Mostre, fazendo a diferenciação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

Ex. 4.6 — Mostre que a soma dos interseptos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

Ex. 4.7 — Encontre as equações das retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passa através do ponto $(12, 3)$

Ex. 4.8 — A água flui a partir de um tanque cuja área de secção transversal é constante e igual a $50m^2$. Localizado na parte inferior do tanque, existe um orifício cuja secção é sempre $14m^2$. Inicialmente, a altura da água no tanque era de 20m e t segundos mais tarde, era dada pela a equação

$$2\sqrt{h} + \frac{1}{25}t - 2\sqrt{20} = 0 \quad 0 \leq t \leq 50\sqrt{20}$$

Quão rápido a altura da água está diminuindo no instante em que ela vale 9m?

./figs/vazao.jpg

4.2 Derivadas das Funções Exponencial e Logaritmo

4.1 Teorema 2.

Dado a um número real positivo então

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

Demonstração. Aplicando logaritmo natural a ambos os lados da equação $y = a^x$ temos:

$$\ln y = \ln a^x$$

o que implica em:

$$\ln y = x \ln a$$

Aplicando a função exponencial a ambos os lados da equação da equação anterior temos:

$$e^{\ln y} = e^{x \ln a}$$
$$y = e^{x \ln a}$$

Assim $a^x = e^{x \ln a}$ e podemos derivar essa função usando a regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}a^x = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$$

■

Exemplo 4.2 Calcule a derivada de $y = 2^{\sqrt{x}}$

4.3 Teorema 2.

Dados b um número positivo real diferente de 1 e x um número real positivo, então:

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

Demonstração. Pela propriedade de mudança de base do logaritmo temos:

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

E derivando temos:

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x\ln a}$$

■

Exemplo 4.4 Calcule a derivada de $y = \log_{10}(x^2+1)$.

Solução Usando a regra da Cadeia temos:

$$\frac{d}{dx}\log_{10}(x^2+1) = \frac{1}{\ln 10\,(x^2+1)} \cdot 2x$$

■

4.2.1 Derivada de $f(x)^{g(x)}$

4.5 Teorema 2.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis com $f(x) > 0$. Então a derivada de

$$h(x) = [f(x)]^{g(x)}$$

é dada por

$$h'(x) = [f(x)]^{g(x)}(g'(x)\ln[f(x)] + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}$$

Demonstração. Começamos aplicando logaritmo de ambos os lados de $h(x) = [f(x)]^{g(x)}$, temos:

$$\ln h(x) = g(x)\ln[f(x)]$$

Exponenciando ambos os lados da equação temos:

$$h(x) = e^{g(x)\ln[f(x)]}$$

Derivando, temos

$$h'(x) = e^{g(x)\ln[f(x)]}.(g'(x)\ln[f(x)] + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)})$$

Como $e^{g(x)\ln[f(x)]} = [f(x)]^{g(x)}$

$$h'(x) = [f(x)]^{g(x)}.(g'(x)\ln[f(x)] + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)})$$

■

Para derivarmos funções da forma $h(x) = [f(x)]^{g(x)}$ podemos utilizar o teorema acima, ou usar a estratégia apresentada em sua demonstração: aplicar logaritmo a ambos os lados da identidade $h(x) = [f(x)]^{g(x)}$, simplificar e posteriormente aplicar a função exponencial.

Exemplo 4.6 Calcule a derivada de x^x

Solução Aplicando logaritmo natural a ambos os lados da equação $y = x^x$ temos:

$$\ln y = \ln x^x$$

o que implica em:

$$\ln y = x\ln x$$

Aplicando a função exponencial a ambos os lados da equação da equação anterior temos:

$$e^{\ln y} = e^{x\ln x}$$
$$y = e^{x\ln x}$$

Ou seja,

$$x^x = e^{x\ln x}$$

Derivando temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^x &= \frac{d}{dx}e^{x\ln x}\\ &= e^{x\ln x}\frac{d}{dx}(x\ln x)\\ &= e^{x\ln x}(1\ln x + x\frac{1}{x})\\ &= e^{x\ln x}(\ln x + 1)\\ &= x^x(\ln x + 1)\end{aligned}$$

■

Exemplo 4.7 Calcule a derivada de $(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

Solução Aplicando logaritmo natural a ambos os lados da equação $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$ temos:

$$\ln y = \ln(\operatorname{sen} x)^{\cos x}$$

o que implica em:

$$\ln y = \cos x\ln(\operatorname{sen} x)$$

Aplicando a função exponencial a ambos os lados da equação da equação anterior temos:

$$e^{\ln y} = e^{\cos x \ln(\operatorname{sen} x)}$$
$$y = e^{\cos x \ln(\operatorname{sen} x)}$$

Ou seja,

$$(\operatorname{sen} x)^{\cos x} = e^{\cos x \ln(\operatorname{sen} x)}$$

Derivando temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)^{\cos x} &= \frac{d}{dx} e^{\cos x \ln(\operatorname{sen} x)} \\
&= e^{\cos x \ln(\operatorname{sen} x)} \frac{d}{dx}(\cos x \ln(\operatorname{sen} x)) \\
&= (\operatorname{sen} x)^{\cos x}(-\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) + \cos x \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cos x) \\
&= (\operatorname{sen} x)^{\cos x}(-\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) + \frac{(\cos x)^2}{\operatorname{sen} x})) \\
&= (\operatorname{sen} x)^{\cos x}(-\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) + \frac{(\cos x)^2}{\operatorname{sen} x}))
\end{aligned}$$

■

Exercícios

Ex. 4.9 — Calcule as seguintes derivadas

1. $e^{\operatorname{sen} x}$
2. $\ln(1 + x^2)$
3. x^x
4. $\cos(x)^x$
5. $\operatorname{senh}(x)^{\operatorname{tgh}(x)}$
6. $x^\pi + \pi^x$
7. $(2x + 1)^x$
8. $\ln(\ln(\ln(x)))$
9. $\ln(x)^x$
10. x^{e^x}
11. $x^{\cosh(x)}$

* 12. x^{x^x}

4.3 Derivação das Funções Trigonométricas Inversas

Como vimos na seção , nenhuma das funções seno, cosseno e tangente é bijetiva em seus domínios. Assim para definirmos suas inversas fizemos restrições no domínio e contradomínio de modo a obtermos funções restritas bijetivas e podermos definirmos inversas. Nessa seção encontraremos as derivadas dessas funções.

4.1 Teorema 3.

Seja $\operatorname{arcsen} x : [-1,1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ então

$$\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demonstração. A função $\operatorname{sen} x$ é injetiva no intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ com imagem o intervalo $[-1,1]$. Portanto, existe a função inversa $g(x) = \operatorname{arcsen} x$, para $x \in [-1,1]$, dada por

$$y = \operatorname{arcsen} x \iff \operatorname{sen} y = x.$$

Apresentaremos duas formas de derivar a função $\operatorname{arcsen} x$,, aplicando a Proposição 3.6 e utilizando derivação implícita. Primeiramente derivaremos utilizando a Proposição 3.6, assim:

$$\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}.$$

Como $1 = \cos^2(\operatorname{arcsen} x) + \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x) = \cos^2(\operatorname{arcsen} x) + x^2$, logo $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$ pois $\cos y \geq 0$ para $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Portanto,

$$\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Utilizando derivação implícita.

$$y = \operatorname{arcsen} x \qquad \iff \qquad \operatorname{sen} y = x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

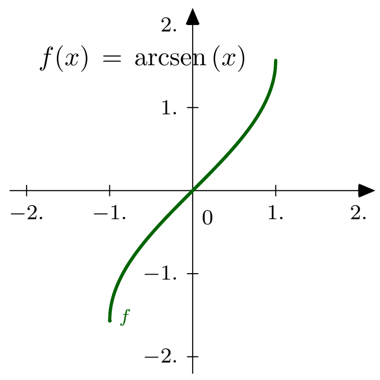
Derivando implicitamente,

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Como $1 = \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = \cos^2 y - x^2$. Como $\cos y \geq 0$ para $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, concluímos que

$$\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■



4.2 **Teorema 3.**

Seja $\arccos x : [-1,1] \to [0,\pi]$ então

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

A função $\cos x$ é injetiva no intervalo $[0,\pi]$ com imagem o intervalo $[-1,1]$. Portanto, existe a função inversa $g(x) = \arccos x$, para $x \in [-1,1]$, dada por

$$y = \arccos x \iff \cos y = x.$$

Demonstração. Se $y = \arccos x$ então:

$$\cos y = x$$

Usando derivação implícita temos

$$\frac{d}{dx}\cos y = \frac{d}{dx}x$$

$$-\frac{dy}{dx}\operatorname{sen} y = 1$$

Substituindo $\operatorname{sen} y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ temos:

$$-\frac{dy}{dx}\sqrt{1-\cos^2 y} = 1$$

Finalmente substituindo $x = \cos y$ temos:

$$-\frac{dy}{dx}\sqrt{1-x^2} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

■

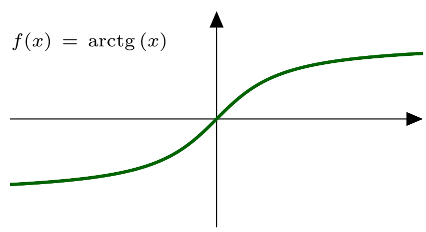
4.3 **Teorema 3.**

Seja $\operatorname{arctg} x : [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$ então

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

A função $\operatorname{tg} x$ é injetiva no intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ com imagem $\mathbb{R}$. Portanto, existe a função inversa $g(x) = \operatorname{arctg} x$, para $x \in \mathbb{R}$, dada por

$$y = \operatorname{arctg} x \iff \operatorname{tg} y = x.$$



Demonstração. Se $y = \operatorname{arctg} x$ então $\operatorname{tg} y = x$. Derivando implicitamente temos:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} y = \frac{d}{dx}x$$

O lado esquerdo fica:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} y = \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{\frac{dy}{dx}\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y \frac{dy}{dx}}{\cos^2 y} = \frac{dy}{dx}\left(1+\operatorname{tg}^2 y\right)$$

Enquanto que o lado direito:

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

Assim

$$\frac{dy}{dx}(1+\operatorname{tg}^2 y) = 1$$

Substituindo $x = \operatorname{tg} y$ temos

$$\frac{dy}{dx}(1+x^2) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

■

De modo análogo podemos calcular as derivadas das outras funções trigonométricas inversas.

4.4 Teorema 3. : Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas

- $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arccotg} x = \frac{-1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{arccossec} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Exercícios

Ex. 4.10 — Calcule as seguintes derivadas

1. $\operatorname{arcsen}(x^3)$
2. $\arccos(\operatorname{sen}(x))$
3. $\operatorname{arccossec}(\cos(x))$

4.4 Taxas Relacionadas

Quando duas quantidades são relacionadas por uma equação, conhecendo o valor de uma quantidade podemos determinar o valor da outra. O tema da taxas relacionadas leva isso um passo além: conhecendo a taxa na qual uma quantidade está mudando pode determinar a taxa na qual as outras mudanças estão ocorrendo

Para ver isso suponha que z representa uma quantidade que dependa de outras duas quantidades x e y, ou seja $z = f(x)$ e $z = g(y)$. A relação entre x e y pode ser expressa por uma função $y = h(x)$. Assim, $z = g(y) = g(h(x))$. Utilizando a Regra da Cadeia temos que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Portanto, pela regra da cadeia, temos que a taxa de variação de z com relação a x é o produto entre a taxa de variação de z com relação a y e da taxa de variação de y com relação a x.

Exemplo 4.1 Seja A a área de um quadrado de lado l; Qual a relação entre as variações dos lados $\frac{dl}{dt}$ com a variação da área $\frac{dA}{dt}$?

Solução Devemos considerar um quadrado de lado l, cufo lado varia com o tempo $l = l(t)$ e consequentemente a área também é função do tempo $A = A(t)$. Como $A = l^2$, derivando em relação a t e usando a regra da cadeia temos

$$\frac{dA}{dt} = 2l\frac{dl}{dt} \tag{4.2}$$

e, desta forma obtivemos uma relação entre a taxa de variação da área com a taxa de variação dos lados. ■

Exemplo 4.2 Suponha que está sendo bombeado ar para dentro de um balão esférico, e seu volume cresce a uma taxa de $50cm^3/s$. Quão rápido o raio do balão está crescendo quando o raio é $5cm$?

Solução Seja r o raio e V o volume do balão no instante t. Sabemos que a taxa de crescimento do volume é $\frac{dV}{dt} = 50$ e queremos determinar a taxa de crescimento do raio, $\frac{dr}{dt}$ quando $r = 5$. Pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}.$$

Lembrando que $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \implies \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$, logo

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} \quad \implies \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}.$$

Concluímos que para $r = 5$, $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{2\pi}$. ■

Exemplo 4.3 Um tanque de água tem a forma de um cone circular invertido com base de raio 2m e altura igual a 4m. Se a água está sendo bombeada dentro do tanque a uma taxa de $2m^3/min$, encontre a taxa na qual o nível da água está elevando quando a água está a 3m de profundidade.

Solução Sejam V, r e h o volume da água, o raio da superfície e a altura no instante t. Sabemos que $\dfrac{dV}{dt} = 2$ queremos achar $\dfrac{dh}{dt}$ quando $h = 3$. Temos que h e V estão relacionadas pela equação: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$. Por semelhança de triângulos $\dfrac{r}{h} = \dfrac{2}{4}$ logo $r = h/2$. Substituindo na expressão para V, obtemos $V = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{h^2}{2} h = \dfrac{\pi}{12}h^3$. Agora, derivando com relação a t,

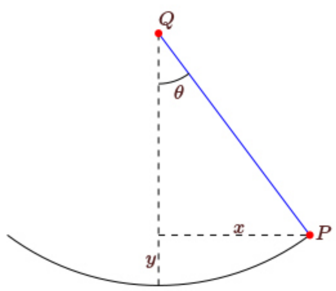
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt} \qquad \Longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}.$$

Substituindo $h = 3$, $\dfrac{dV}{dt} = 2$, temos $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{8}{9\pi.}$ ■

Exemplo 4.4 Um balanço consiste de uma placa na extremidade de uma corda de 10 metros de comprimento. Deixe o ponto P representar o balanço no final da corda, e Q o ponto de fixação na outra extremidade. Suponha que o balanço está diretamente abaixo de Q quando $t = 0$, e está sendo puxado por alguém que anda a 6m / s da esquerda para a direita. Encontre:

- □ o quão rápido o balanço está subindo após 1s;
- □ a velocidade angular da corda em graus/s após 1s.

Solução Começamos perguntando: qual é a quantidade geométrica cuja taxa de variação conhecemos, e qual é a quantidade geométrica cuja taxa de mudança que estamos querendo determinar? Note que a pessoa que empurra o balanço está se movendo horizontalmente a uma taxa que conhecemos. Em outras palavras, sabemos que a coordenada horizontal de P está aumentando em 6 m/s. Vamos começar fixando a origem em P no tempo $t = 0$, Ou seja, uma distância de 10 diretamente abaixo do ponto de fixação. A taxa que conhecemos é dx/dt, e na parte (a) a taxa que queremos é dy/dt (a taxa na qual o ponto P está subindo). E na parte (b) a taxa que nós queremos é $\dot{\theta} = d\theta/dt$, onde θ significa o ângulo em radianos medido em relação à vertical. (Na verdade, uma vez que queremos que a nossa resposta em graus/s, no final temos de converter $d\theta/dt$ de



rad /s multiplicando por $180/\pi$.) (a) A partir do diagrama vemos que temos um triângulo retângulo cujos lados são x e $10 - y$, e cuja hipotenusa é 10. Portanto, $x^2 + (10 - y)^2 = 100$. Tomando a derivada de ambos os lados obtemos: $2x\dot{x} + 2(10 - y)(0 - \dot{y}) = 0$. Vamos agora olhar para o que conhecemos depois de 1 de segundo, Ou seja, $x = 6$ (porque x começou em 0 e aumentou a a taxa de 6 m/s durante 1 segundo), $y = 2$ (porque nós temos $10 - y = 8$ do teorema de Pitágoras aplicada ao triângulo com hipotenusa 10 e lado 6), e $\dot{x} = 6$. Colocando esses valores temos $2 \cdot 6 \cdot 6 - 2 \cdot 8\dot{y} = 0$, a partir do qual podemos facilmente resolver obtendo $\dot{y}$: $\dot{y} = 4,5$ m/s. (b) Aqui nossas duas variáveis são de x e θ, assim que nós queremos usar o mesmo triângulo retângulo como na parte (a), mas desta vez vamos relacionar θ com x. Uma vez que a hipotenusa é constante (igual a 10), a melhor maneira de fazer isso é utilizando a função seno: $\operatorname{sen}\theta = x/10$. Derivando, obtemos $(\cos\theta)\dot{\theta} = 0,1\dot{x}$. No instante em questão ($t = 1$ s), quando temos um triângulo retângulo com lados 6–8–10, $\cos\theta = 8/10$ e $\dot{x} = 6$. Assim $(8/10)\dot{\theta} = 6/10$, Ou seja, $\dot{\theta} = 6/8 = 3/4$ rad / s, ou aproximadamente 43 graus/s. ■

Exemplo 4.5 A energia cinética de um corpo é dado por $K = 1/2mv^2$. Se o objeto está em queda livre e acelerando a $9.8m/s^2$, quão rápido a energia cinética está aumentando quando a velocidade for de $30m/s$?

Exemplo 4.6 Um gás está numa câmara com uma parede flexível (de modo que a câmara pode expandir ou contrair). De acordo com os químicos, se mantivermos o gás a uma temperatura constante, enquanto aumentando ou diminuindo o tamanho da câmara, a pressão P e volume V satisfazem a relação PV = constante. (Estamos utilizando a lei do gás ideal $PV = nRT$, em que n e T não se alteram.) Um aspecto desta equação que é óbvio é que, quando o volume cresce/decresce quando a pressão decresce/cresce. Pergunta se diminuirmos o volume a um ritmo constante, qual será a taxa de aumento da pressão?

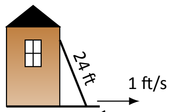
Exercícios

Ex. 4.11 — A água flui para uma superfície plana a uma taxa de 5cm^3/s formando uma poça circular de 10mm de profundidade. Quão rápido está o raio crescendo quando o raio é:

1. 1 cm?
2. 10 cm?
3. 100 cm?

Ex. 4.12 — Uma escada de 24 m

está encostada numa casa enquanto a base é afastada a uma velocidade constante de 1 pés/s.



Em que taxa está o topo da escada deslizando pelo lado da casa quando a base é:

1. 1 pé da casa?
2. 10 pés da casa?
3. 23 pés da casa?
4. 24 pés da casa?

Ex. 4.13 — Um balão circular é inflado com ar a uma taxa de $10\text{cm}^3/\text{s}$. Quão rápido está aumentando o raio do balão quando o raio é:

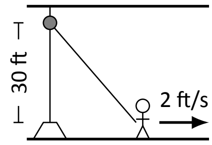
1. 1 cm?
2. 10 cm?
3. 100 cm?

Ex. 4.14 — Um cone cilíndrico invertido, com 20m de profundidade e 10m de diâmetro na parte superior, está sendo preenchido com água a uma taxa de $10\text{m}^3/\text{min}$. Em que taxa a água está subindo no tanque quando a profundidade da água é:

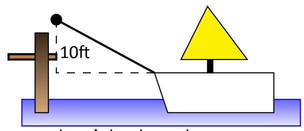
1. 1 m?
2. 10 m?
3. 19 m?

Quanto tempo o tanque levará para encher quando começar vazio?

Ex. 4.15 — AUma corda, presa a um peso, sobe através de uma polia no teto e volta para um trabalhador. O homem segura a corda na mesma altura do ponto de conexão entre corda e peso.



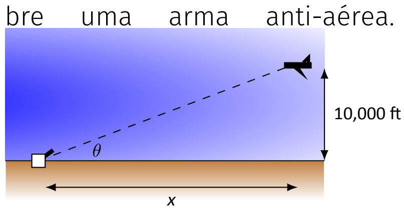
Ex. 4.16 — Um barco está sendo puxado em uma doca a uma taxa constante de 30 pés/min por um guincho localizado a 10 pés acima do convés do barco.



A que velocidade o barco se aproxima do cais quando o barco está:

1. 50 pés distante da doca?
2. 15 pés distante da doca?
3. 1 pé distante da doca?
4. O que acontece quando o comprimento da corda puxada no barco é inferior a 10 pés de comprimento?

Ex. 4.17 — Uma aeronave F-22 está voando a 500 mph com uma elevação de 10.000 pés em um caminho reto que a levará diretamente sobre uma arma anti-aérea.



Quão rápido a arma deve ser capaz de girar para rastrear com precisão a aeronave quando o avião estiver:

1. 1 milha distante?
2. 1/5 milha distante?
3. Diretamente sobre a arma?

Ex. 4.18 — Suponha que o homem esteja diretamente ao lado do peso (ou seja, um comprimento total da corda de 60 pés) e comece a se afastar a uma velocidade de 2 pés / s. Quão rápido está o peso subindo quando o homem andou:

1. 10 pés?
2. 40 pés?

Ex. 4.19 — Uma empresa que produz materiais de paisagismo está despejando areia em uma pilha cônica. A areia está sendo despejada a uma taxa de 5 pés^3/s; as propriedades físicas da areia, em conjunto com a gravidade, asseguram que a altura do cone seja aproximadamente 2/3 do comprimento do diâmetro da base circular. Quão rápido está o cone subindo quando tem uma altura de 30 pés?

4.5 Derivadas das Funções Hiperbólicas

4.1 Definição 5.

As funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, são definidas, respectivamente, por:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x}-1}{2e^x} = \frac{1-e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

e

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x}+1}{2e^x} = \frac{1+e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

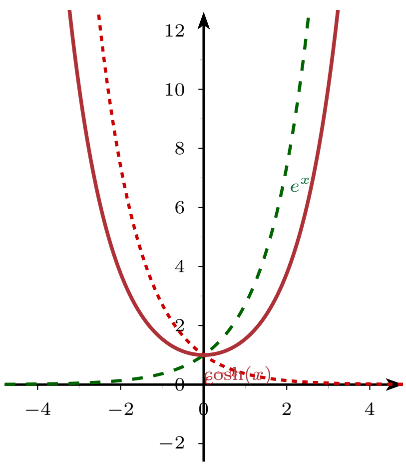


Figura 4.5 Gráfico da função $\cosh(x)$

É fácil verificar a partir da definição acima que a função senh é ímpar enquanto que a função $\cosh$ é par:

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$$
$$\cosh(-x) = \cosh x$$

As funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicos, são respectivamente definidas por:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$
$$\operatorname{sech}\ x = (\cosh x)^{-1} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$
$$\operatorname{csch}\ x = (\operatorname{senh} x)^{-1} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

4.2 **Proposição 5.**

$\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1$

Demonstração.

$$\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = [\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})]^2 - [\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})]^2 = 1$$

■

4.3 **Teorema 5.**

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x})}{2} \\
&= \frac{\frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(e^{-x})}{2} \\
&= \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \cosh x
\end{aligned}$$

■

4.4 **Teorema 5.**

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
(\cosh x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^x + e^{-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^x + \left(-e^{-x}\right)\right) \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&= \operatorname{senh} x
\end{aligned}
$$

■

Usando as regras de derivação podemos calcular as outras derivadas hiperbólicas.

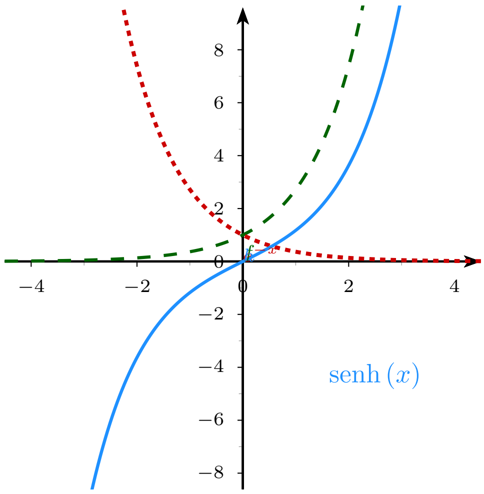


Figura 4.6 Gráfico da função $\operatorname{senh}(x)$.

4.5 Teorema 5.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh} x) = \operatorname{sech}^2 x$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\operatorname{tgh} x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\right) \\
&= \frac{\left(\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x\right)\cosh x - \operatorname{senh} x\left(\frac{d}{dx}\cosh x\right)}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{1}{\cosh^2 x}
\end{aligned}
$$

4.6 Teorema 5. : Derivadas das Funções Hiperbólicas

- $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$
- $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$
- $\frac{d}{dx}\operatorname{tgh} x = 1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x = 1/\cosh^2 x$
- $\frac{d}{dx}\coth x = 1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x = -1/\operatorname{senh}^2 x$
- $\frac{d}{dx}\ \operatorname{sech}\ x = -\operatorname{tgh} x\ \operatorname{sech}\ x$

- $\dfrac{d}{dx}\ \text{csch}\ x = -\coth x\ \text{csch}\ x$

Exemplo 4.7 Calcule a derivada de $\operatorname{tgh} x^2$.

Solução Usando a Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tgh} x^2 = \operatorname{sech}^2(x^2)\cdot 2x$$

■

4.8 Teorema 5. : Derivadas das Funções Hiperbólicas Inversas

- $\dfrac{d}{dx}\ \text{arsinh}\ x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\dfrac{d}{dx}\ \text{arcosh}\ x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\dfrac{d}{dx}\ \text{artanh}\ x = \dfrac{1}{1-x^2}$
- $\dfrac{d}{dx}\ \text{arcoth}\ x = \dfrac{1}{1-x^2}$
- $\dfrac{d}{dx}\ \text{arsech}\ x = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
- $\dfrac{d}{dx}\ \text{arccosec}\ x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

Demonstração. $\boxed{a}$ A função $x \in \mathbb{R}$

$$y = \operatorname{senh}^{-1} x \Leftrightarrow x = \operatorname{senh} y$$

Derivando implicitamente

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dy} &= \cosh y\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cosh y}\\
&= \pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

Acima usamos que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $\cosh y \geq 1$. E assim $\cosh y = \sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1}$. $\boxed{d}$

$$y = \coth^{-1} x \Leftrightarrow x \coth y$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= -\operatorname{csch}^2 y\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-1}{\operatorname{csch}^2 y}\\ &= \frac{-1}{\coth^2 y - 1}\\ &= \frac{-1}{x^2-1}\end{aligned}$$

■

4.6 Derivada de Ordem Superior

Seja f uma função diferenciável em A. A função $f' : A \to \mathbb{R}$ ou simplesmente f' é dita **derivada** de f ou **derivada primeira de** f. De modo análogo, podemos definir a derivada de f' que será chamada **derivada segunda de** f. Neste caso,

$$(f')'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

e escrevemos $f'' = (f')'$, quando o limite existir. Também podemos escrever

$$f^{(2)} := f''.$$

A **derivada terceira de** f é a derivada da derivada segunda da f, escreveremos

$$f^{(3)} \quad \text{ou} \quad f'''$$

Para $n \in \mathbb{N}^*$, a **derivada n-ésima de** f será denotada por $f^{(n)}$ quando esta existir. Alternativamente, podemos escrever

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

para denotar a derivada segunda, f'', de $y = f(x)$. Analogamente, usamos

$$\frac{d^3 f}{dx^3} \quad \text{ou} \quad \frac{d^3 f}{dx^3}$$

para denotar a derivada de terceira, f''', de $y = f(x)$, e assim por diante.

Exemplo 4.1 Calcule as 4 primeiras derivadas de $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3/x$.

Solução Como $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3/x$,

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 1 + \frac{3}{x^2}$$

$$f''(x) = 6x + 4 - \frac{6}{x^3}$$

$$f'''(x) = 6 + \frac{18}{x^4}$$

$$f''''(x) = -\frac{72}{x^5}$$

■

Exemplo 4.2 Se $f(x) = \operatorname{sen}(x) + e^x + 1$. Logo,

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\cos(x) + e^x.$$

Exemplo 4.3 Calcule $\operatorname{sen}^{(98)} x$

Solução Começaremos calculando as primeiras derivadas:

$$\operatorname{sen}' x = \cos x$$
$$\operatorname{sen}'' x = -\operatorname{sen} x$$
$$\operatorname{sen}''' x = -\cos x$$
$$\operatorname{sen}^{(4)} x = \operatorname{sen} x$$

Ou seja, a derivada de ordem 4 de $\operatorname{sen} x$ é $\operatorname{sen}(x)$. ■

Exemplo 4.4 Mostre que se $f(x) = \frac{1}{x}$ então $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

Exemplo 4.5 A posição de uma partícula é dada pela equação $s(t) = 5t^3 - 6t^2 + 9t$. Encontre a velocidade e a aceleração no instante $t = 2$.

Solução A velocidade é dada por:

$$v(t) = s'(t) = 15t^2 - 12t + 9$$

e a aceleração

$$a(t) = s''(t) = 30t - 12$$

No instante $t = 2s$ temos:

$$v(2) = 60 - 24 + 9 = 45$$
$$a(2) = 48$$

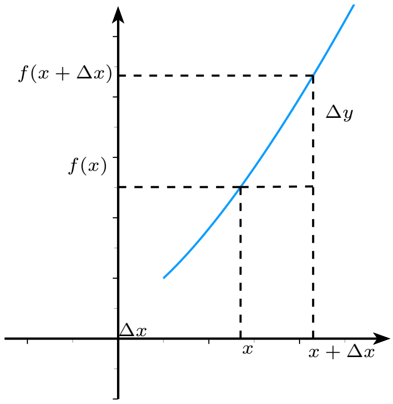
■

4.7 Aproximações Lineares e Diferencial

As vezes precisamos de uma estimativa rápida e simples da variação em $f(x)$ provocada por uma variação em x. Isto é gostaríamos de calcular o incremento

$$\Delta y := f(x + \Delta x) - f(x)$$

provocado pelo incremento na variável $x + \Delta x$. Para esse fim utilizaremos o fato geométrico que uma curva se aproxima de sua reta tangente na vizinhança do ponto de tangência. Assim, para aproximar uma função $y = f(x)$ quando x está próximo de p, usamos a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$, cuja equação é



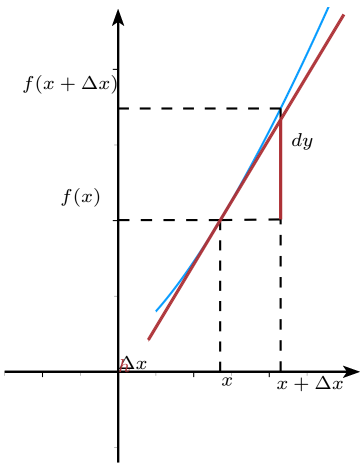
$$y = f(p) + f'(p)(x - p)$$

e assim temos a aproximação

$$f(x) \approx f(p) + f'(p)(x - p)$$

denominada **aproximação linear** de f em p. A função linear $L(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$ é chamada de **linearização** de f em p.

Exemplo 4.1 Aproxime $\sqrt{3,95}$ e $\sqrt{4,02}$ utilizando a aproximação linear da função $f(x) = \sqrt{x}$.



Solução Começaremos determinando a equação da reta tangente em $p = 4$. como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, a equação da reta tangente é dada por

$$L(x) = f(4) + f'(4)(x - 4) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4).$$

Agora,

$$\sqrt{3,95} \approx L(3,95) = 1.9875 \quad \text{e} \quad \sqrt{4,02} \approx L(4,02) = 2.005.$$

Utilizando uma calculadora temos que $\sqrt{3,95} \approx 1.98746$ e $\sqrt{4,02} \approx 2.00499$ ■

A notação de incremento pode ser usada na definição da derivada de uma função.

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Desse modo, temos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \quad \text{se} \quad \Delta x \approx 0.$$

Podemos rescrever a expressão anterior como:

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad \text{se} \quad \Delta x \approx 0.$$

4.2 **Definição 7.**

Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável e deixe Δx ser o incremento de x.

- A diferencial $\mathrm{d}x$ da variável independente é definida como $\mathrm{d}x = \Delta x$
- A diferencial $\mathrm{d}y$ da da variável independente é definida como
$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x = f'(x)\ \mathrm{d}x$$

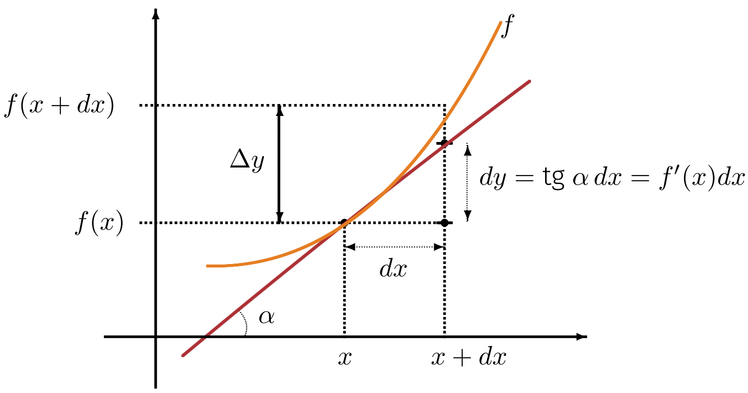
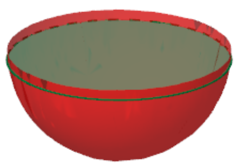


Figura 4.7 Aproximação Linear e Diferencial

Para interpretar geometricamente a diferencial, considere a Figura 4.7. Seja $dx = \Delta x$ a variação em x e $\Delta y = f(x+dx) - f(x)$ a variação em y. Sabemos que $f'(x)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$. Portanto dy representa a variação da reta tangente, enquanto Δy representa a variação da função $y = f(x)$ quando x varia por uma quantidade dx.

Observação 3. *Quando $\mathrm{d}x$ for suficientemente pequeno, $\mathrm{d}y$ irá se aproximar de $\Delta y = f(x+\ \mathrm{d}x) - f(x)$ no seguinte sentido*
$$\frac{\Delta y - \ \mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \to 0, \quad \textit{quando} \quad \mathrm{d}x \to 0.$$
Este fato implica que o erro cometido ao aproximarmos Δy por dy é pequeno quando comparado a $\mathrm{d}x$. Portanto
$$\Delta y \approx \ \mathrm{d}y$$
para dx suficientemente pequeno. Finalmente a aproximação linear pode ser escrita na notação de diferenciais como
$$f(p+\ \mathrm{d}x) \approx f(p) + \ \mathrm{d}y.$$



Exemplo 4.4 Uma tigela tem o formato de uma semiesfera de raio 10cm e é preenchida com água até a altura de x cm. O volume de água na esfera é dado por

$$V = \frac{\pi}{3}(30x^2 - x^3)$$

Suponha que você meça a altura da água como 5cm com um erro máximo de $0,1$cm. Estime o erro máximo no volume calculado de água na tigela.

Solução Deixe x^* denotar a altura real da água. Queremos calcular a diferença $\Delta V = V(x^*) - V(5)$ entre o volume real $V(x^*)$ Não conhecemos o valor real de x^* mas conhecemos que $\Delta x = x - 5$ satisfaz $|\Delta x| < 0,1$. Também conhecemos que $V'(x) = \frac{\pi}{3}(60x - 3x^3) = \pi(20x - x^2)$. Logo usando aproximação linear temos que:

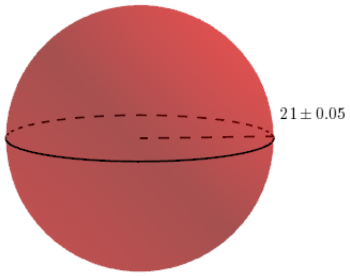
$$\Delta V \approx dV = V'(5)\Delta x$$

temos $\Delta V \approx 75\pi\Delta x$ e assim

$$\Delta V \approx \pm 23,56$$

Assim o volume calculado com $x = 5$ é $V(5) \approx 654cm^3$, com erro de $\pm 23,56$.

Exemplo 4.5 O raio de uma esfera tem 21 cm, com um erro de medida possível de no máximo 0,05 cm. Qual é o erro máximo cometido ao usar esse valor de raio para computar o volume da esfera? Se o raio da esfera for r, então seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Denotamos o erro na medida do raio por $dr = \Delta r$. O erro correspondente no cálculo do volume é ΔV que pode ser aproximado pela diferencial $dV = 4\pi r^2 dr$. Quando $r = 21$ e $dr = 0,05$, temos $dV = 4\pi 21^2 0,05 \approx 277$. Logo o erro máximo no volume calculado será de aproximadamente $277cm^3$.



Exemplo 4.6

- Utilizando aproximação linear encontre uma fórmula aproximada para o volume de uma casca cilíndrica de altura h, raio interno r e grossura t.
- Qual o erro envolvido ao usar essa fórmula?

Solução $\boxed{a}$ Queremos determinar o volume contido entre o cilindro de raio r e o cilindro externo de raio $r+\Delta r$. O volume do cilindro interno é dado por

$$V = \pi r^2 h$$

Se aumentarmos o raio r por um incremento de Δr, então o volume da casca é dado por ΔV. Usando aproximação linear:

$$\Delta V \approx 2\pi r h \Delta r$$

e logo

$$\Delta V \approx 2\pi rh\Delta r$$

$\boxed{b}$ O volume exato da casca cilíndrica é dado por:

$$\Delta V = \pi(r+\Delta r)^2 h - \pi r^2 h$$

que simplificando fica

$$\Delta V = 2\pi rh\Delta r + \pi h(\Delta r)^2$$

Fazendo a diferença entre as duas fórmulas do volume temos que o erro E é dado por:

$$E = \pi h(\Delta r)^2$$

E logo temos que o erro é pequeno se Δr for suficientemente pequeno.

Exercícios

Ex. 4.20 — Mostre que a linearização de $f(x) = (1+x)^k emx = 0L(x) = 1 + kx$.

Ex. 4.21 — Dados $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $x_0 = 8,7$, escolha um valor inteiro próximo a x_0 tal que $f(x_0)$ e $f'(x_0)$ sejam fáceis de calcular, e calcule uma linearização da função neste ponto.

Capítulo 5

Aplicações de Derivadas

Neste capítulo vamos apresentar diversas aplicações do conceito de derivada. Primeiramente, vamos entender quais informações a derivada nos fornece sobre o gráfico de funções. Utilizaremos essa informação para esboçar e compreender o gráfico de funções. Também apresentaremos a utilização do cenceito de da derivada na solução de problemas de otimização.

Neste capítulo:

5.1 Valores Extremos

5.1.1 Extremos Absolutos

5.1 Definição 1.

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ e função $f : I \to \mathbb{R}$.

- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de máximo global (ou absoluto)** de f, se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é **máximo global**.
- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de mínimo global** de f, se $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é **mínimo global**.
- Um ponto $x_0 \in I$ será dito um **ponto extremo global**, se x_0 for um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global.

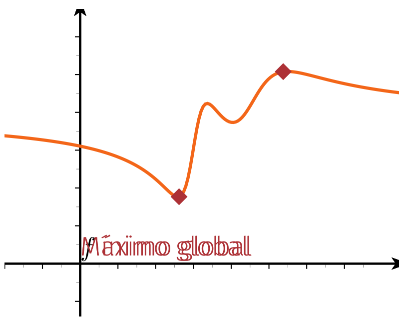
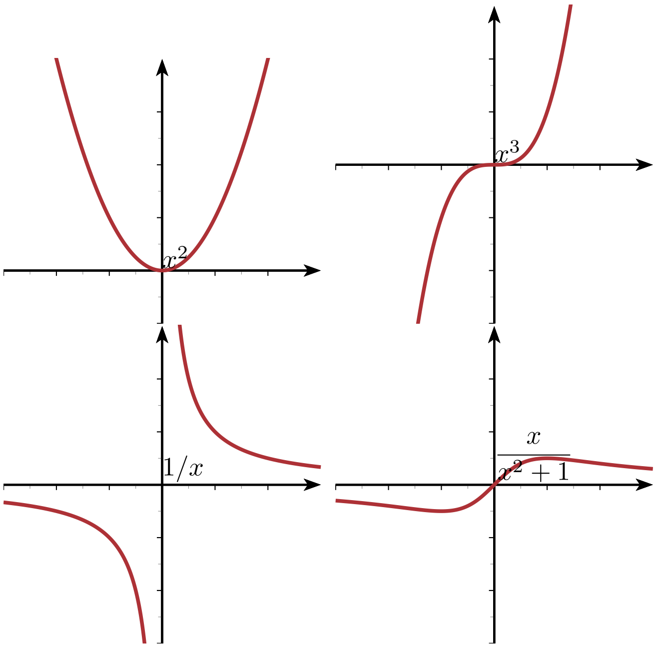


Figura 5.1 O ponto A é um ponto de mínimo e D é um ponto de máximo.

Exemplo 5.2 Determine os extremos das seguintes funções analisando seus gráficos: (a) x^2 (b) x^3 (c) $1/x$ (d) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$



Solução $\boxed{a}$ A função x^2 possui um mínimo em $x = 0$ e não possui máximo;. $\boxed{b}$ A função x^3 não possui máximo e mínimo. $\boxed{c}$ A função $1/x$ não possui máximo e mínimo. $\boxed{c}$ A função $\dfrac{x}{x^2+1}$ possui máximo e mínimo. ■

Exemplo 5.3 Utilizando os gráficos da Figura Determine os extremos das seguintes funções nos intervalos especificados: $\boxed{a}$ x^2 em $[-1, 2]$ $\boxed{b}$ x^2 em $(-1, 2)$

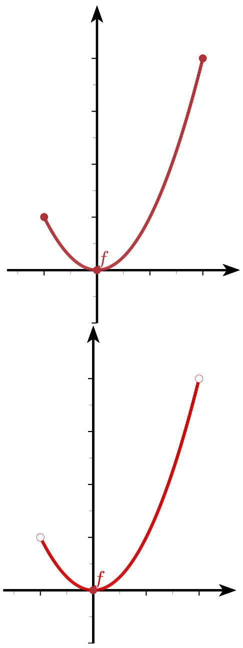


Figura 5.2 Gráficos de x^2 em $[-1, 2]$ e $(-1, 2)$

Solução $\boxed{a}$ Pelos gráficos da Figura 5.2, temos que o máximo de x^2 em $[-1,2]$ ocorre em $x = 2$. O valor máximo que a função atinge é $f(2) = 4$. $\boxed{b}$ Pelos gráficos da Figura 5.2, temos a função x^2 em $(-1,2)$ não possui máximo $x = 2$. Um modo de ver isso é por redução ao absurdo. Suponha que tivesse um máximo em a, que podemos supor maior que 0, se tomarmos valor b entre a e 2 a função será maior em b, pois a função é crescente em $[0,2)$. O que levaria a um absurdo e logo a função não possui máximo. Porque esse argumento não funciona no item anterior? ■

5.1.2 Extremos Relativos

5.4 Definição 1.

Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.

- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de máximo local** de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é um **máximo local**.
- Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de mínimo local** de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é **mínimo local**.
- Um ponto $x_0 \in I$ será dito um **ponto extremo local**, se x_0 for um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local.

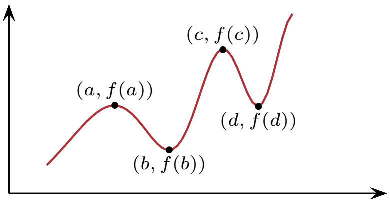


Figura 5.3 Extremos relativos

A função f possui máximos relativos nos pontos a e c e mínimos relativos nos pontos b e d. Observe que $f(d) > f(a)$, ou seja, o valor de uma função em um mínimo relativo pode ser maior que o valor num máximo relativo.

O objetivo desta seção é utilizar a diferenciabilidade para localizar os valores extremais da função.

5.5 Teorema 1. : Teorema de Fermat

Se f é uma função definida no intervalo aberto (a, b) e x é um ponto extremo de f em (a, b) então ou f não é diferenciável em x ou $f'(x) = 0$.

Demonstração. Suponha que f é diferenciável em x_0 e que x_0 é um máximo local (uma prova similar pode ser feita quando x_0 é um mínimo local). Então $\exists \delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ e tal que $f(x_0) \geq f(x) \forall x$ para todo x satisfazendo $|x - x_0| < \delta$. Logo, para qualquer $h \in (0, \delta)$ temos que:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Tomando o limite $h \to 0$ temos que $f'(x_0) \leq 0$. Por outro lado para $h \in (-\delta, 0)$ temos que

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Novamente, tomando o limite $h \to 0$ temos que $f'(x_0) \geq 0$ Logo $f'(x_0) = 0$. ∎

Observação 6. *A recíproca não é necessariamente verdadeira. Seja* $f(x) = x^3$ *que está definida em todo* $x \in \mathbb{R}$. *Logo* $f'(x) = 3x^2$. *Portanto* $f'(0) = 0$. *Porém* 0 *não é um ponto nem de máximo nem de mínimo para a função* f *em qualquer intervalo* (a, b) *que contenha o* 0.

5.7 **Definição 1.**

O ponto $p \in \operatorname{Dom} f$ é um ponto crítico de f se $f'(p) = 0$ ou se a derivada de f no ponto p não existir. Neste caso, o valor $f(p)$ é chamado valor crítico da função f.

Note que é necessário que exista $f(p)$, a fim de p ser um ponto crítico. Este é um ponto importante, e muitas vezes esquecido.

Exemplo 5.8 Determine os pontos críticos da função $y = 3x + 2\cos(3x)$.

Solução A derivada é dada por

$$y' = 3 - 6 \operatorname{sen} 3x$$

Os pontos críticos ocorrem quando

$$\operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2}$$

Ou seja, quando

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad 3x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja quando

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \quad 3x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \quad k \in \mathbb{Z}$$

■

Exemplo 5.9 Determine os pontos críticos da função $g(x) = x - x^{1/3}$.

Solução Derivando temos que $g'(x) = 1 - 1/3x^{-2/3}$. Ou seja, $g'(x) = 1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Simplificando, temos:

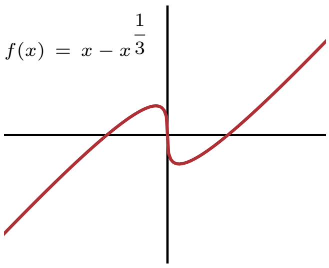
$$g'(x) = 1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{3\sqrt[3]{x^2} - 1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

e assim os pontos críticos são:

$$x = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ e } x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

■

Exemplo 5.10 Determine os pontos críticos da função $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-x-6}$.



Solução ■

5.1.3 Extremos em Intervalos Fechados

O Teorema de Weierstrass 5.1.3 afirma que uma função contínua em um intervalo fechado atinge valor máximo e um mínimo global, mas não diz como encontrar esses valores extremos. Notemos que o valor extremo ou ocorre num ponto crítico ou ocorre em um extremo do intervalo.

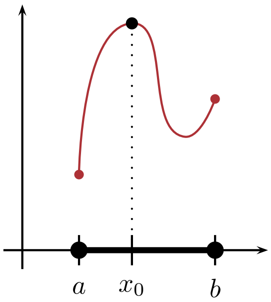
> **5.11 Teorema 1. : Teorema de Weierstrass ou do Valor Extremo**
>
> Se f for contínua em contínua em um intervalo fechado então f atinge valor máximo e um mínimo global nesse intervalo. Dito de outra maneira se f for contínua em $[a, b]$, então existirão $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que
>
> $$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Reunindo o Teorema de Weierstrass e o Teorema de Fermat, chegamos ao seguinte

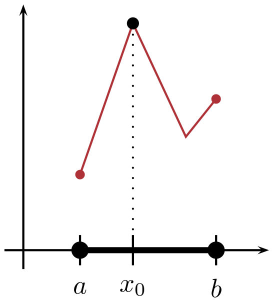
5.12 Teorema 1.

Se f é continua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$, então f tem pontos de máximo e de mínimo em $[a, b]$. Mais ainda, os únicos possíveis pontos extremais da função f são:

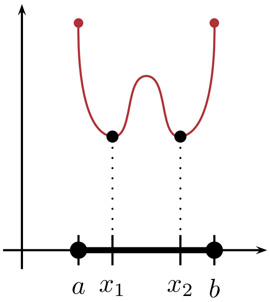
1. pontos críticos de f;
2. os extremos do intervalo fechado $[a, b]$, isto é a ou b.



x_0 um máximo interior,
$f'(x_0) = 0$.
Sem pontos de mínimo interior.



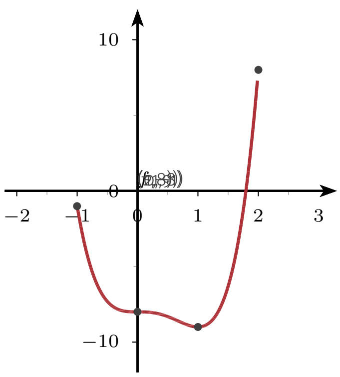
x_0 um máximo interior,
$f'(x_0)$ não existe.
Sem pontos de mínimo interior.



x_1, x_2 mínimos,
$f'(x_1), f(x_2) = 0$.
Sem pontos de máximo interior.

Figura 5.4 Os extremos no interior do intervalo devem ocorrer nos pontos onde f' é zero ou não existe.

Exemplo 5.13 Ache os extremos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 8$ em $[-1, 2]$.



Solução Como f é diferenciável, os pontos críticos ocorrem quando $f'(x) = 0$. Calculando a derivada temos:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

resolvendo

$$12x^3 - 12x^2 = 0$$

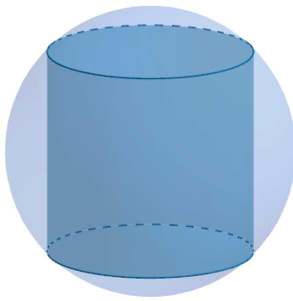
temos que a derivada se anula em $x = 0$ e $x = 1$. Logo os candidatos a pontos de extremos são $-1, 0, 1, 2$. Calculando o valor da função nesses pontos temos:

$$f(-1) = -1$$
$$f(0) = -8$$
$$f(1) = -9$$
$$f(2) = 8$$

Logo, $x = 2$ é o ponto de máximo e $x = 1$ é o ponto de mínimo. ■

Exemplo 5.14 Um fazendeiro deseja construir um curral e possui 500m de cerca linear. O local onde deseja construir o curral faz divisa com um edifício e assim não será necessário qualquer cerca neste lado. Quais são as dimensões do curral que vai encerrar a maior área.

Exemplo 5.15 Determine a razão entre a altura e o diâmetro da base do cilindro de volume máximo que pode ser inscrito numa esfera de raio R.



Solução O volume do cilindro é dado por

$$V = \pi r^2 h$$

e por Pitágoras temos a seguinte relação entre o raio e a altura:

$$r^2 + (h/2)^2 = R^2$$

Logo a expressão do volume em função da altura é

$$V(h) = \pi h(R^2 - (h/2)^2) = -((h^3\pi)/4) + h\pi R^2$$

Como o cilindro está contido na esfera, temos que os valores de h estão no intervalo $[0, R]$. Assim, temos um problema de extremos em um intervalo fechado, e consequentemente temos a existência de um máximo. Esse máximo ocorrerá ou nos pontos extremos do intervalo ou nos pontos críticos. Como $V(h)$ é diferenciável, os pontos críticos são os pontos de derivada iguais a 0. Derivando

$$V'(h) = -((h^2\pi)/2) + \pi(-(h^2/4) + R^2)$$

Resolvendo $V'(h) = 0$ temos:

$$h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Como

$$r^2 + (h/2)^2 = R^2$$

temos que

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

e assim

$$\frac{h}{r} = \sqrt{2}$$

■

Exercícios

Ex. 5.1 — Suponha que f seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$

1. f possui máximos e mínimos globais nesse intervalo? Justifique?
2. Como podemos encontrar esses pontos?

Ex. 5.2 — Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de f no intervalo dado:

1. $f(x) = \frac{x^4-4}{x^2+1}$ no intervalo $[-4, 4]$
2. $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ no intervalo $[-1, 2]$
3. xe^{-x} no intervalo $[0, 2]$
4. $\frac{\ln(x)}{x}$ no intervalo $[1, 3]$

Ex. 5.3 — Prove que a função $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ não tem máximos nem mínimos locais.

Ex. 5.4 — Encontre os valores máximos e mínimos **globais** de f no intervalo dado:

1. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ no intervalo $[-3, 2]$
2. $g(x) = \frac{x}{x+1}$ no intervalo $[1, 2]$
3. $h(x) = \sqrt{9-x^2}$ no intervalo $[-1, 2]$
4. $f(t) = \operatorname{sen}(t) + \cos(t)$ no intervalo $[0, \pi/3]$
5. $f(x) = x - 3\ln(x)$ no intervalo $[1, 4]$
6. $h(t) = \ln(t)/t$ no intervalo $[1, 3]$

Ex. 5.5 — Suponha que f seja uma função contínua no intervalo (a, b)

1. Diga algumas condições para que f possua máximos e mínimos globais nesse intervalo? Justifique?

Ex. 5.6 — Encontre os valores máximos e mínimos **globais** de f (se existirem) no intervalo dado:

1. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ no intervalo $(0, \infty)$
2. $g(x) = \sqrt{9+x^2}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$

3. $h(x) = x^5 - 7x^2 + 2$ no intervalo $(-\infty, \infty)$

4. $k(x) = \ln(x) - x$ no intervalo $(0, \infty)$

5. $m(x) = 1/(x - x^2)$ no intervalo $(0, 1)$

Ex. 5.7 — Encontre o ponto da hipérbole $y^2 - x^2 = 4$ que está mais próximo do ponto $(2, 0)$.

Ex. 5.8 — Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

5.2 Teorema do Valor Médio

Sabemos que a derivada de uma função constante é zero. Pergunta-se se uma função cuja derivada seja sempre zero é constante. Ou, em outras palavras, se um corpo tem velocidade instantânea zero no intervalo de tempo dado por um intervalo, este encontra-se em repouso? Para responder perguntas deste tipo devemos aprender a extrair informação de uma função a partir da informação dada pela derivada da função. Informalmente, devemos utilizar a informação que a derivada nos da sobre o comportamento local da função para extrair informação sobre o comportamento global desta. O objetivo desta seção é, dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, encontrar condições sob as quais exista um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Intuitivamente, a equação acima nos diz que existe um instante de tempo c no qual a velocidade instantânea de um objeto (informação local) é igual à velocidade média do objeto no intervalo de tempo $[a, b]$ (informação global). Como veremos muitos dos resultados deste capítulo dependem desse fato central, que é denominado Teorema do Valor Médio. Começaremos com um caso especial do Teorema do Valor Médio conhecido como teorema de Rolle.

5.1 **Teorema 2. : Teorema de Rolle**

Seja f uma função continua no intervalo fechado $[a, b]$, diferenciável no intervalo aberto (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração. Como f é contínua em $[a, b]$, temos que f atinge um máximo M em $x_1 \in [a, b]$ e um mínimos m, em algum $x_2 \in [a, b]$. Suponha x_1 e x_2 são ambos pontos finais de $[a, b]$. Como $f(a) = f(b)$

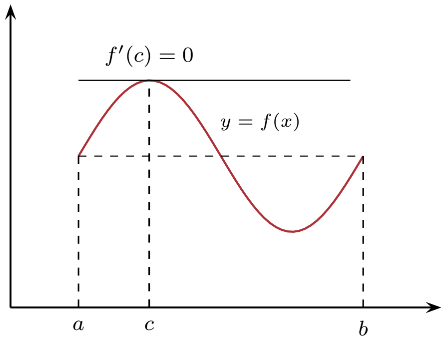


Figura 5.5 Teorema de Rolle

temos que e $m = M$ e assim f é constante em $[a, b]$. Consequentemente $f'(x_i) = 0$ para todo $x_i \in (a, b)$. Suponha x_1 não é um ponto final de $[a, b]$. Então $x_1 \in (a, b)$ e f tem um máximo local em x_1 . E o resultado segue a partir do fato que a derivada num ponto de máximo ou mínimo é zero. Da mesma forma, suponha x_2 não é um ponto final de $[a, b]$. Então $x_2 \in (a, b)$ e f tem um mínimo local em x_2. E o resultado segue a partir do fato que a derivada num ponto de máximo ou mínimo é zero. ■

Exemplo 5.2 Mostre que $x^3 - x$ possui uma raiz em $[-1, 1]$.

5.3 **Teorema 2. : Teorema do Valor Médio**

. Seja f uma função continua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

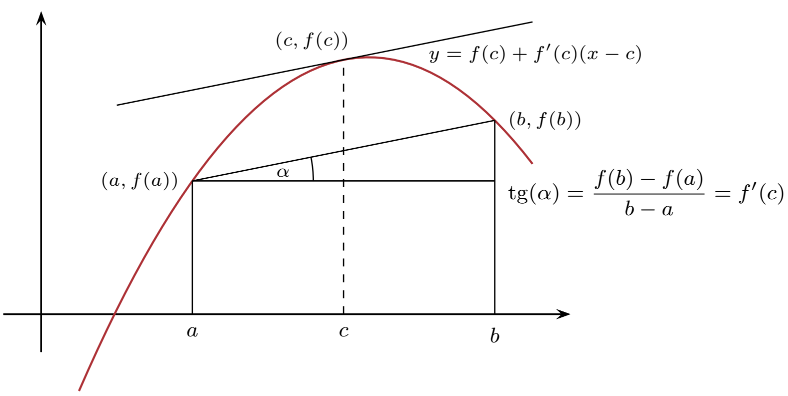


Figura 5.6 Teorema do Valor Médio

Demonstração. A equação da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada por

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Definamos a função auxiliar

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Começamos observando que $h(x)$ é contínua em $[a, b]$ pois é soma da função contínua f e um polinômio de grau 1. Analogamente, temos que a função $h(x)$ é diferenciável em (a, b). Finalmente é imediato da definição de h que $h(a) = h(b) = 0$. Logo, pelo teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

5.4 **Teorema 2. :** Teorema do Valor Médio de Cauchy

Sejam f e g funções continuas no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciáveis no intervalo aberto (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a}.f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.g'(c).$$

Demonstração. O resultado pode ser demonstrado utilizando o Teorema do Valor Médio para a função

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

E observando que

$$\begin{aligned} h(a) =& [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) \\ =& f(b)g(a) - g(b)f(a) \\ =& [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) \\ =& h(b) \end{aligned}$$

e assim $h'(c) = 0$ para algum ponto $c \in (a, b)$. Diferenciando h o resultado segue.. ■

5.2.1 ⋆ Teorema do Valor Médio de Cauchy Generalizado

5.5 **Teorema 2.** : Teorema do Valor Médio de Cauchy Generalizado

Sejam f e g funções definidas num intervalo fechado $[a,b]$ que são n-vezes diferenciáveis em (a,b) e cujas primeiras $n-1$ derivadas são contínuas em $[a,b]$. Suponha $c \in [a,b]$. Então para cada $x \neq c$ in $[a,b]$ existe x_1 no intervalo c e x_1 tal que

$$\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right) g^{(n)}(x_1)$$
$$= f^{(n)}(x_1)\left(g(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right)$$

Demonstração. Por simplicidade assumiremos $c < b$ e $x > c$. Com x fixo considere

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$
$$G(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

para cada $t \in [c,x]$. Então f e g são contínuas em $[c,x]$ e deriváveis em (c,x). Pelo Teorema do Valor Médio

$$F'(x_1)[G(x) - G(c)] = G'(x_1)[F(x) - F(c)]$$

para $x_1 \in (c,x)$. Logo

$$F'(x_1)[g(x) - G(c)] = G'(x_1)[f(x) - F(c)]$$

pois $F(x) = f(x), G(x) = g(x)$. Simplificando os termos de sinais opostos temos que

$$F'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)$$
$$G'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t)$$

que fornece a fórmula desejada quando $t = x_1$. ■

5.2.2 Consequências do Teorema do Valor Médio

5.6 **Teorema 2.**

Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, então f é constante no intervalo

(a, b).

Demonstração. Sejam x_1 e $x_2 \in (a, b)$, com $x_1 < x_2$. Como $f'(x) = 0$ em (a, b) temos que f é continua no intervalo $[x_1, x_2]$ e diferenciável em (x_1, x_2). Aplicando o Teorema do Valor Médio, temos que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Como $f'(x) = 0$ para todo x, temos que $f'(c) = 0$ e assim

$$f(x_2) = f(x_1)$$

■

O teorema acima responde de forma explícita e positiva a pergunta feita ao começo desta seção: um corpo cuja velocidade instantânea é zero no intervalo de tempo dado encontra-se em repouso.

5.7 Corolário 2.

Sejam f e g funções continuas no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciáveis no intervalo aberto (a, b) tal que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Então, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + K$$

para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração. Considere a função $F(x) = f(x) - g(x)$. Então $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para todo x em (a, b). E logo $f - g$ é constante. ■

No corolário acima, é fundamental que o domínio de f seja um intervalo para que o resultado seja válido. Um contra-exemplo é a função $f(x) = \frac{x}{|x|}$ pois $f'(x) = 0$ em todo ponto do domínio mas a função f não é constante. Isso ocorre pois o domínio de f não é um intervalo.

Exemplo 5.8 Mostre que $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \pi/2$.

Solução Calculando a derivada de $\operatorname{arcsen} x + \arccos x$ temos:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

Logo

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = K$$

em $x = 0$ temos

$$\operatorname{arcsen} 0 + \arccos 0 = K$$

e logo $K = \frac{\pi}{2}$. ■

5.3 Funções Crescentes e Decrescentes

5.1 Definição 3.

Uma função f é **crescente** no intervalo dado I se para quaisquer par $a, b \in I$ com $a < b$ tem-se que $f(a) < f(b)$. A função f é decrescente em I se para quaisquer $a, b \in I$ com $a < b$ tem-se que $f(a) > f(b)$.

O seguinte resultado nos da um critério utilizando o sinal da derivada da função para determinar os intervalos de crescimento e decrescimento desta.

5.2 Proposição 3.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e seja $I \subset D$ um intervalo. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é crescente em I. Por outro lado, se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é decrescente em I.

Demonstração. Aplicando o Teorema do Valor Médio a f em $[x_1, x_2]$, existe um $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ devemos ter que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Logo f é crescente. A prova do outro caso é análoga. ■

Exemplo 5.3 Determine os pontos para os quais $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$ é crescente e decrescente. Utilizando essa informação esboce o gráfico.

Solução Seja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$, então $f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Como f' é positiva em $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ e f' é negativa em $(1, 2)$ podemos concluir pelo corolário anterior que a função f é

1. crescente em $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$
2. decrescente em $(1, 2)$.

■

Exemplo 5.4 Determine os pontos para os quais $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ é crescente e decrescente.

Solução A função não está definida em $x = -1$ e $x = 1$ A derivada de f é:

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^4}$$

Como o denominador é sempre positivo, e o numerador é positivo em $(0, \infty)$. Assim a derivada é positiva $(0, \infty)$. De modo similar, podemos concluir que a derivada é negativa em $(-\infty, 0)$. Ou seja:

1. crescente em $(0, \infty)$
2. decrescente em $(-\infty, 0)$.

■

5.3.1 Teste da derivada primeira para a determinação de máximos e mínimos

Utilizando apenas a informação da derivada primeira é possível determinar se um determinado ponto crítico de uma função f é:

- um ponto de máximo local,
- um ponto de mínimo local
- nem ponto de máximo nem ponto de mínimo local.

5.5 Teorema 3.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $x \in I$ um ponto crítico de f.Então,

a. Se $f' > 0$ no intervalo $(x-\varepsilon, x)$ à esquerda de x e se $f' < 0$ no intervalo $(x, x+\varepsilon)$ à direita de x, então x é um ponto de máximo local.

b. Se $f' < 0$ no intervalo $(x-\varepsilon, x)$ à esquerda de x e se $f' > 0$ no intervalo $(x, x+\varepsilon)$ à direita de x, então x é um ponto de mínimo local.

[c] Se f' tem o mesmo sinal no intervalo $(x-\varepsilon, x)$ à esquerda de x e no intervalo $(x, x+\varepsilon)$ à direita de x, então x não é nem ponto de máximo nem ponto de mínimo local.

Demonstração. Vamos provar o [a].

Sejam x_1 e x_2 em I e suponha que $x_1 < x_2$. Agora, usando o Teorema do Valor Médio em

$$[x_1, x_2]$$

temos que existe um número c tal que $x_1 < c < x_2$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f(c)(x_2 - x_1).$$

Como $x_1 < c < x_2$ sabemos que c também deve estar em I, sabemos que $f(c) > 0$ e também sabemos que $x_2 - x_1 > 0$

Logo temos que

$$f(x_2) - f(x_1) > 0.$$

Reescrevndo a expressão anterior temos que $f(x_1) < f(x_2)$ e assim, por definição $f(x)$ deve ser crescente em I. ■

Exemplo 5.6 Ache os máximos e mínimos locais de $f(x) = x^{1/3}(8-x)$

Exercícios

Ex. 5.9 — Prove que a função $2x^5 + x^3 + 2x$ é crescente em todos os pontos.

Ex. 5.10 — Determine os intervalos nos quais $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ é crescente e nos quais é decrescente.

Ex. 5.11 — Determine os intervalos nos quais $f(x) = e^{-x^2/2}$ é crescente e nos quais é decrescente.

Ex. 5.12 — Nos exercícios a seguir uma função é dada. Para essa função

[1] Calcule o domínio de f

[2] Encontre os pontos e valores críticos.

[3] Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento.

[4] Use o teste da primeira derivada para dizer se os pontos críticos são de máximo ou mínimo local ou nenhuma dessas opções.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 5$
2. $f(x) = \cos x$

3. $f(x) = \operatorname{tg} x$
4. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 1$
5. $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$
6. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
8. $f(x) = x^2 + 2x - 3$
9. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$
11. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$
12. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x - 8}$
13. $f(x) = \dfrac{(x-2)^{2/3}}{x}$
14. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ em $(-\pi, \pi)$.

5.4 Concavidade

Uma função fé côncava para cima no intervalo dado I se para quaisquer par de pontos $a, b \in I$, o segmento que conecta $(a, f(a))$ com $(b, f(b))$ estiver acima do gráfico de f. De modo análogo, uma função f é dita **côncava para baixo** no intervalo dado I se para quaisquer par de pontos $a, b \in I$, o segmento que conecta $(a, f(a))$ com $(b, f(b))$ estiver abaixo do gráfico de f. Mais formalmente,

5.1 Definição 4.

Uma função f é dita **côncava para cima** no intervalo I se para quaisquer terna de pontos $a, x, b \in I$ com $a < x < b$ temos que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Uma função f é **côncava para baixo** no intervalo I se para quaisquer terna de pontos $a, x, b \in I$ com $a < x < b$ temos que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

5.2 Teorema 4. : Teste da Concavidade

- Se $f'' > 0$ no intervalo I, então f é côncava para cima em I.

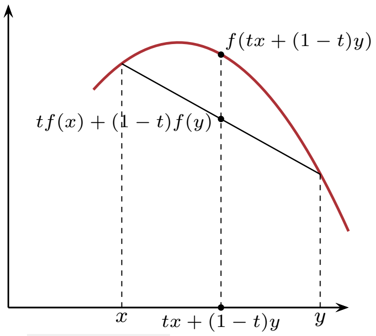


Figura 5.7 Função concava

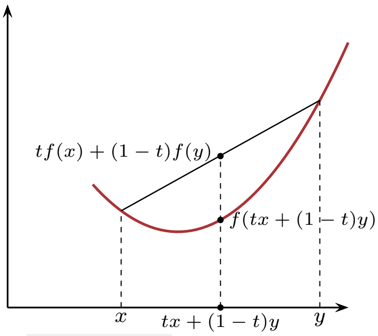


Figura 5.8 Função côncava para cima

- Se $f'' < 0$ no intervalo I, então f é côncava em I.

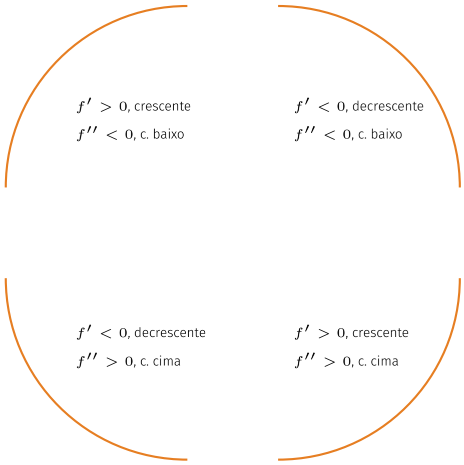


Figura 5.9 Os quatro modos que a concavidade interage com o crescimento/decrescimento

Exemplo 5.3 Estude a concavidade de $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ e esboce o gráfico.

Solução Começamos calculando as duas primeiras derivadas $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e $f''(x) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Como $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ para todo x, o sinal de f'' é dado pelo sinal de $x^2 - 1$. Portanto,

- $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty) \Rightarrow f$ é côncava para cima em $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$,
- $f''(x) < 0$ em $(-1, 1) \Rightarrow f$ é côncava para baixo em $(-1, 1)$.

■

5.4.1 Pontos de inflexão

Um ponto p é um ponto de inflexão de f se p é um ponto no qual a concavidade da função muda.

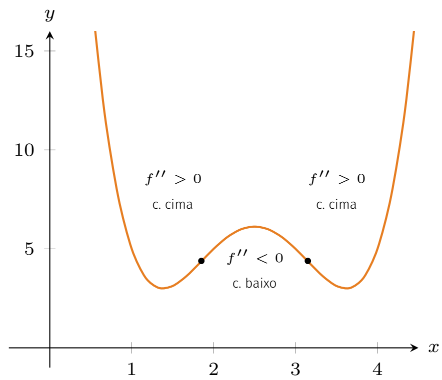


Figura 5.10 Pontos de Inflexão

5.4 Definição 4.

Seja f uma função contínua em $p \in D_f$. Diremos que p é **ponto de inflexão de** f se f é côncava para baixo em $(p-\varepsilon, p)$ e f é côncava para cima em $(p, p+\varepsilon)$, ou se f é côncava para cima em $(p-\varepsilon, p)$ e f é côncava para baixo em $(p, p+\varepsilon)$.

5.5 Teorema 4.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $a, b, c \in I$ tal que $a \in (b, c) \subset I$. Se o sinal de f'' em $(b, a)$for diferente do sinal de f'' em (a, c) então a é um ponto de inflexão de f.

Exemplo 5.6 Mostre que $f(x) = x^n$ possui um ponto de inflexão na origem se n for ímpar.

5.4.2 Teste da derivada segunda para a determinação de máximos e mínimos

Se a função analisada for duas vezes diferenciáveis há critérios bem simples para a determinação de máximos e mínimos locais. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função dada.

5.7 Teorema 4.

Seja f uma função duas vezes diferenciável com segunda derivada contínua num intervalo aberto contendo o ponto a e com $f'(a) = 0$. Então:

- $\boxed{a}$ Se $f''(a) < 0$, então f tem um ponto de máximo local em a.
- $\boxed{b}$ Se $f''(a) > 0$, então f tem um ponto de mínimo local em a;

Demonstração. Vamos provar apenas o item $\boxed{a}$. A demonstração do item $\boxed{b}$ é análoga.

Primeiro, uma vez que estamos assumindo que $f(x)$ é contínua em um intervalo em torno de $x = c$, então podemos assumir que $f(c) < 0$ em algum intervalo aberto, digamos (a, b) em torno de $x = c$, ou seja, $a < c < b$.

Agora seja x tal que $a < x < c$, vamos usar o Teorema do Valor Médio em $[x, c]$. No entanto, em vez de usá-lo na própria função, vamos usá-lo para a primeira derivada. Então, o Teorema do Valor Médio nos diz que existe um número $x < d < c$ de tal modo que,

$$f(c) - f(x) = f(d)(c - x)$$

Agora, como $a < x < d < c$ sabemos que $f(d) < 0$ e também sabemos que $c - x > 0$ e assim obtemos que $f(c) - f(x) < 0$.

No entanto, também assumimos que $f(c) = 0$ e logo $-f(x) < 0$ e assim $f(x) > 0$.

Ou, em outras palavras, à esquerda de $x = c$ a função está aumentando.

Vamos agora analisar o outro lado. Para isso seja x tal que $c < x < b$ e usando o Teorema do Valor Médio em $[c, x]$ e para a primeira derivada temos que existe um número $c < d < x$ de tal modo que,

$$f(x) - f(c) = f(d)(x - c)$$

Agora, como $c < d < x < b$ temos que $f(d) < 0$ e também sabemos que $x - c > 0$ e assim,

$$f(x) - f(c) < 0$$

Novamente, usando o fato que $f(c) = 0$ obtemos que $f(x) < 0$.

Assim à direita de $x = c$ a função está diminuindo.

Então, à esquerda de $x = c$ a função está aumentando e à direita de $x = c$ a função está diminuindo, portanto, pelo teste da primeira derivada, isso significa que $x = c$ deve ser um máximo relativo. ■

Exemplo 5.8 Determine os pontos críticos da função f e classifique-os (pontos máximo, mínimo local) sendo

$\boxed{a}$ $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3;$ $\boxed{b}$ $f(x) = x^2 e^{-5x}.$

Solução $\boxed{a}$ Temos $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4)$. Portanto, $x = -1$, $x = 0$ e $x = 4$ são os pontos críticos de f. Como $f''(-1) = 5$, $f''(0) = -4$ e $f''(4) = 20$ concluímos que 0 é ponto de máximo e -1 e 4 são pontos de mínimo. $\boxed{b}$ $x = 0$ é ponto de máximo e $x = \dfrac{2}{5}$ é ponto de mínimo. ■

Exemplo 5.9 Seja a função $f(x) = (x - 1)^3 + 1$. Analise seus pontos críticos.

Solução Temos $f'(x) = 3(x - 1)^2$; Logo, $f'(x) = 0 \iff x = 1$. Ainda, $f''(x) = 6(x - 1) = 0 \iff x = 1$. Assim, $f'(1) = f''(1) = 0$ e, neste caso, o critério falha. Devemos então analisar a concavidade de f numa vizinhança do ponto $x = 1 : f''(x) = 6(x - 1) > 0 \iff x > 1$ e $f''(x) = 6(x - 1) < 0 \iff x < 1$ portanto, a curva muda de concavidade no ponto $\implies x = 1$ é um ponto de inflexão. A função f não tem pontos de máximo ou mínimo locais em $\mathbb{R}$,uma vez que $f'(x) = 3(x-1)^2 > 0$ para $x \neq 1$, o que implica que f é monótona crescente. Se f estivesse definida num intervalo fechado $[a, b]$ então, f teria um ponto de mínimo absoluto em $x = a$ e um ponto de máximo absoluto em $x = b$.■

Exercícios

Ex. 5.13 — Esboce o gráfico de uma função $f(x)$ que é :

1. Crescente, concava para cima em $(0, 1)$,
2. crescente, concava para baixo em $(1, 2)$,
3. decrescente, concava para baixo em $(2, 3)$ e
4. crescente, concava para baixo em $(3, 4)$.

Ex. 5.14 — Encontre os valores de c tal que o gráfico de

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + cx^2 + 2x + 2$$

seja côncavo para cima em todos os pontos.

Ex. 5.15 — Mostre que a função $f(x) = x|x|$ tem um ponto de inflexão em $(0, 0)$ mas que $f''(0)$ não exista.

Ex. 5.16 — É possível que uma função seja crescente e côncava para cima em $(0, \infty)$ com assíntota horizontal $y = 1$? Nesse caso, dê um esboço de tal função.

Ex. 5.17 — É possível que uma função seja crescente e côncava para baixo em $(0, \infty)$ com assíntota horizontal $y = 1$? Nesse caso, dê um esboço de tal função.

Ex. 5.18 — Nas próximas questões determine os pontos de inflexão e os intervalos para os quais as funções são concavas para cima e para baixo:

1. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
2. $f(x) = -x^2 - 5x + 7$
3. $f(x) = x^3 - x + 1$
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x + 5$
5. $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x + 3$
6. $f(x) = -3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 24x + 2$
7. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$
8. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
9. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$
10. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ on $(-\pi, \pi)$
11. $f(x) = x^2 e^x$
12. $f(x) = x^2 \ln x$

13. $f(x) = e^{-x^2}$

Ex. 5.19 — Nas próximas questões uma função $f(x)$ é dada. Encontre os pontos críticos de f e use o Teste da Segunda Derivada, quando possível, para determinar os extremos relativos.

1. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
2. $f(x) = -x^2 - 5x + 7$
3. $f(x) = x^3 - x + 1$
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x + 5$
5. $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x + 3$
6. $f(x) = -3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 24x + 2$
7. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$
8. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
9. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
10. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ on $(-\pi, \pi)$
11. $f(x) = x^2 e^x$
12. $f(x) = x^2 \ln x$
13. $f(x) = e^{-x^2}$

5.5 A Regra de L'Hôspital

Uma aplicação do Teorema do valor médio generalizado permite-nos simplificar o cálculo de limites da forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

quando $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0.$

Observação 1. *Começamos observando que não é possível aplicar a regra do quociente para calcular este tipo de limite já que o denominador converge a 0 quando x tende a a.*

Um resultado que permite em diversos casos simplificar o cálculo desses limites é conhecido como regra de L'Hôpital e converte a forma indeterminada dada em um limite envolvendo derivadas, que muitas vezes é mais fácil de calcular.

5.2 Teorema 5. : Regra de L'Hôspital

Sejam f e g funções diferenciáveis no intervalo aberto (a, b) tal que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to a^+} g(x) = 0.$$

Suponha, também, que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Se $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração. A partir da diferenciabilidade de f e g o Teorema do Valor Médio de Cauchy garante que para quaisquer dois pontos distintos x e y em I existe um ξ entre x e y tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g''(\xi)}$$

Então como $f(a) = g(a) = 0$:

$$\exists \xi \in (a \,..\, x) : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

O ξ depende de x e $\xi \to a$ quando $x \to a$. Além disso, $\xi \neq a$ quando $x > a$. E assim

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

■

Observação 3. *A regra de L'Hopital pode ser generalizada para os limites* $x \to p^+$, $x \to p^-$, $x \to +\infty$ *ou* $x \to -\infty$. *E para a indeterminação da forma* $\frac{\infty}{\infty}$, *ou seja para o caso:*

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty = \lim_{x\to p} g(x)$$

Para aplicar a regra de L'Hôspital no caso em que $x \to a$, as funções envolvidas devem ser diferenciáveis no intervalo aberto contendo o ponto a (exceto, tal vez, no próprio ponto a). **Isto sempre deve ser verificado!!**

Aplicando a Regra de L' Hôpital

Passo 1 Verifique que $\lim f(x)/g(x)$ é uma forma indeterminada do tipo $0/0$. Passo 2 Derive separadamente f e g. Passo 3 Encontre o limite de $f'(x)/g'(x)$. Se esse limite for finito, $+\infty$ ou $-\infty$, então ele é igual ao limite de f(x)/g(x).

Exemplo 5.4 Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{x}$.

Solução Como $\lim_{x\to 0} 1 - e^{2x} = 0$ e $\lim_{x\to 0} x = 0$ pela Regra de L'Hopital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^{2x})'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{-2e^{2x}}{1} = -2.$$

■

Exemplo 5.5 Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Solução Como $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$ e $\lim_{x \to 0} x = 0$ pela Regra de L'Hopital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

■

Exemplo 5.6 Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x}{\operatorname{sen}(x)}$ se existir.

Solução Note que $\lim_{x \to 0} x^2 + 2x = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$ e que as funções envolvidas são diferenciáveis em toda parte. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôspital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x + 2}{\cos(x)} = 2.$$

■

Exemplo 5.7 Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \operatorname{sen}(x)}$ se existir.

Solução Note que $\lim_{x \to 0} 1 - \cos(x) = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}(x) = 0$ e que as funções envolvidas são diferenciáveis em toda parte. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôspital.

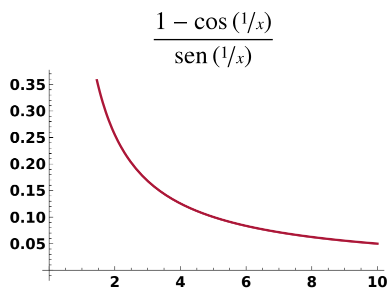
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x)}.$$

Note que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) + x \cos(x) = 0$ e que as funções envolvidas são diferenciáveis em toda parte. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôspital novamente.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x) + x \cos(x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{2.\cos(x) - x \operatorname{sen}(x)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto podemos concluir que $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{2}$. ■

Exemplo 5.8 Calcule $\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$ se existir.



Solução Observe que $1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ e que $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ são diferenciáveis para todo $x > 0$ e que ambas funções convergem para 0 quando $x \to \infty$.

Logo, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{-2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^{-2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}\\ &=\frac{\operatorname{sen}(0)}{\cos(0)}\\ &=0.\end{aligned}$$

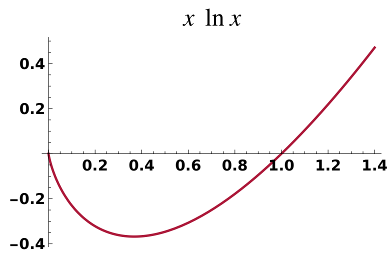
■

5.5.1 Diferenças e Produtos Indeterminados

No caso de produtos indeterminados utilizamos que $fg = f/1/g$ para transformar o produto em quociente. Essa estratégia é ilustrada nos exemplos a seguir.

Exemplo 5.9

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x$$



Solução

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} =$$

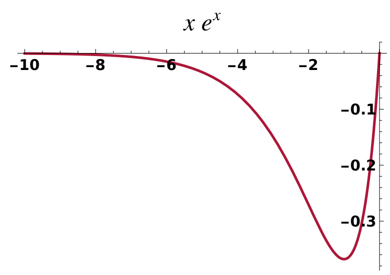
Utilizando L'Hopital temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x} &= \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to 0+}\frac{-x^2}{x}\\ &= \lim_{x\to 0+} -x = 0\end{aligned}$$

■

Exemplo 5.10

$$\lim_{x\to -\infty} xe^x$$



Solução

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}$$

Utilizando L'Hopital temos

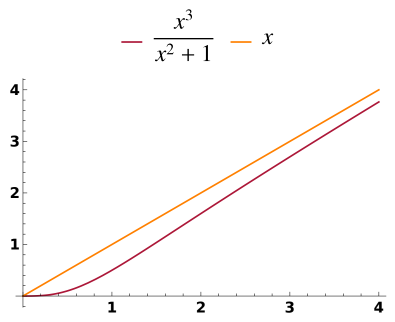
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$$

■

No caso de diferenças temos que manipular a expressão de modo a convertê-la num quociente ou num produto indeterminado:

Exemplo 5.11 Calcule

$$\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)$$



Solução

$$\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{x^2}{\operatorname{sen}x}\right)$$

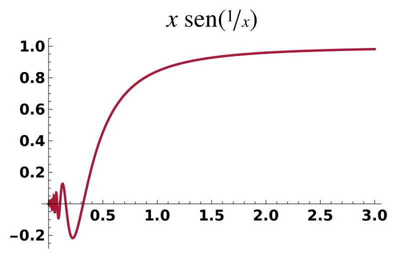
e

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{\operatorname{sen}x}=0$$

■

Exemplo 5.12 Calcule

$$\lim_{x\to\infty}x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$$



Solução

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\operatorname{sen}\frac{1}{x}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{1/x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^{-2}\cos\frac{1}{x}}{-x^{-2}}\\&=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}\\&=\cos\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)\\&=1.\end{aligned}$$

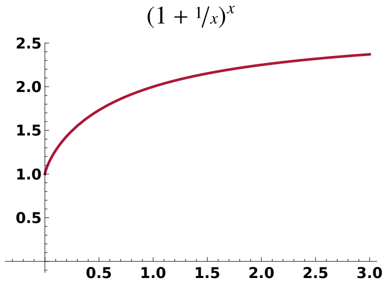
■

5.5.2 Potência Indeterminadas

Quando temos uma forma indeterminada que envolve uma potência, ou seja formas indeterminadas da forma 0^0, 1^∞ e ∞^0, em geral a estratégia a ser utilizada é aplicar o logaritmo natural: se $\lim_{x\to c}\ln\big(f(x)\big)=L$, então $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}e^{\ln(f(x))}=e^{\,L}$.

Exemplo 5.13

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$



Solução Temos uma forma indeterminada do tipo 1^∞. Seja $f(x) = (1+1/x)^x$. Desta forma queremos calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Começaremos calculando $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\big(f(x)\big)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ln\big(f(x)\big) &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \\
&= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}
\end{aligned}$$

Como temos uma forma indeterminada 0/0, logo, aplicando a Regra de L'Hopital:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot(-1/x^2)}{(-1/x^2)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

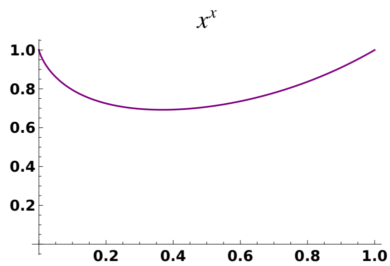
Logo $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\big(f(x)\big) = 1$. Voltando ao limite original

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(f(x))} = e^1 = e.$$

■

Exemplo 5.14

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$



Solução Temos uma forma indeterminada do tipo 0^0. Seja $f(x) = x^x$. Começaremos calculando $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\big(f(x)\big)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \ln\big(f(x)\big) &= \lim_{x\to 0^+} \ln\left(x^x\right) \\
&= \lim_{x\to 0^+} x\ln x \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}.
\end{aligned}$$

Como temos uma forma indeterminada $-\infty/\infty$, logo, aplicando a Regra de L'Hopital:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\big(f(x)\big) = 0$. Voltando ao limite original

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(f(x))} = e^0 = 1.$$

■

Exemplo 5.15 Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}.$$

Solução Se $y = x^{\operatorname{sen} x}$ então

$$\ln y = \ln(x^{\operatorname{sen} x}) = \operatorname{sen} x \ln x.$$

Agora calcularemos $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$. Como $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = \infty$, temos um forma indeterminada "$0\cdot\infty$". Para aplicar a regra de L'Hôpital, precisamos reescrever $\operatorname{sen} x \ln x$ como uma fração. Poderíamos escrever

$$\operatorname{sen} x \ln x = \frac{\operatorname{sen} x}{1/\ln x}$$

ou

$$\operatorname{sen} x \ln x = \frac{\ln x}{1/\operatorname{sen} x} = \frac{\ln x}{\csc x}.$$

Vamos considerar a primeira opção. Neste caso, aplicando a regra de L'Hôpital, obteríamos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{1/\ln x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{-1/(x(\ln x)^2)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} (-x(\ln x)^2 \cos x). \end{aligned}$$

Infelizmente, não temos apenas outra expressão envolvendo a forma indeterminada "$0\cdot\infty$", mas o novo limite é ainda mais complicado de avaliar do que aquele com o qual começamos. Em vez disso, tentamos a segunda opção:

$$\operatorname{sen} x \ln x = \frac{\ln x}{1/\operatorname{sen} x} = \frac{\ln x}{\csc x,}$$

e aplicando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\csc x \cot x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x \csc x \cot x}.\end{aligned}$$

Usando o fato de que $cscx = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ e $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, podemos reescrever a expressão do lado direito como

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} &= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot (-\operatorname{tg} x)\right]\\ &= \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0^+} (-\operatorname{tg} x)\right) = 1 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Concluímos que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = 0$. Portanto, como $\ln x$ é uma função contínua temos que $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0^+} y\right) = 0$ e assim

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1.$$

Por isso,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 1.$$

■

Exercícios

Ex. 5.20 — Calcule os seguintes limites usando L'Hopital quando possível

1. $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{4x^3 + x^2 + 3}{x^5 + 1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{100} - x^2 + x - 1}{x^{12} - 3}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^5}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^n}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x \operatorname{sen} \frac{a}{x}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \ln(x) \ln(x-1)$
9. $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x^{1/x}$

10. $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$
11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sec^3(x)}{1-\cos(x)}$
12. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^x$
13. $\lim_{x\to\infty} x^3e^{-4x}$
14. $\lim_{x\to 0+} x\ln x$
15. $\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$

Ex. 5.21 — Calcule os seguintes limites usando L'Hopital quando possível

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$ 3
2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-7x+10}$
3. $\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$
4. $\lim_{x\to\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\cos(2x)}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x+2}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}$
9. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x^2}$
10. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-x-1}{x^2}$
11. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$
12. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x}$
13. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$
14. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$
15. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2^x}$
16. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{3^x}$
17. $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-7x^2+15x-9}$
18. $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+4x^2+4x}{x^3+7x^2+16x+12}$
19. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$
20. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{x}$
21. $\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\ln x\right)^2}{x}$
22. $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x$
23. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot\ln x$
24. $\lim_{x\to\infty} x^3-x^2$
25. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}-\ln x$
26. $\lim_{x\to -\infty} xe^x$

Ex. 5.22 —

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$
2. $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}$
3. $\lim_{x\to 0^+} (2x)^x$
4. $\lim_{x\to 0^+} (2/x)^x$

5. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$ Dica Teorema do Confronto.
6. $\lim_{x\to 1^+} (1-x)^{1-x}$
7. $\lim_{x\to\infty} (x)^{1/x}$
8. $\lim_{x\to\infty} (1/x)^x$
9. $\lim_{x\to 1^+} (\ln x)^{1-x}$
10. $\lim_{x\to\infty} (1+x)^{1/x}$
11. $\lim_{x\to\infty} (1+x^2)^{1/x}$
12. $\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tg} x \cos x$
13. $\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tg} x \operatorname{sen}(2x)$
14. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$
15. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{5}{x^2-9} - \dfrac{x}{x-3}$
16. $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{tg}(1/x)$
17. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x}$
18. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{\ln x}$
19. $\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x}$

5.6 Assíntotas

Uma assíntota de uma curva é uma reta tal que a distância entre a curva e a reta tende a zero quando as coordenadas x ou y tendem ao infinito.

5.1 Definição 6.

A reta $x = a$ é uma **assíntota vertical** de uma função f se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

Exemplo 5.2 A reta $x = 3$ é assíntota vertical de $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$.

5.3 Definição 6.

A reta $y = L$ é chamada de **assíntota horizontal** para uma função

f se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Exemplo 5.4 A reta $y = 1$ é assíntota horizontal de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

5.5 **Definição 6.**

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

dizemos que a reta $y(x) = ax+b$ é uma **assíntota inclinada** à função f. Se $a = 0$ dizemos que $y(x) = b$ é uma assíntota horizontal à função f.

Como encontrar a e b?

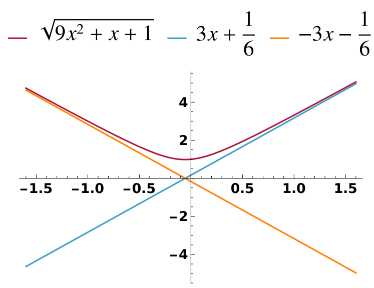
O coeficiente a é dado pelo valor do seguinte limite, se existir.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Uma vez encontrado o valor de a podemos utiliza-lo para encontrar o valor de b. O coeficiente b é dado pelo valor do seguinte limite, se existir.

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax).$$

Exemplo 5.6 Determine as assíntotas de $f(x) = \sqrt{9x^2+x+1}$ e esboce o gráfico.



Solução Antes de calcular os limites, faremos algumas simplificações

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{|x|\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} \tag{5.1}$$

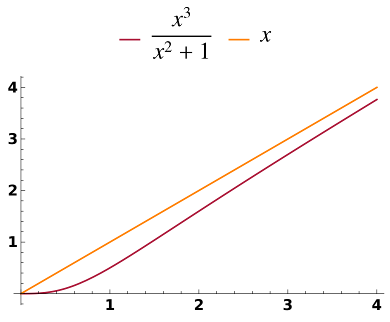
$$= \begin{cases} \sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \\ -\sqrt{9+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Primeiramente observamos que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 3$ e $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -3$. Assim $a = 3$ para $x \to +\infty$ e $a = -2$ para $x \to -\infty$. Determinemos agora n.

$$\lim_{x\to+\infty} [\sqrt{9x^2+x+1} - 3x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{9x^2+x+1}+3x} = \frac{1}{6}.$$

Logo, $y = 3x + \dfrac{1}{6}$ é assíntota para $x \to +\infty$. Analogamente vemos que $y = -3x - \dfrac{1}{6}$ é assíntota para $x \to -\infty$. ■

Exemplo 5.7 Determine as assíntotas de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.



Solução Como a função está definida em todos os pontos, pois x^2+1 nunca é 0, não há assíntota vertical. Uma vez que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, não há assíntotas horizontais. Fazendo a divisão de polinômios obtemos

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1},$$

então

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

Portanto, a reta $y = x$ é uma assíntota oblíqua. ■

5.6.1 Assíntotas e Funções Racionais

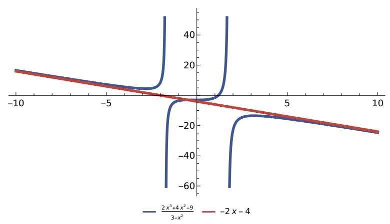
Uma função racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

- possui uma assíntota horizontal se o grau de $p(x)$ for menor ou igual que o grau de $q(x)$ pois nesse caso existem os limites quando $x \to \pm\infty$.
- possui uma assíntota inclinada ou oblíqua (não horizontal ou vertical) ocorre se o grau de $p(x)$ for exatamente 1 maior que o grau de $q(x)$. Para encontrar a equação da assíntota inclinada, use a divisão de polinômios dividindo $p(x)$ por $q(x)$ para obter um quociente $ax+b$ com um resto, $r(x)$. A assíntota inclinada ou oblíqua terá equação $y = ax + b$.
- **pode possuir** uma assíntota vertical nos pontos onde $q(x) = 0$.

Exemplo 5.8 Encontre a assíntota inclinada da seguinte função:

$$g(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 - 9}{3 - x^2}$$



Solução Fazendo a divisão de polinômios

$$\begin{array}{l}
\left(\quad 2x^3 + 4x^2 \qquad - 9\right) \div \left(-x^2 + 3\right) = -2x - 4 + \dfrac{6x+3}{-x^2+3} \\
\underline{-2x^3 \qquad\quad + 6x} \\
\qquad\quad 4x^2 + 6x \quad - 9 \\
\qquad \underline{-4x^2 \qquad\quad + 12} \\
\qquad\qquad\qquad 6x \quad + 3
\end{array}$$

Dessa forma temos que

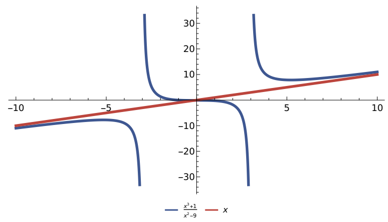
$$\frac{2x^3+4x^2-9}{3-x^2} = -2x - 4 + \frac{6x+3}{-3-x^2}$$

Como $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{6x+3}{-3-x^2} = 0$ temos, pela definição de assíntota que a assíntota inclinada de $g(x)$ é a reta $y = -2x - 4$ ■

Exemplo 5.9 Encontre as assíntotas (vertical, horizontal e/ou inclinada) para a seguinte função:

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-9}$$

Solução As assíntotas verticais podem ser encontradas igualando o denominador a zero $x^2 - 9 = 0$ e logo $x = -3$ ou $x = 3$.



A função não possui assíntotas horizontais pois os graus do numerador é maior que o do denominador.

Para calcular as assíntotas inclinada fazemos a divisão de polinômios

$$\begin{array}{l}
\left(\quad x^3 \qquad + 1\right) \div \left(x^2 - 9\right) = x + \dfrac{9x+1}{x^2-9} \\
\underline{-x^3 + 9x} \\
\qquad\quad 9x + 1
\end{array}$$

Dessa forma temos que

$$\frac{x^3+1}{x^2-9} = x + \frac{9x+1}{x^2-9}$$

Como $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{9x+1}{x^2-9} = 0$ temos, pela definição de assíntota que a assíntota inclinada de $g(x)$ é a reta $y = x$ ■

5.7 Esboço de Curvas

Utilizando os conceitos e resultados obtidos ao longo das últimas seções é possível fazer um esboço do gráfico de uma função que revelem os aspectos fundamentais das funções. A seguir apresentamos um roteiro que não pretende ser exaustivo. Isto é, o roteiro que apresentamos a seguir serve apenas como um guia já que cada função apresenta suas peculiaridades e seria inútil tentar apresentar um algoritmo que sirva para todas as funções.

Roteiro para a construção de gráficos

1. Encontrar o domínio $\mathrm{Dom}\, f$.
2. Calcular os pontos de intersecção com os eixos.
3. Encontrar os pontos críticos e os valores críticos.
4. Determine, quando possível, se f for par ou impar.
5. Determine intervalos de crescimento e decrescimento.
6. Encontre os máximos e mínimos de f.
7. Determine intervalos de concavidade e convexidade.
8. Determine os pontos de inflexão.
9. Encontre as assíntotas.
10. Faça o esboço do gráfico de f.

Observação 1.

1. *Conhecer as simetrias da função, isto é, se a função f é par ou impar ou periódica pode diminuir o trabalho a ser feito.*
2. *Distinga entre pontos de máximos e mínimos locais e globais.*
3. *Distinga entre assíntotas inclinadas, horizontais e inclinadas.*

Exemplo 5.2 Esboce o gráfico de $f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 7x + 5$.

Solução

1. O domínio de f é todos os reais; isto é $f(x)$ está definida para todo x.
2. Calculamos $f(0) = 5$. Não calculamos as raízes pois é um polinômio de grau 3.
3. Para determinar os valores críticos de f calculamos $f'(x) = 9x^2 - 20x + 7$. Usando a fórmula de Bhaskara temos que f' se anula em:
$$x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(9)(7)}}{2(9)} = \frac{1}{9}\left(10 \pm \sqrt{37}\right) \Rightarrow x \approx 0.435, 1.787.$$
4. Para determinar os pontos de inflexão de f calculamos $f''(x) = 18x - 20$. E logo
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 10/9 \approx 1.111.$$
5. Não existem assíntotas verticais.

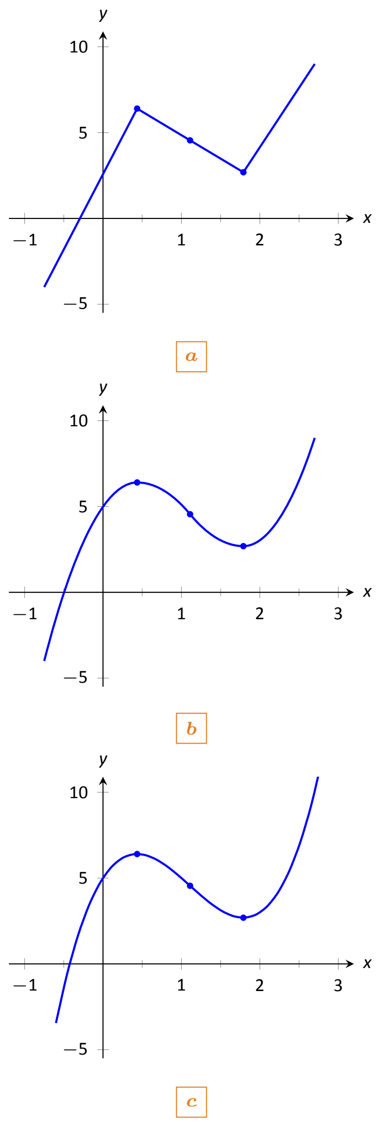


Figura 5.11 Esboço do gráfico de $f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 7x + 5$

6 Para determinar o comportamento assintótico para valores grandes calcularemos os limites de $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Logo não temos assíntotas horizontais

7 Marcamos os valores $x = (10 \pm \sqrt{37})/9$ e $x = 10/9$ na reta real, como na figura 5.12. Marcamos cada subintervalo no qual seja crescente ou decrescente, concava para cima ou para baixo.

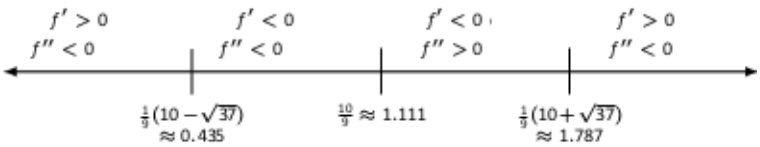


Figura 5.12 reta real para a função f do Exemplo 2.

8 Nós colocamos os pontos apropriados no eixo como mostrado na Figura 5.11(a) e conectamos os pontos com linhas retas. Na Figura 5.11(b) nós ajustamos essas linhas para demonstrar a concavidade adequada. Nossa curva cruza o eixo y em y = 5 e atravessa a x eixo perto de $x = -0.424$. Na Figura 5.11(c) mostramos um gráfico de f desenhado com um programa de computador, verificando a precisão do nosso esboço.

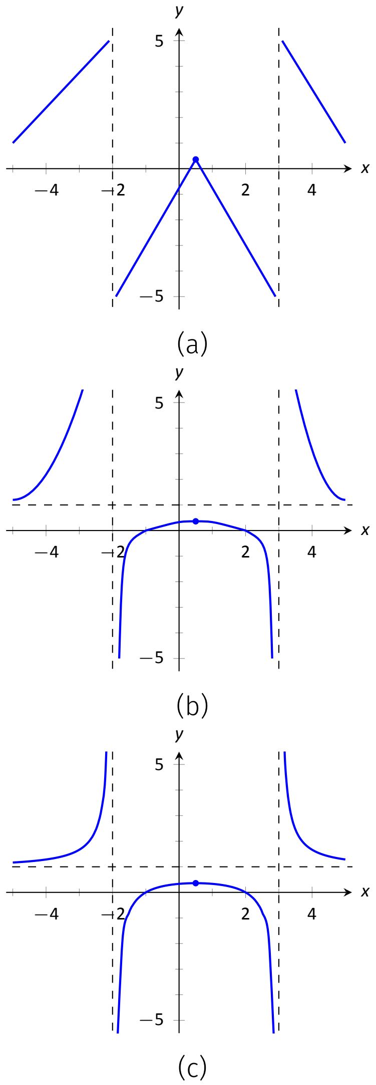


Figura 5.13 Esboços do gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-x-6}$

Exemplo 5.3 Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2-x-6}$.

Solução

1 Vamos determinar o domínio máximo de definição, para isso buscamos os pontos para os quais não podemos calcular f. Achamos que em $x = -2$ e $x = 3$, $f(x)$ não está definida . Logo o domínio de f is $\text{Dom} = \{x \neq -2, 3\}$.

2 Para determinar os valores críticos de f, primeiro calculamos $f'(x)$. Usando a regra do quociente temos

$$f'(x) = \frac{-8x+4}{(x^2+x-6)^2} = \frac{-8x+4}{(x-3)^2(x+2)^2}.$$

$f'(x) = 0$ quando $x = 1/2$, e f' não está definida quando $x = -2, 3$. Como f' não está definida somente quando f também não está, estes não são valores críticos. O único valor crítico é $x = 1/2$.

3 Para encontrar os possíveis pontos de inflexão, encontramos $f''(x)$, novamente utilizando a regra do quociente:

$$f''(x) = \frac{24x^2-24x+56}{(x-3)^3(x+2)^3}.$$

Nós achamos que $f''(x)$ nunca é 0 (igualando o numerador a 0 e resolvendo para x, encontramos que as únicas raízes para esta equação quadrática são imaginárias) e f " não está definida quando $x = -2, 3$. Assim concavidade possivelmente irá alterar somente em $x = -2$ e $x = 3$.

4 As assíntotas verticais de f estão em $x = -2$ e $x = 3$, os pontos onde f não está definida.

5 á uma assíntota horizontal de $y = 1$, pois $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.

6 Colocamos os valores $x = 1/2$, $x = -2$ e $x = 3$ na reta real como mostrado na Figura 5.14. Marcamos em cada intervalo se f é crescente ou decrescente, concava para cima ou para baixo. Desta forma vemos que f possui um máximo local em $x = 1/2$; a concavidade muda apenas nas assíntotas verticais.

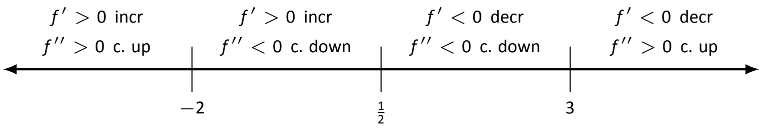


Figura 5.14 Reta real para f do Exemplo 3.

7 Colocamos os pontos apropriados no eixo como mostrado na Figura 5.13(a) e conectamos os pontos com linhas retas. Na Figura 5.13(b) nós ajustamos essas linhas para demonstrar a concavidade adequada. Também mostramos que f intersepta o eixo x em $x = -1$ e $x = 2$.

■

Exemplo 5.4 Esboce $f(x) = \dfrac{5(x-2)(x+1)}{x^2+2x+4}$.

Solução

1 Assumimos que o domínio de f é todos os números reais e consideramos as restrições. As únicas restrições vêm quando o denominador é 0, mas isso nunca ocorre. Portanto, o domínio de f é todos os números reais $\mathbb{R}$.

2 Nós determinamos os valores críticos de f igualando $f'(x) = 0$ e resolvendo para x. Nós achamos

$$f'(x) = \frac{15x(x+4)}{(x^2+2x+4)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \text{ quando } \; x = -4, 0.$$

3 Encontramos os possíveis pontos de inflexão, resolvendo $f''(x) = 0$ for x. Encontramos

$$f''(x) = -\frac{30x^3+180x^2-240}{(x^2+2x+4)^3}.$$

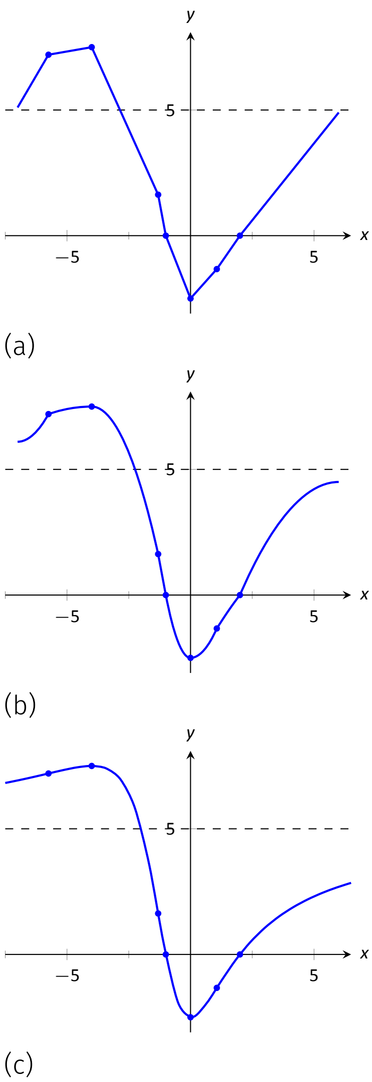


Figura 5.15 Esboço do gráfico de $f(x) = \dfrac{5(x-2)(x+1)}{x^2+2x+4}$.

O polinômio cúbico no numerador não fatora em termos simples. Assim aproximamos as raízes $x = -5.759$, $x = -1.305$ e $x = 1.064$.

4 Não existem assímptotas verticais.

5 Temos uma assíntota horizontal em $y = 5$, pois $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 5$.

6 Nós colocamos os pontos críticos e possíveis pontos em uma linha de número como mostrado na Figura 5.16 e marcamos cada intervalo como crescente/decrescente, concava para cima/para baixo

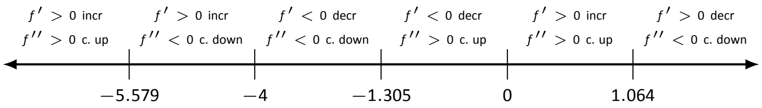


Figura 5.16 Reta real para f do Exemplo ??.

7 Na Figura 5.15 (a) marcamos os pontos importantes na reta real, bem como as duas raízes de f, $x = -1$ e $x = 2$, e ligamos os pontos com linhas retas para obter uma impressão geral sobre o gráfico. Na Figura ?? (b), nós adicionamos concavidade. Figura 5.15 (c) mostramos um gráfico gerado por computador de f, confirmando nossos resultados.

■

Exemplo 5.5 Esboce o gráfico da função $f(x) = x + 2x^{\frac{2}{3}} = x + 2\sqrt[3]{x^2}$.

Solução

1 A função f é uma função algébrica irracional e definida para todo $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. A função f é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$. (Verifique a continuidade de f no ponto $x = 0$).

2

$$\begin{aligned} f(-x) =& x + 2\sqrt[3]{x^2} \neq x + 2\sqrt[3]{x^2} = f(x) \\ -f(x) =& -x - 2\sqrt[3]{x^2} \neq x + 2\sqrt[3]{x^2} = f(-x) \end{aligned}$$

Logo, f não é par nem ímpar.

3 Vamos determinar agora as raízes f: $f(x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$ são as raízes de f;

4 Vamos agora determinar a derivada, pontos críticos e os intervalos nos quais f é crescente e decrescente

$$f'(x) = 1 + 2.\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{4}{3\sqrt[3]{x}}$$

$f\prime(x)$ não é definida para $x = 0$, e portanto, f não é diferenciável no ponto $x = 0$.

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 + \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Longleftrightarrow \sqrt[3]{x} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{64}{27} \approx -2,37$$

Assim, $x = -\dfrac{64}{27}$ é um ponto crítico de f.

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow 1 + \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} > 0 \Longleftrightarrow x < -\frac{64}{27}$$

ou seja, f é crescente no intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{64}{27}\right)$. Do fato de f' não existir no ponto $x = 0$, devemos analisar o sinal de f' numa vizinhança deste ponto; Para $x > 0$, temos $f'(x) = 1 + \dfrac{4}{3\sqrt[3]{x}} > 0$, ou seja, f é crescente para $x > 0$; Para -$\dfrac{64}{27} < x < 0$, temos que $f'(x) < 0$, ou seja, f é decrescente. Podemos já concluir que f tem um mínimo local no ponto $x = 0$ (porque?).

5 Agora vamos estudar a concavidade de f:

$$f''(x) = -\frac{4}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{4}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \quad \text{com } x \neq 0$$

Temos que $f''(x) < 0$ para todo $x \neq 0 \Longrightarrow f''(-\dfrac{64}{27}) < 0$, portanto, $x = -\dfrac{64}{27}$ é um ponto de máximo local para f. Ainda, do fato de $f''(x) < 0$ para todo $x \neq 0$, então $f(x)$ tem a concavidade voltada para baixo para todo $x \neq 0$.

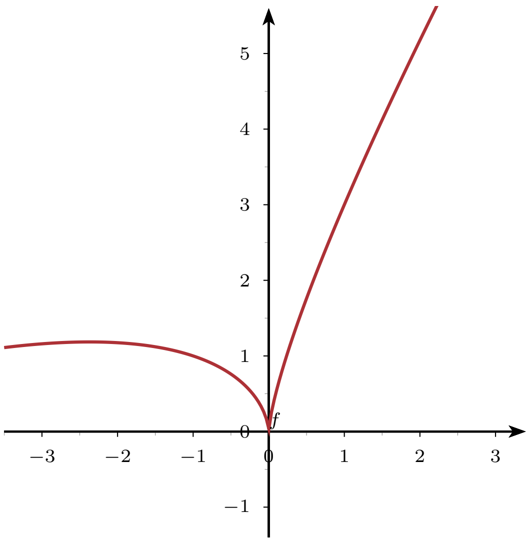
6 Passaremos agora a determinar as assíntotas: Temos que

$$\lim_{x\to+\infty}(x + 2\sqrt[3]{x^2}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x + 2\sqrt[3]{x^2}) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2}(\frac{x}{x^{\frac{2}{3}}} + 2) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x} + 2\right) = -\infty$$

Se existir assíntota inclinada, será uma reta $y = ax + b$ onde, a e b são constantes dadas por: $a = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + 2x^{-\frac{1}{3}}\right) = 1 + \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = 1$; $b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} 2x^{\frac{2}{3}} = 2\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$. O mesmo cálculo, feito para $x \to -\infty$, mostra que não há assíntota inclinada para f.

7 Valores especiais de f: $f(0) = 0$ e $y = 0$ se $x + 2\sqrt[3]{x^2} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -8 \end{cases}$ (raízes de f); $f(-\frac{64}{27}) = \frac{32}{27} \approx 1,18$; $f(1) = 4$ e $f(8) = 16$.



Exercícios

Ex. 5.23 — Para as seguintes funções, encontre as assíntotas inclinadas e esboce o gráfico, e para isso:

1 Encontre os intervalos para os quais a função é crescente ou decrescente;

2 Encontre os valores de máximo e mínimo locais;

3 Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão;

4 Encontre as assíntotas horizontais e verticais e inclinadas;

5 Esboce o gráfico, utilizando as informações dos itens anteriores

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$
2. $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x + 2$
3. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
4. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$
5. $f(x) = (x - 2)\ln(x - 2)$
6. $f(x) = (x - 2)^2 \ln(x - 2)$
7. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}$
9. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 6x + 8}$

10. $f(x) = x\sqrt{x+1}$
11. $f(x) = x^2e^x$
12. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ on $[-\pi, \pi]$
13. $f(x) = (x-3)^{2/3} + 2$
14. $(x^2-1)^3$
15. $3x^{2/3} - x$
16. $(x+2)^{\frac{3}{2}} + 1$

Ex. 5.24 — Esboce o gráfico das seguintes funções:

1. $x + \cos(x)$
2. $x^{1/3}(x+4)$
3. $\ln(x^4 + 27)$
4. $\ln(1 - \ln(x))$
5. $e^{\dfrac{-1}{x+1}}$
6. $\ln(\operatorname{tg}^2(x))$
7. $\dfrac{e^x}{x^2-9}$
8. $x \operatorname{tg} x \qquad -\pi/2 < x < \pi/2$
9. $e^{\cos(x)}$
10. $\dfrac{1}{1-\cos(x)}\ -2\pi < x < 2\pi$
11. $t\sqrt[3]{t^2-4}$

Ex. 5.25 — Nas próximas questões é dada uma função com parâmetros a e b. Descreva os pontos críticos e possíveis pontos de reflexão de f em termos de a e b.

1. $f(x) = \dfrac{a}{x^2+b^2}$
2. $f(x) = \operatorname{sen}(ax+b)$
3. $f(x) = (x-a)(x-b)$

5.8 Problemas de Otimização

As ferramentas apresentadas neste capítulo para encontrar os valores extremos de uma função têm uma enorme aplicabilidade em diversos problemas das mais diversas áreas. Nesta seção vamos ilustrar essa aplicabilidade resolvendo problemas tais como maximizar áreas, volumes minimizar distâncias, tempo e custos. Como veremos o maior desafio na solução destes problemas está frequentemente em descrever o problema como um problema de otimização, explicitando a função que deve ser maximizada ou minimizada.

Exemplo 5.1 [Otimização: perímetro e área] Um homem tem 100 metros de cerca, um quintal grande e um cachorro pequeno. Ele quer criar com a cerca um cercado retangular para seu cão que tenha a área máxima possível. Quais dimensões fornecem a área máxima?

Solução Pode-se adivinhar a resposta correta - isso é ótimo. Vamos continuar mostrando como o cálculo pode fornecer essa resposta em um contexto que comprove que essa resposta está correta. É útil começar por esboçar a situação. Nosso cercado é esboçado duas vezes na Figura **??**, com grama verde e placas de vedação agradáveis ou como um retângulo simples. De qualquer forma, desenhar um retângulo nos força a perceber que precisamos conhecer as dimensões desse retângulo para que possamos criar uma função de área - afinal, estamos tentando maximizar a área.

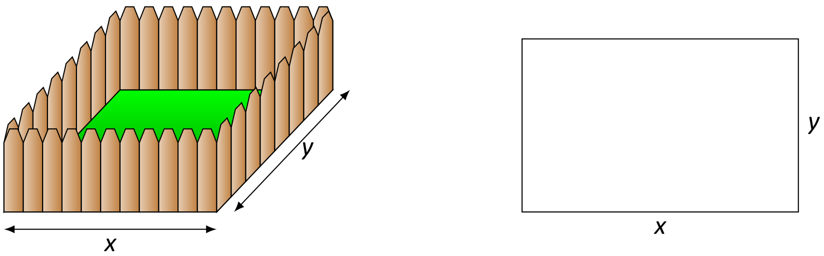


Figura 5.17 Um esboço do anexo no Exemplo 1.

Permitimos que x e y indiquem o comprimento dos lados do retângulo. Claramente,

$$\text{Area} = xy.$$

Ainda não sabemos como lidar com funções com 2 variáveis; precisamos reduzir isso para uma única variável. Sabemos mais sobre a situação: o homem tem 100 metros de cerca. Sabendo que o perímetro do retângulo deve ser 100, podemos criar outra equação:

$$\text{Perimetro} = 100 = 2x + 2y.$$

Agora temos 2 equações e 2 incógnitas. Na última equação, resolvemos por y:

$$y = 50 - x.$$

Agora substitua esta expressão por y na equação da área: Area $= A(x) = x(50 - x)$. Note que agora temos uma equação de uma variável; podemos realmente chamar a área de uma função de x. Esta função só faz sentido quando $0 \leq x \leq 50$, caso contrário, obtemos valores negativos de área. Então, encontramos os valores extremos de $A(x)$ no intervalo $[0, 50]$. Para encontrar os pontos críticos, pegamos a derivada de $A(x)$ e definimos igual a 0, depois resolvemos por x.

$$\begin{aligned} A(x) &= x(50-x) \\ &= 50x - x^2 \\ A'(x) &= 50 - 2x \end{aligned}$$

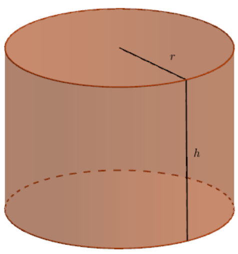
Resolvendo $50 - 2x = 0$ encontramos $x = 25$. Esse é o único ponto crítico. Calculamos $A(x)$ nos pontos finais do nosso intervalo e neste ponto crítico para encontrar os valores extremos. Neste caso, tudo o que nos interessa é o máximo. Claramente $A(0) = 0$ e $A(50) = 0$, enquanto que $A(25) = 625\text{m}^2$. Este é o máximo. Já que encontramos anteriormente $y = 50 - x$, descobrimos que y também é 25. Assim, as dimensões do cercado retangular com perímetro de 100 metros com área máxima é um quadrado, com lados de comprimento de 25 metros. ■

Exemplo 5.2 Um fabricante de embalagens deseja fabricar uma lata cujo formato é um cilindro circular reto de volume V_0. Quais devem ser as dimensões da lata de modo a minimizar a quantidade de material gasto na fabricação, ou seja a´área lateral da superfície?

Solução Sendo r e h o raio da base e a altura da lata, respectivamente. O volume da lata é dado por

$$V_0 = \pi r^2 h \tag{5.3}$$

e a área lateral



$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \tag{5.4}$$

Resolvendo a equação 5.3 para h temos:

$$h = \frac{V_0}{\pi r^2}$$

e substituindo em 5.4 temos

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V_0}{r}$$

Claramente o raio deve ser positivo, e a área deve estar definida temos que temos que $0 < r < \infty$ A função $A(r)$ é diferenciável em todos os pontos do domínio. Assim para calcular os pontos críticos, derivamos

$$\begin{aligned} A'(r) =& 4\pi r - 2\frac{V_0}{r^2} \\ =& \frac{2\left(2\pi r^3 - V_0\right)}{r^2} \end{aligned}$$

e logo a derivada é igual a zero em:

$$r = \left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Como não estamos num intervalo fechado, não temos a garantia de existência de um mínimo. Para analisarmos o comportamento de $A(r)$ iremos estudar o sinal da derivada. A derivada é positiva se $r > \left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ e negativa caso contrário. E assim o ponto $r = \left(\frac{V_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ é um ponto de mínimo global ■

Exemplo 5.3 Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que esteja inscrito na circunferência de raio R.

Solução Sejam x a altura do triângulo, y a base e z a medida de um dos lados congruentes. A área do triângulo é $A = \frac{1}{2}xy$ onde $x \in (0, 2R)$ e $y \in (0, 2R)$. Utilizando Teorema de Pitágoras temos que

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + (x - R)^2 = R^2 \quad \text{e portanto} \quad y = 2\sqrt{2Rx - x^2}.$$

Substituindo obtemos $A(x) = x\sqrt{2Rx - x^2}$. Logo, nosso problema é maximizar a função

$$A(x) = x\sqrt{2Rx - x^2} \qquad x \in (0, 2R).$$

Calculando a derivada

$$A'(x) = \frac{x(3R - 2x)}{\sqrt{2Rx - x^2}},$$

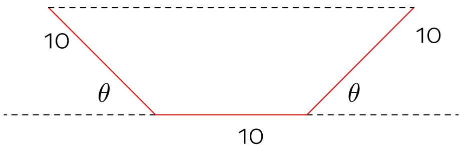
temos que ou $x = \frac{3}{2}R$ é o único candidato a ponto de máximo no intervalo $(0, 2R)$. Analisando o sinal da derivada primeira vemos que de fato $x = \frac{3}{2}R$ é um ponto de máximo. Portanto as dimensões são

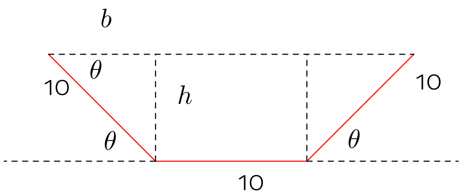
$$\text{altura } x = \frac{3}{2}R \quad \text{e base } y = \sqrt{3}R \quad \text{e daí } z^2 = \frac{9}{4}R^2 + \frac{3}{4}R^2 = 3R^2.$$

Logo o triângulo é equilátero. ■

Exemplo 5.4 Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura $30cm$ dobrando-se para cima $1/3$ da folha de cada lado, fazendo-se um ângulo θ com a horizontal. Determine o ângulo que vai maximizar a quantidade de água que a calha pode conter.

Solução Neste caso, queremos maximizar o volume que uma calha pode suportar. Primeiramente observamos que o volume de uma calha desta forma é a área de seção transversal vezes comprimento da calha. Assim, para um determinado comprimento, a fim de maximizar o volume devemos maximizar a área da seção transversal. Para obter uma fórmula para a área da seção transversal vamos refazer o desenho acima um pouco.





A área seccional pode ser obtida somando a área do retângulo e as áreas dos triângulos. Como $b = 10\cos\theta$ e $h = 10\operatorname{sen}\theta$ temos:

$$A = 10h + 2\left(\frac{1}{2}bh\right) = 100\operatorname{sen}\theta + (10\operatorname{sen}\theta)(10\cos\theta)$$

$$A = 100(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Podemos assumir que θ pertence ao intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Calculando a derivada temos:

$$\begin{aligned}
A'(\theta) =& 100(\cos\theta + \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\
=& 100(\cos\theta + \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)) \\
=& 100(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) \\
=& 100(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)
\end{aligned}$$

E logo a derivada se anula quando: $2\cos\theta - 1 =$ ou seja $\cos\theta = 1/2$ e logo $\theta = \pi/3$. ou quando $\cos\theta + 1 = 0$, ou seja $\cos\theta = -1$ e $\theta = \pi$. Como $A(0) = 0$, $A(\pi/3) \approx 129.9$ e $A(\pi) = 100$. Temos que a área seccional máxima ocorre quando $\theta = \pi/3$. ■

Exemplo 5.5 Um arame de comprimento L é cortado em duas partes. Com uma dessas partes faz-se um quadrado e com a outra um retângulo equilátero. Em que ponto deve-se cortar o arame para que a soma das áreas seja máxima?

Solução A soma das áreas é dada por

$$A = a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 \tag{5.5}$$

onde, a^2 é a área do quadrado de lado a e $\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$ é a área do triângulo equilátero de lado b. Como o arame tem comprimento L, então $L = 4a + 3b \implies a = \frac{L-3b}{4}$. Substituindo o valor de a na equação 5.5, obtemos A como função de apenas uma variável:

$$\begin{aligned} A(b) = & \left[\frac{L-3b}{4}\right]^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = \frac{L^2 - 6Lb + 9b^2 + 4\sqrt{3}b^2}{16} \\ = & \frac{1}{16}\left[\left(9+4\sqrt{3}\right)b^2 - 6Lb + L^2\right] \end{aligned}$$

Devemos determinar um valor para b de modo que $A(b)$ seja máxima. Começaremos procurando os pontos críticos

$$A'(b) = -\frac{3}{2}(L-3b) + \frac{b\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2}L + \frac{9+\sqrt{3}}{2}b$$

Então,

$$f'(b) = 0 \iff b = \frac{3L}{9+\sqrt{3}}$$

Por outro lado, $A''(\frac{3L}{9+\sqrt{3}}) = \frac{9+\sqrt{3}}{2} > 0 \implies$ a soma das áreas assume um mínimo local nesse ponto (critério da segunda derivada) quando $b = \frac{3L}{9+\sqrt{3}} \iff a = \frac{1}{4}\left(L - \frac{9L}{9+\sqrt{3}}\right)$. Como a função $A(b)$ é contínua no intervalo $\left[0, \frac{L}{3}\right]$ temos que existe um máximo e um mínimo absolutos em $\left[0, \frac{L}{3}\right]$ Como somente assume um mínimo local no interior deste intervalo, então o máximo deve ser assumido em um dos extremos deste intervalo. Vamos calcular os valores nos extremos: Se $b = 0$ e portanto $a = \frac{L}{4}$, temos $A(0) = \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}L^2$; Se $b = \frac{L}{3}$ e portanto, $a = 0$, temos $A(\frac{L}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{L}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}L^2$ Como, $\frac{\sqrt{3}}{36}L^2 < \frac{1}{16}L^2$ (porque $\frac{4}{9}\sqrt{3} < 1$ e $\sqrt{3} < 2$), segue-se que a área é máxima quando não se corta o arame, formando somente um quadrado de lado $a = \frac{L}{4}$. ■

Exercícios

Ex. 5.26 — Quais são as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser desenhada dentro do círculo unitário?

Ex. 5.27 — Encontre a área máxima de um triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento 1.

Ex. 5.28 — Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um quadrado de $60cm$ de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa pode ter.

Ex. 5.29 — Uma lata cilíndrica sem topo é feita para receber Vcm^3 de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para fazer a lata.

Ex. 5.30 — Uma caixa com tampa conforme a figura abaixo é feita a partir de uma folha de papel de 12cmx12cm. Encontre a caixa que optimiza o volume.

5.9 Polinômio de Taylor

Nesta seção, vamos apresentar os **Polinômios de Taylor** que é o polinômio de grau n que melhor aproxima uma função na vizinhança de um ponto a.

5.9.1 Polinômio de Taylor de Ordem 1 e 2

O exemplo mais simples de aproximação de uma função por um polinômio é a aproximação linear, que apresentamos na seção 4.7. Naquela seção utilizamos a aproximação linear

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

para aproximar a função $f(x)$ para x numa vizinhança de a. Definimos o **erro** que cometemos ao aproximar $f(x)$ por P_1 como

$$E_1(x) = f(x) - P_1(x).$$

E desta forma podemos escrever:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + E_1(x)$$

5.1 **Proposição 9.**

O erro $E_1(x)$ tende a zero mais rapidamente do que $(x - a)$. Isto é, temos que:

$$\lim_{x\to a} \frac{E_1(x)}{x - a} = 0,$$

Demonstração. Observemos que, para $x \neq a$, temos

$$\frac{E - 1(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

E logo

$$\lim_{x\to a}\frac{E_1(x)}{x-a}=0,$$

■

O polinômio de Taylor de ordem 1 de $f(x)$ ao redor de a é definido como

$$P_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

5.2 **Teorema 9.**

O polinômio P_1 é a função linear que melhor aproxima localmente $f(x)$ ao redor de a.

Demonstração. Seja uma $q(x)$ uma função linear

$$q(a)=d+m(x-a)$$

E tal que

$$f(x)=d+m(x-a)+E_1(x)$$

e suponha que $\lim_{x\to a}\frac{E_1(x)}{x-a}=0$. Como o erro em a é 0 temos que $d=f(a)$ e logo a reta passa por $(a,(f(a))$. Para determinarmos m observe que

$$f(x)-f(a)=m(x-a)+E_1(x)$$

dividindo por $(x-a)$ e tomando o limite teríamos

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}m+\lim_{x\to a}\frac{E_1(x)}{x-a}$$

E logo $m=f'(a)$. ■

Uma deficiência da aproximação linear é que a reta tangente possui apenas a mesma inclinação de f; ela não consegue por exemplo, possuir a mesma concavidade que f. Nosso próximo objetivo é encontrar um polinômio $p(x)$, que coincide não só na inclinação, mas também na concavidade Para isso suponha que a função $f(x)$ seja duas vezes diferenciável. Procuramos um polinômio $P_2(x)$, de grau no máximo 2, tal que

$$f(a)=P_2(a),\quad f'(a)=P_2'(a)\ \text{ e }\ f''(a)=P_2''(a).$$

Devemos procurar $P_2(x)$ na forma $P_2(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2$ que satisfaça:

- □ $f(a)=P_2(a)\implies c_0=f(a),$
- □ $P_2'(x)=c_1+2c_2(x-a)\implies P_2'(a)=c_1=f'(a),$

□ $P_2'(x) = 2c_2 \implies P_2'(a) = 2c_2 = f''(a) \implies c_2 = \dfrac{f''(a)}{2}.$

Concluímos, portanto, que

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Novamente, definimos o erro que se comete ao aproximar $f(x)$ por $P_2(x)$ por

$$E_2(x) = f(x) - P_2(x).$$

Observemos que, para $x \neq p$,

$$\frac{E_2(x)}{(x-a)^2} = \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2}{(x-a)^2},$$

e, utilizando a regra de L'Hopital, obtemos

$$\lim_{x\to p} \frac{E(x)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to p}\left[\frac{f'(x) - f'(a)}{(x-a)} - f''(a)\right] = 0.$$

Ou seja, quando $x \to p$, o erro $E_2(x)$ tende a zero *mais rapidamente* que $(x-a)^2$. Definimos o **polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x)$ ao redor de p** por

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Novamente podemos provar que P_2 é o polinômio de grau 2 que melhor aproxima localmente $f(x)$ ao redor de a.

5.9.2 Polinômio de Taylor de Ordem n

Suponha que f tem derivadas até ordem n no ponto $x = 0$, onde $n > 1$, encontraremos um polinômio

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + \dots c_n x^n$$

que concorda com f e suas primeiras n derivadas em 0. Há $n+1$ condições a serem satisfeitas, ou seja,

$$P_n(0) = f(0) \quad P_n'(0) = f'(0) \quad \dots p_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

A equação $P_n(0) = f(0)$ nos dá que $c_0 = f(0)$. Diferenciando temos

$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2 x + \dots n c_n x^{n-1}$$

e assim $P_n'(0) = c_1 = f'(0)$, e logo $c_1 = f'(0)$ Diferenciando novamente temos

$$P_n'(x) = 2c_2 + \dots n c_n x^{n-1}$$

e assim $P_n'(0) = 2c_2 = f'(0)$, e logo $c_2 = f'(0)/2$ E após diferenciar k vezes:

$$c_k = f^{(k)}(0)/k!$$

temos que tal polinômio terá a seguinte forma

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

5.3 **Definição 9.**

O polinômio

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

é denominado **polinômio de Taylor** de ordem n de $f(x)$ centrado na origem.

De modo análogo, podemos mostrar que existe um polinômio de grau menor igual a n que concorda com f e suas primeiras n derivadas em a. Ou seja, que satisfaz:

$$P_n(a) = f(a) \quad P_n'(a) = f'(a) \quad \dots p_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Esse polinômio é

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

e é denominado **polinômio de Taylor** de ordem n de $f(x)$ ao redor de a.

Exemplo 5.4

1. Determine o n-ésimo termo do polinômio de Taylor para $f(x) = e^x$.

2. Use $P_5(x)$ para aproximar o valor de e.

Solução

1. Começamos tabelando as derivadas de e^x calculadas no ponto $x = 0$.
$$\begin{array}{lcl} f(x) = e^x & \Rightarrow & f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & \Rightarrow & f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & \Rightarrow & f''(0) = 1 \\ \vdots & & \vdots \\ f^{(n)}(x) = e^x & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = 1 \end{array}$$
Desta forma pela definição de Taylor
$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f'p(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{n}(0)}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n. \end{aligned}$$

2. Da parte 1
$$P_5 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5.$$

Para aproximar o valor de e, observe que $e = e^1 = f(1) \approx P_5(1)$.
É muito simples de calcular $P_5(1)$:

$$P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{163}{60} \approx 2.71667.$$

O gráfico de $f(x) = e^x$ e $P_5(x)$ é mostrado na figura 5.18.

■

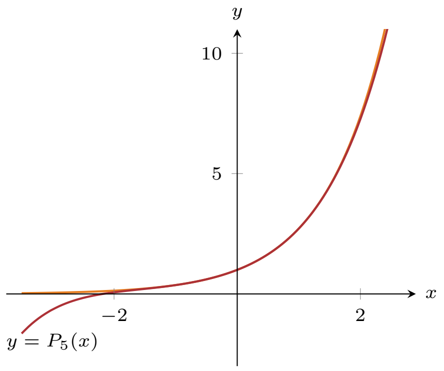


Figura 5.18 Gráfico de $f(x) = e^x$ e de seu polinômio de Taylor de grau $P_5(x)$.

Exercícios

Ex. 5.31 — Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de x_0

1. $\ln(x)$ em torno de 1
2. e^x em torno de 0
3. $\text{sen}(x)$ em torno de 0
4. $\cos(x)$ em torno de 0
5. $\text{senh}(x)$ em torno de 0
6. $\cosh(x)$ em torno de 0
7. $\sqrt[3]{x}$ em torno de 1
8. $\sqrt{x}$ em torno de 4
9. $\dfrac{1}{1-x^2}$ em torno de 0

Ex. 5.32 — Usando o polinômio de Taylor de ordem 2 calcule o valor aproximado e avalie o erro:

1. $\ln(1.2)$
2. $\sqrt{3.8}$
3. $\text{sen}(0.1)$
4. $\text{sen}(\pi/25)$
5. $e^{0.003}$

Ex. 5.33 — Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 de f em torno de x_0

1. $\ln(x)$ em torno de 1
2. e^x em torno de 0
3. $\operatorname{sen}(x)$ em torno de 0
4. $\cos(x)$ em torno de 0
5. $\operatorname{senh}(x)$ em torno de 0
6. $\cosh(x)$ em torno de 0
7. $\sqrt[x]{x}$ em torno de 1
8. $\sqrt{x}$ em torno de 4
9. $(1+x)^\alpha$ em torno de 0

Ex. 5.34 — Quantos termos do polinômio de Taylor são necessários para aproximar e com um erro inferior a 10^{-5}?

Ex. 5.35 — Usando polinômios de Taylor calcule $\cos(1)$ com erro em módulo inferior a 10^{-4}

Ex. 5.36 — Use o polinômio de Taylor de ordem 4 de $cos(2x)$ para calcular o exato valor do limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{3x^2}$$

Exemplo 5.5

1. Ache o n-ésimo termo do polinômio de Taylor de $y = \ln x$ em $x = 1$.
2. Use $P_6(x)$ para aproximar o valor de $\ln 1.5$.
3. Use $P_6(x)$ para aproximar o valor de $\ln 2$.

Solução

1. Começamos tabelando a derivada de $\ln x$ em $x = 1$.

$$\begin{array}{lcl}
f(x) = \ln x & \Rightarrow & f(1) = 0 \\
f'(x) = 1/x & \Rightarrow & f'(1) = 1 \\
f''(x) = -1/x^2 & \Rightarrow & f''(1) = -1 \\
f'''(x) = 2/x^3 & \Rightarrow & f'''(1) = 2 \\
f^{(4)}(x) = -6/x^4 & \Rightarrow & f^{(4)}(1) = -6 \\
\vdots & & \vdots \\
f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} & \Rightarrow & f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!
\end{array}$$

Pela definição 5.9.2, temos

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f'p(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{f^{\,n}(c)}{n!}(x-c)^n \\
&= 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.
\end{aligned}$$

2 E assim $P_6(x)$ é dado por

$$P_6(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5 - \frac{1}{6}(x-1)^6.$$

E desta forma

$$\begin{aligned} P_6(1.5) &= (1.5-1) - \frac{1}{2}(1.5-1)^2 + \frac{1}{3}(1.5-1)^3 - \frac{1}{4}(1.5-1)^4 + \cdots \\ &\cdots + \frac{1}{5}(1.5-1)^5 - \frac{1}{6}(1.5-1)^6 \\ &= \frac{259}{640} \\ &\approx 0.404688. \end{aligned}$$

Está é uma boa aproximação já que $\ln 1.5 \approx 0.4055$. A figura 5.19 mostra o gráfico de $y = \ln x$ e $y = P_6(x)$.

3 Agora aproximaremos $\ln 2$ por $P_6(2)$:

$$\begin{aligned} P_6(2) &= (2-1) - \frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{1}{3}(2-1)^3 - \frac{1}{4}(2-1)^4 + \cdots \\ &\cdots + \frac{1}{5}(2-1)^5 - \frac{1}{6}(2-1)^6 \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{37}{60} \\ &\approx 0.616667. \end{aligned}$$

Essa aproximação não é fantástica: uma calculadora mostra que $\ln 2 \approx 0.693147$. O gráfico na Figura 5.19 mostra que $P_6(x)$ fornece aproximações menos acuradas de $\ln x$ quando x fica próximo de 0 ou 2. Mesmo o polinômio de Taylor de ordem 20 falha ao aproximar $\ln x$ para $x > 2$, como mostra a figura 5.20. Nos discutiremos a seguir o porque.

Para entendermos porque a aproximação acima falha precisamos entender a precisão com que uma função é aproximada por polinômios de Taylor, para esse fim definimos o erro como sendo

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

sendo $f(x)$ a função dada e $P_n(x)$ o polinômio de Taylor de grau n ao redor de a. O teorema a seguir nos fornece uma fórmula para o erro.

5.6 **Teorema 9. :** Fórmula de Taylor com Erro de Lagrange

Suponhamos que a função $f(x)$ seja $(n+1)$ vezes diferenciável

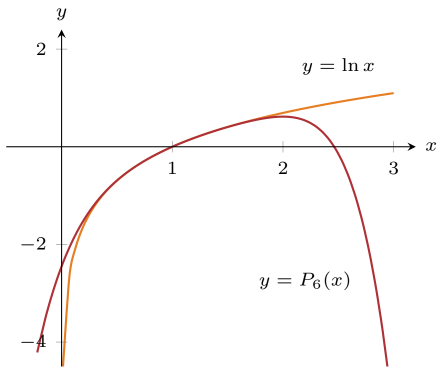


Figura 5.19 Gráfico de $y = \ln x$ e de seu polinômio de Taylor de ordem 6 em $x = 1$

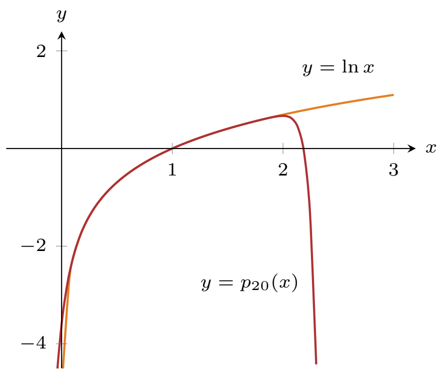


Figura 5.20 Gráfico de $y = \ln x$ e de seu polinômio de Taylor de ordem 20 centrado em $x = 1$

no ao redor do ponto p. Então

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algum $\overline{x}$ entre x e a.

Exemplo 5.7 Use o Teorema 5.9.2 para estimar o erro cometido ao aproximar $\ln 1.5$ e $\ln 2$ por $P_6(x)$, o polinômio de Taylor de grau 6 de $f(x) = \ln x$ centrado em $x = 1$, como calculado no Exemplo 5.

1. Vimos que $\ln 1.5$ pode ser aproximado por $P_6(1.5)$. Para calcularmos o erro usaremos o Teorema 5.9.2 e para isso precisamos de um intervalo aberto I que contenha x e c. Quanto menor o intervalo usamos o melhor; ele vai nos dar uma aproximação mais precisa (e menor!) do erro. Assim escolhemos $I = (0.9, 1.6)$, pois este intervalo contém tanto $c = 1$ e $x = 1.5$. Agora precisamos estimar $\max \left| f^{(n+1)}(z) \right|$. Nesse caso específico queremos determinar o quão grande é a sétima derivada de $y = \ln x$ no intervalo

aberto $(0.9, 1.6)$. A sétima derivada é $-6!/x^7$. O maior valor que atinge em I é de cerca de 1506. Assim, podemos limitar o erro como:

$$\begin{aligned}|E_6(1.5)| &\leq \frac{\max |f^{(7)}(z)|}{7!}|(1.5-1)^7| \\ &\leq \frac{1506}{5040} \cdot \frac{1}{2^7} \\ &\approx 0.0023.\end{aligned}$$

Como $P_6(1.5) = 0.404688$ e usando uma calculadora temos que $\ln 1.5 \approx 0.405465$, o erro real é de 0.000778, que é menor que o erro máximo estimado usando o Teorema 0.0023.

2 Novamente começamos escolhendo um intervalo I que contenha $c = 1$ e $x = 2$; Nesse caso escolheremos $I = (0.9, 2.1)$. O valor máximo da sétima derivada de f nesse intervalo é 1506 (o maior valor ocorre próximo de $x = 0.9$). Logo

$$\begin{aligned}|E_6(2)| &\leq \frac{\max |f^{(7)}(z)|}{7!}|(2-1)^7| \\ &\leq \frac{1506}{5040} \cdot 1^7 \\ &\approx 0.30.\end{aligned}$$

Esse limitante não é tão bom quanto o anterior. Como $P_6(2) \approx 0.61667$, a nossa estimativa de erro garante que o valor real de $\ln 2$ está entre 0.31667 e 0.91667. E desta forma não são muito úteis.

Exemplo 5.8 Quantos termos do polinômio de Taylor são necessários para aproximar e com um erro inferior a 10^{-5}?

Solução Queremos que $E_n(1) < 10^{-5}$. Logo basta tomar n tal que $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$, ou seja, tal que $(n+1)! > 3(10^5)$. Substituindo valores em $(n+1)!$ temos que $n = 8$. ■

5.9.3 ⋆ Irracionalidade de e

Começaremos obtendo uma expressão para e utilizando o

5.9 Teorema 9.

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$$

Demonstração. Como vimos, o polinômio de Taylor de ordem n ao redor do zero da função $f(x) = e^x$ é $P_n(x) = 1+x+\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$. Observe que para $x \in [0,1]$, $0 \le e^x = f^{(n+1)}(x) \le e < 3$. Pelo Teorema 5.9.2, o erro da aproximação é dado por

$$|e^1 - P_n(1)| = \left|e - \left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)\right| = |E_n(1)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\right|$$

para algum $x \in [0,1]$. Logo,

$$\left|e - \left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)\right| \le \frac{3}{(n+1)!}.$$

Finalmente, tomando o limite e aplicando o Teorema do Confronto obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = e.$$

■

5.10 Teorema 9.

O número e é irracional.

Demonstração. Suponha que e é um número racional. Então existem inteiros positivos a e b de tal forma que $e = a/b$. Defina o número

$$x = b!\left(e - \sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right)$$

Desta forma se e é racional, então x será um inteiro. Para vermos esse fato substituímos e = a/b nessa definição e obtemos

$$x = b!\left(\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right) = a(b-1)! - \sum_{n=0}^{b}\frac{b!}{n!}.$$

O primeiro termo é um número inteiro, e cada fração na soma é realmente um número inteiro porque $n \le b$ para cada termo. Portanto x é um número inteiro. Agora demonstraremos que $0 < x < 1$. Primeiramente provaremos que x é positivo, para isso utilizaremos a representação de e em série obtida anteriormente, obtendo

$$\begin{aligned} x &= b!\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{b}\frac{1}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=b+1}^{\infty}\frac{b!}{n!} > 0 \end{aligned}$$

Agora demonstraremos que $x < 1$. Para todos os termos com $n \ge b+1$ temos a estimativa

$$\frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots(b+(n-b))} < \frac{1}{(b+1)^{n-b}}.$$

Essa desigualdade é estrita para cada $n \geq b+1$. Alterando o índice de soma de $k = n - b$ e utilizando a fórmula para a série geométrica obtemos

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} < \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{b+1}}\right) \\ &= \frac{1}{b} < 1. \end{aligned}$$

Como não existe inteiro estritamente entre 0 e 1, chegamos a uma contradição, e assim e deve ser irracional. ■

5.9.4 ⋆ Demonstração da Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

5.11 **Teorema 9. :** Fórmula de Taylor com resto de Lagrange

Suponhamos que a função $f(x)$ seja $(n+1)$ vezes diferenciável no ao redor do ponto p. Então

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para algum $\overline{x}$ entre x e p.

Demonstração. Podemos obter a fórmula de Taylor utilizando no Teorema 5.2.1 $g(x) = (x-c)^n$. Desta forma para algum x_1 teríamos

$$\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right) n! = f^{(n)}(x_1)(x-c)^n$$

ou

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x-c)^n$$

Observe que $g^{(k)}(c) = 0$ se $k = 0, 1, 2 \ldots, n-1$, $g^n = n!$. ■

Parte III

Integrais

Capítulo 6

Integral Indefinida

Neste capítulo trataremos do problema inverso ao processo de encontrar derivadas, ou seja, o processo de encontrar antiderivadas.

Neste capítulo:

6.1 Integral Indefinida

Uma parte significativa dos capítulos anteriores foi devotado ao problema de encontrar a derivada de uma função $f(x)$. Neste seção abordamos o problema inverso: dada uma função $f(x)$ achar uma função $F(x)$ que satisfaça

$$F'(x) = f(x). \tag{6.1}$$

A equação 6.1 é um exemplo de equação diferencial. De modo geral uma equação diferencial é uma equação envolvendo y, x, e as derivadas de y. Um exemplo de uma equação diferencial simples da forma da equação 6.1 é: $y' = 2x$. Ao resolvermos uma equação diferencial buscamos encontrar uma função y que satisfaça a equação dada. A equação anterior possui ao menos uma solução: $y = x^2$. Podemos encontrar outra: $y = x^2+1$, que também resulta em $2x$ quando derivamos. E claramente podemos generalizar $y = x^2 + C$, onde c é uma constante, também é solução.

6.1 Definição 1.

Uma função F definida num intervalo I é denominada uma **primitiva** ou **antiderivada** de f se

$$F'(x) = f(x) \tag{6.2}$$

para todo $x \in I$. O conjunto de todas as primitivas de $f(x)$ é denominado **integral indefinida** de f, e será denotado por

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Se F for uma primitiva de f, então por definição a função F é derivável e logo contínua. Conhecendo uma antiderivada de f podemos encontrar outras simplesmente adicionando uma constante. O próximo teorema nos diz que no caso diferenciável essa é a forma de obter todas.

6.2 Teorema 1.

Sejam f e g funções continuas no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciáveis no intervalo aberto (a, b) tal que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Então, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + C$$

para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração. Considere a função $F(x) = f(x) - g(x)$. Então $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para todo x em (a, b). E logo $f - g$ é constante. Ou seja, existe C tal que $f(x) - g(x) = C$ e assim

$$f(x) = g(x) + C$$

■

Usando a Definição 6.1, podemos dizer que se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) então

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C. \tag{6.3}$$

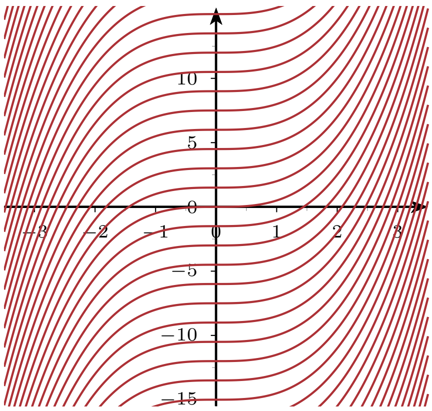


Figura 6.1 Antiderivadas de x^2 são da forma $\dfrac{x^3}{3} + C$

Exemplo 3.

$$\int x^2\ \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$$

◁

6.1.1 Regras Básicas de Integração

Como o processo de integração e derivação são, em certo sentido, operações inversas, podemos descobrir muitas regras de integração, conjecturando uma antiderivada F de f e, em seguida, verificando que F é uma antiderivada de f, demonstrando que $F'(x) = F(x)$.

6.4 Proposição 1.

Mostre que

$$\int x^n \ \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

Demonstração. Levando em consideração que a regra de derivação de potências consiste em:

- Diminuir a potência de x^n por 1 obtendo x^{n-1}.
- Multiplicar x^{n-1} pela potência inicial n obtendo nx^{n-1}.

Revertendo o processo passo a passo temos:

- Aumentar a potência de x^n por 1 obtendo x^{n+1}.
- Dividir x^{n+1} pela potência final $n+1$ obtendo nx^{n-1}.

Esse argumento sugere que

$$\int x^n \ \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

De fato, verificando

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right] = \frac{n+1}{n+1}x^{n+1-1} = x^n$$

■

De maneira similar as regras de derivação que obtivemos nos capítulos anteriores podem ser convertidas em integrais indefinidas:

6.5 Proposição 1. : Tabela de Integrais Indefinidas

1 $\displaystyle\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

2 $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C.$

3 $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C.$

4 $\displaystyle\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C.$

5 $\displaystyle\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C.$

6 $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C.$

7 $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C.$

8 $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + C.$

9 $\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

10 $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C.$

11 $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C.$

12 $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

13 $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2} \, dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

14 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen}(x) + C.$

15 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

16 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Exemplo 6.6 Calcule as seguintes antiderivadas *a* $\int 1 \, dx$ *b* $\int x^4 \, dx$ *c* $\int \frac{1}{x^5} \, dx$ *d* $\int \sqrt{x} \, dx$ Das propriedades da derivada 3.4 e 3.4 temos a seguintes propriedades da integral indefinida.

6.7 **Teorema 1.**

A integral indefinida é linear, isto é:

- $\displaystyle\int (f_1(x) + f_2(x)) \, dx = \int f_1(x) \, dx + \int f_2(x) \, dx.$
- $\displaystyle\int af(x) \, dx = a\int f(x) \, dx.$

Exemplo 6.8 Calcule a antiderivada de $f(x) = 3x^4 - \operatorname{sen} x + 6\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Solução Utilizando a linearidade da integral indefinida

$$\begin{aligned}
\int 3x^4 - \operatorname{sen} x + 6\frac{1}{\sqrt{4x}} \, dx &= \int 3x^4 \, dx - \int \operatorname{sen} x \, dx + 6\int \frac{1}{\sqrt{4x}} \, dx \\
&= \frac{3}{5}x^5 - (-\cos x) + \frac{6\cdot 2}{4}\sqrt{4x} + C \\
&= \frac{3}{5}x^5 + \cos x + 3\sqrt{4x} + C.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.9 Calcule a antiderivada de $f(x) = x^{2/3} - 3e^x + 6\frac{1}{x}$.

6.10 Proposição 1.

Se $\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C$, então

$$\int f(ax+b)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Essa Proposição pode ser facilmente verificada calculando a derivada da expressão do lado direito na equação acima.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right)' &= \frac{1}{a}F'(ax+b)\,(ax+b)' \\ &= \frac{1}{a}f(ax+b)a \\ &= f(ax+b).\end{aligned}$$

Exemplo 6.11 Calcule a antiderivada de $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Solução Utilizando a Proposição 6.1.1 temos:

$$\int \frac{1}{x+1}\ \mathrm{d}x = \ln(|x+1|) + C$$

■

Exemplo 6.12 Calcule a antiderivada de $f(x) = \cos(2x+1)$.

Solução Utilizando a Proposição 6.1.1 temos:

$$\int \cos(2x+1)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x+1) + C$$

■

Exercícios

Ex. 6.1 — Calcule as seguintes antiderivadas:

1. $\int x\ \mathrm{d}x$
2. $\int (3x+1)\ \mathrm{d}x$
3. $\int x^n\ \mathrm{d}x$

4. $\int (x^2 + x + 1)\ dx$

5. $\int \frac{1}{x^2}\ dx$

6. $\int \left(x + \frac{1}{x^3}\right)\ dx$

7. $\int \sqrt[3]{x}\ dx$

8. $\int \left(3\sqrt[7]{x^2} + \cos(x)\right)\ dx$

9. $\int e^{4x}\ dx$

10. $\int \cos(3x)\ dx$

11. $\int (x + 3e^{5x} + \cos(2x))\ dx$

12. $\int \left(1 - \cos(4x) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{7}\right)\right)\ dx$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

14. $\int \frac{1}{1+x^2}\ dx$

15. $\int 3^x\ dx$

16. $\int \sec^2(2x)\ dx$

17. $\int \operatorname{sen}^2(x)\ dx$

Ex. 6.2 — Nesse problema investigamos o porque que $\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C$.

1 Qual o domínio de $y = \ln x$?

2 Encontre $\frac{d}{dx}\big(\ln x\big)$.

3 Qual o domínio de $y = \ln(-x)$?

4 Encontre $\frac{d}{dx}\big(\ln(-x)\big)$.

5 Você deve ter percebido que $1/x$ tem dois tipos de antiderivadas, dependendo se $x > 0$ ou $x < 0$. Em uma expressão, forneça uma fórmula para $\int \frac{1}{x}\ dx$ que leve em conta esses diferentes domínios e explique sua resposta.

6.1.2 Problemas de Valores Iniciais

Na seção 3.1 vimos que a derivada da função posição retorna a função velocidade, e a derivada da função velocidade descreve a aceleração. Podemos agora fazer a reciproca: a antiderivada da função aceleração retorna a função de velocidade, etc. Enquanto existe apenas uma derivada de uma dada função, existem infinas antiderivadas. Portanto, não podemos simplesmente perguntar "Qual é *a* velocidade de um objeto cuja aceleração é -9.8m/s^2?", Já que há mais de uma resposta. Podemos encontrar *a* resposta se fornecermos mais informações, como no exemplo a seguir. Muitas vezes a informação adicional vem na forma de um valor inicial, um valor da função que se conhece de antemão. Para simplificar a notação, é comum no estudo das equações diferenciais denotar uma solução de $y'(x) = f(x)$ como $y(x)$ em vez de $F(x)$, como anteriormente. Com essa notação, o problema de encontrar uma função $y(x)$, cuja derivada é $f(x)$ e cuja curva integral passa pelo ponto (x_0, y_0), é expresso como: encontrar uma função que satisfaça

$$y' = f(x) \quad y(x_0) = y_0$$

Esse problema é denominado **problema de valor inicial**, e a exigência $y(x_0) = y_0$ é uma **condição inicial** do problema.

Exemplo 6.13 Resolva o problema de valor inicial $y'(x) = \cos x$ e $y'(0) = 1$.

Exemplo 6.14 A aceleração devido à gravidade de um objeto em queda é de -9.8m/s^2. No momento $t = 3$, um objeto caindo tinha velocidade de -10m/s. Encontre a equação da velocidade do objeto.

Solução Queremos saber a função de velocidade, $v(t)$. Nós sabemos duas coisas:

- A aceleração, ou seja, $v'(t) = -9.8$ e
- a velocidade em um tempo específico, ou seja, $v(3) = -10$.

Usando a primeira informação, sabemos que $v(t)$ é uma antiderivada de $v'(t) = -9.8$. Então começamos por encontrar a integral indefinida de -9.8:

$$\int (-9.8)\ \mathrm{d}t = -9.8t + C = v(t).$$

Agora usamos o fato de que $v(3) = -10$ para encontrar C:

$$\begin{aligned} v(t) &= -9.8t + C \\ v(3) &= -10 \\ -9.8(3) + C &= -10 \\ C &= 19.4 \end{aligned}$$

Assim $v(t) = -9.8t + 19.4$. Podemos usar essa equação para entender o movimento do objeto: quando $t = 0$, o objeto tinha uma velocidade de $v(0) = 19.4$m/ s. Como a velocidade é positiva, o objeto estava se movendo para cima. Quando o objeto começou a descer? Imediatamente após $v(t) = 0$:

$$-32t + 86 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{43}{16} \approx 2,69\text{s}.$$

Reconheça que somos capazes de determinar bastante sobre o caminho do objeto, conhecendo apenas sua aceleração e sua velocidade em um único ponto no tempo. ■

Exemplo 6.15 Encontre $f(t)$, dado que $f''(t) = \cos t$, $f'(0) = 3$ e $f(0) = 5$.

Solução Começamos por encontrar $f'(t)$, que é uma antiderivada de $f''(t)$:

$$\int f''(t)\ \mathrm{d}t = \int \cos t\ \mathrm{d}t = \operatorname{sen} t + C = f'(t).$$

Então, $f'(t) = \operatorname{sen} t + C$ para o valor correto de C. Nós recebemos $f'(0) = 3$, então:

$$f'(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 0 + C = 3 \quad \Rightarrow \quad C = 3.$$

Usando o valor inicial, encontramos $f'(t) = \operatorname{sen} t + 3$. Agora encontramos $f(t)$ integrando novamente.

$$f(t) = \int f'(t)\ \mathrm{d}t = \int (\operatorname{sen} t + 3)\ \mathrm{d}t = -\cos t + 3t + C.$$

Nós recebemos $f(0) = 5$, então

$$\begin{aligned} -\cos 0 + 3(0) + C &= 5 \\ -1 + C &= 5 \\ C &= 6 \end{aligned}$$

Assim $f(t) = -\cos t + 3t + 6$. ■

Exercícios

Ex. 6.3 — Uma partícula se desloca sobre o eixo x com uma função posição $x = x(t)$. Determine $x = x(t)$ sabendo que:

1. $\dfrac{dx}{dt} = 2t - 1$ e $x(0) = 2$
2. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$ e $x(0) = 0$
3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 3$ e $v(0) = 1$ e $x(0) = 1$
4. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = e^{-t}$ e $v(0) = 0$ e $x(0) = 1$
5. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \cos(3t)$ e $v(0) = 1$ e $x(0) = 0$

Ex. 6.4 — Resolva os seguintes problemas de valores iniciais.

1. $f'(x) = 3x + 2$ e $f(0) = 7$
2. $\frac{3x^2}{2} + 7x + 7$
3. $f'(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(0) = 2$
4. $f'(x) = 5e^x$ e $f(0) = 10$
5. $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$ e $f(-1) = 9$
6. $f'(x) = \sec^2 x$ e $f(\pi/4) = 5$
7. $f'(x) = 7^x$ e $f(2) = 1$

8. $f''(x) = 5$ e $f'(0) = 7$, $f(0) = 3$
9. $f''(x) = 7x$ e $f'(1) = -1$, $f(1) = 10$
10. $\frac{7x^3}{6} - \frac{9x}{2} + \frac{40}{3}$
11. $f''(x) = 5e^x$ e $f'(0) = 3$, $f(0) = 5$
12. $f''(\theta) = \operatorname{sen}\theta$ e $f'(\pi) = 2$, $f(\pi) = 4$
13. $f''(x) = 24x^2 + 2^x - \cos x$ e $f'(0) = 5$, $f(0) = 0$
14. $f''(x) = 0$ e $f'(1) = 3$, $f(1) = 1$

6.2 Integração por Substituição

Assuma que $F(x)$ seja uma antiderivada de $f(x)$ e que $g(x)$ seja uma função diferenciável. Logo, $F(g(x))$ é uma antiderivada de $f(g(x))g'(x)$ já que

$$\begin{aligned}(F(g(x)))' &= F'(g(x))g'(x)\\ &= f(g(x))g'(x).\end{aligned}$$

Desta forma, se denotarmos $\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x)$, então

$$\int f(g(x))g'(x)\ \mathrm{d}x = F(g(x)).$$

Escrevendo $u = g(x)$ e observando que $\int f(u)\ \mathrm{d}u = F(u)$ temos que

$$\int f(g(x))g'(x)\ \mathrm{d}x = \int f(u)\ \mathrm{d}u.$$

A fórmula acima é conhecida como método de Substituição.

6.1 Teorema 2. : Método de Substituição

Se f é uma função cuja antiderivada éF e g for uma função diferenciável, então

$$\int f(g(x))g'(x)\ \mathrm{d}x = \int f(u)\ \mathrm{d}u,$$

onde $u = g(x)$.

Exercícios

Ex. 6.5 — Calcule as seguintes antiderivadas:

1. $\displaystyle\int x \,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int (3x+1) \,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \left(x^2+x+1\right) \,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \left(x+\frac{1}{x^3}\right) \,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x} \,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \left(3\sqrt[7]{x^2}+\cos(x)\right) \,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int e^{4x} \,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \cos(3x) \,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \left(x+3e^{5x}+\cos(2x)\right) \,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \left(1-\cos(4x)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{7}\right)\right) \,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int 3^x \,\mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int \sec^2(2x) \,\mathrm{d}x$
17. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x) \,\mathrm{d}x$

Ex. 6.6 — Uma partícula se desloca sobre o eixo x com uma função posição $x = x(t)$. Determine $x = x(t)$ sabendo que:

1. $\dfrac{dx}{dt} = 2t-1$ e $x(0) = 2$
2. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$ e $x(0) = 0$
3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 3$ e $v(0) = 1$ e $x(0) = 1$
4. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = e^{-t}$ e $v(0) = 0$ e $x(0) = 1$
5. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \cos(3t)$ e $v(0) = 1$ e $x(0) = 0$

Exemplo 6.2 [Integração por Substituição]

Calcule $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(x^2+5) \,\mathrm{d}x.$

Solução Sabendo que a técnica de substituição está intrinsecamente relacionada com a regra da cadeia, escolhemos u como a "função"de dentro de $\operatorname{sen}(x^2+5)$. (Ressaltamos que esta não é sempre uma boa escolha, mas muitas vezes é o melhor tentativa para começar.) Fazendo $u = x^2+5$, temos $du = 2x \,\mathrm{d}x$. O integrando possui um termo $x \,\mathrm{d}x$ mas não um termo da forma $2x \,\mathrm{d}x$. Logo dividimos ambos os lados da expressão por 2:

$$du = 2x\ \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}du = x\ \mathrm{d}x.$$

Agora substituímos

$$\begin{aligned}\int x\,\mathrm{sen}(x^2+5)\ \mathrm{d}x &= \int \mathrm{sen}(\underbrace{x^2+5}_{u})\underbrace{x\ \mathrm{d}x}_{\frac{1}{2}du}\\ &= \int \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,u\ \mathrm{d}u\\ &= -\frac{1}{2}\cos u + C \qquad \text{(trocando } u \text{ por } x^2+5\text{)}\\ &= -\frac{1}{2}\cos(x^2+5) + C.\end{aligned}$$

Logo $\int x\,\mathrm{sen}(x^2+5)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(x^2+5) + C$. Podemos verificar a resolução, calculando a derivada do lado direito. ■

}Integração por Substituição

1. Escolha $u = g(x)$, geralmente, a "função de dentro"da função do composta $f(g(x))$.
2. Calcule $\mathrm{d}u = g'(x)\ \mathrm{d}x$.
3. Use a substituição $u = g(x)$ e $\mathrm{d}u = g'(x)\ \mathrm{d}x$ para transformar o integral em um que envolve apenas u: $\int f(u)\ \mathrm{d}u$.
4. Calcule a integral resultante.
5. Substitua u por $g(x)$, de modo que a expressar a solução final só em termos de x.

Exemplo 6.3 [Integração por Substituição]
Calcule $\int x\sqrt{x+3}\ \mathrm{d}x$.

Solução Nesse caso, após reconhecer a função composta, escolhemos $u = x+3$. E dessa forma $du = dx$, fornecendo uma substituição simples. Mas nesta fase, temos:

$$\int x\sqrt{x+3}\ \mathrm{d}x = \int x\sqrt{u}\ \mathrm{d}u.$$

Não podemos calcular uma integral que possui tanto um x e um u nela. Precisamos converter o x de uma expressão envolvendo apenas u. Como $u = x+3$, temos $u-3 = x$. Trocando x in por $u-3$. e reescrevendo $\sqrt{u}$ como $u^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+3}\ \mathrm{d}x &= \int (u-3)u^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}u\\ &= \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 3u^{\frac{1}{2}}\right)\ \mathrm{d}u\\ &= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + C\\ &= \frac{2}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}} - 2(x+3)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.4 [Integração por Substituição]

Calcule $\int (2x+2)\, e^{x^2+2x+1}\ \mathrm{d}x$.

Solução Após reconhecer a composição, escolhemos $u = x^2+2x+1$. Logo, $\frac{du}{dx} = 2x+2$. Pelo método de substituição, concluímos que

$$\int (2x+2)\, e^{x^2+2x+1}\ \mathrm{d}x = \int e^u\ \mathrm{d}u = e^u + C = e^{x^2+2x+1} + C.$$

■

Exemplo 6.5 [Integração por Substituição]

Calcule $\int 15x^2 \sqrt[5]{5x^3+7}\ \mathrm{d}x$.

Solução Fazendo a substituição $u = 5x^3+7$, $\frac{du}{dx} = 15x^2$ temos:

$$\int 15x^2 \sqrt[5]{5x^3+7}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt[5]{[u]}\ \mathrm{d}u = \frac{5u^{6/5}}{6} + C = \frac{5(5x^3+7)^{6/5}}{6} + C.$$

■

Exemplo 6.6 [Integração por Substituição]

Calcule $\int x^2\sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x$.

Solução Fazendo a substituição $u = x+1$, temos $x = u-1$ e $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Então,

$$\begin{aligned}
\int x^2\sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x &= \int (u-1)^2\sqrt{u}\ \mathrm{d}u && (6.4)\\
&= \int (u^2-2u+1)u^{1/2}\ \mathrm{d}u && (6.5)\\
&= \int \left(u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}\right)\ \mathrm{d}u && (6.6)\\
&= \frac{2}{7}u^{7/2} - 2\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C && (6.7)\\
&= \frac{2}{7}(x+1)^{7/2} - \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C. && (6.8)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.7 [Integração por Substituição]

Calcule $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\ \mathrm{d}x$.

Solução Fazendo a substituição $t = \operatorname{sen} x$, $\frac{dx}{dt} = \cos x$ e assim temos que

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x \; \mathrm{d}x &= \int \sqrt{t} \; \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{3}t^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2}(x) + C\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.8 [Integração por Substituição]
Calcule $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2} \; \mathrm{d}x$.

Solução Observe que $\left(1+x^2\right)' = 2x$. Utilize a substituição $t = 1+x^2$. Logo, $\dfrac{dx}{dt} = 2x$ e temos que

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2} \; \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t} \; \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln(t) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C\end{aligned}$$

■

6.2.1 Integrais Trigonométricas

Nessa seção utilizaremos a técnica de Integração por substituição para calcularmos integrais envolvendo funções trigonométricas. Essa estratégia sera detalhada e generalizada nas Seções 8.3 e 8.4.

Exemplo 6.9 Calcule $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x) \; \mathrm{d}x$.

Solução Observe que $\operatorname{sen}^3(x) = \operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen} x = \left(1-\cos^2(x)\right)\operatorname{sen} x$. Utilize a substituição $t = \cos x$. Logo, $\dfrac{dt}{dx} = -\operatorname{sen} x$ e temos que

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3(x) \; \mathrm{d}x &= \int \left(1-\cos^2(x)\right)\operatorname{sen} x \; \mathrm{d}x \\ &= -\int \left(1-t^2\right) \; \mathrm{d}t \\ &= t - \left(\frac{1}{3}t^3\right) + C \\ &= -\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos^3(x)\right) + C \\ &= \frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos x + C.\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.10 Calcule $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

Solução Como $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, tome $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x \, dx$. Assim $\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = \int -\dfrac{du}{u} = -\ln|u| = -\ln|\cos x| = \ln|(\cos x)^{-1}| = \ln|\sec x|$. ■

Exemplo 6.11 Calcule $\int \sec x \, dx$.

Solução Para calcularmos essa integral utilizaremos um truque. Multiplicando em cima e embaixo por $\sec x + \operatorname{tg} x$ temos:

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} \, dx.$$

Fazendo a substituição $u = \sec x + \operatorname{tg} x$ e $du = (\sec^2 x + \sec x \operatorname{tg} x) \, dx$. Temos

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|.$$

■

6.12 Proposição 2. : Integrais das funções Trigonométricas

- $\int \operatorname{tg} u \, du = \ln|\sec u| + C$
- $\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
- $\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$
- $\int \operatorname{cossec} u \, du = \ln|\operatorname{cossec} u - \operatorname{cotg} u| + C$

Exemplo 6.13 Calcule $\int x^2 \operatorname{cossec} x^3 \, du$.

6.14 Proposição 2. : Integrais Envolvendo as Funções Trigonométricas Inversas

- $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \, du = \operatorname{arcsen} u + C$

- $\square$ $\displaystyle\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \operatorname{arctg} u + C$
- $\square$ $\displaystyle\int \frac{1}{|u|\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \operatorname{arcsec}|u| + C$

Exemplo 6.15 Calcule $\boxed{a}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\boxed{b}$ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\boxed{c}$ $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$

Exercícios

Ex. 6.7 —

1. $\displaystyle\int 3x^2\left(x^3-5\right)^7\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int (2x-5)\left(x^2-5x+7\right)^3\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int x\left(x^2+1\right)^8\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int (12x+14)\left(3x^2+7x-1\right)^5\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \left(3x^2+2x\right)\left(5x^3+5x^2+2\right)^8\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \cos(3-6x)\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \sec^2(4-x)\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{1}{2x+7}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\left(x^3+3\right)^2}\,\mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int \sec(2x)\,\mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int \frac{x^3-x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
17. $\displaystyle\int \frac{x^4}{\sqrt{x^5+1}}\,\mathrm{d}x$
18. $\displaystyle\int \frac{\frac{1}{x}+1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
19. $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
20. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$
21. $\displaystyle\int \frac{1}{x-5}\,\mathrm{d}x$
22. $\displaystyle\int \frac{7}{3x+2}\,\mathrm{d}x$
23. $\displaystyle\int x\cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x$
24. $\displaystyle\int x^2\csc^2\left(x^3+1\right)\,\mathrm{d}x$
25. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2(x)\,\mathrm{d}x$

26. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\sqrt{\cos(x)}\ \mathrm{d}x$

Ex. 6.8 —

1. $\displaystyle\int e^{3x-1}\ \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int e^{x^3}x^2\ \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int e^{x^2-2x+1}(x-1)\ \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x}\ \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^{2x}}\ \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int 3^{3x}\ \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int 4^{2x}\ \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\ \mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{\left(\ln x\right)^2}{x}\ \mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{\ln\left(x^3\right)}{x}\ \mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln\left(x^2\right)}\ \mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+1}{x}\ \mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x}\ \mathrm{d}x$
14. $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x+1}\ \mathrm{d}x$
15. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-5}{x-3}\ \mathrm{d}x$
16. $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+7}{x+1}\ \mathrm{d}x$
17. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x}\ \mathrm{d}x$
18. $\displaystyle\int \frac{3x^3+4x^2+2x-22}{x^2+3x+5}\ \mathrm{d}x$
19. $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2+7x+3}\ \mathrm{d}x$
20. $\displaystyle\int \frac{9(2x+3)}{3x^2+9x+7}\ \mathrm{d}x$
21. $\displaystyle\int \frac{-x^3+14x^2-46x-7}{x^2-7x+1}\ \mathrm{d}x$
22. $\displaystyle\int \frac{7}{x^2+7}\ \mathrm{d}x$
23. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\ \mathrm{d}x$
24. $\displaystyle\int \frac{14}{\sqrt{5-x^2}}\ \mathrm{d}x$
25. $\displaystyle\int \frac{2}{x\sqrt{x^2-9}}\ \mathrm{d}x$
26. $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{x^4-16x^2}}\ \mathrm{d}x$

Ex. 6.9 —

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\ \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+81}\ \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{2}{4x^2+1}\ \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\ \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}\ \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+8}\ \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{-x^2+6x+7}}\ \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{-x^2+8x+9}}\ \mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+6x+34}\ \mathrm{d}x$

10. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-2x+10}\ \mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int \frac{7-2x}{x^2+12x+61}\ \mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2+5x-2}{x^2-10x+32}\ \mathrm{d}x$

13. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+9}\ \mathrm{d}x$

14. $\displaystyle\int \frac{x^3-x}{x^2+4x+9}\ \mathrm{d}x$

15. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)+1}\ \mathrm{d}x$

16. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)+1}\ \mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{1-\operatorname{sen}^2(x)}\ \mathrm{d}x$

18. $\displaystyle\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x-6}}\ \mathrm{d}x$

19. $\displaystyle\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+8}}\ \mathrm{d}x$

20. $\displaystyle\int \cot x\ \mathrm{d}x$. A dica é reescrever $\cot x$ como $\cos x/\operatorname{sen} x$, e fazer $u = \operatorname{sen} x$.

21. $\displaystyle\int \csc x\ \mathrm{d}x$. A dica é multiplicar $\csc x$ por $(\csc x + \cot x)/(\csc x + \cot x)$.

22. $\displaystyle\int \cos^3(x)\operatorname{sen}(x)\ \mathrm{d}x$

23. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\ \mathrm{d}x$

24. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\big(5x+1\big)\ \mathrm{d}x$

6.3 Integração por Partes

A partir da Regra do Produto para derivação obtemos uma técnica de integração denominada de integração por partes. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em (a, b). Então, para cada $x \in (a, b)$, temos que

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

ou equivalentemente

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x)\,.$$

Como $f(x)g(x)$ é uma antiderivada de $[f(x)g(x)]'$, se existir uma antiderivada de $f'(x)g(x)$, então também existirá uma antiderivada de $f(x)g'(x)$ e valerá a **fórmula de integração por partes**:

$$\int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x \qquad (6.9)$$

6.1 **Teorema 3.**

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em (a, b).Se existir uma antiderivada de $f'(x)g(x)$, então também existirá uma antiderivada de $f(x)g'(x)$ e valerá a **fórmula de integração por partes**:

$$\int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x \tag{6.10}$$

Notação 2. *Se denotarmos $u = f(x)$ e $v = g(x)$, temos*

$$\mathrm{d}u = f'(x)\ \mathrm{d}x \quad e \quad \mathrm{d}v = g'(x)\ \mathrm{d}x$$

e podemos reescrever a Equação (6.10) como

$$\int u\ \mathrm{d}v = uv - \int v\ \mathrm{d}u$$

Exemplo 3 - Integração por Partes.
Calcule $\int x \cos x\ \mathrm{d}x.$ ◁

Solução A chave para a integração por partes é identificar parte do integrando como "u" e parte como "$\mathrm{d}v$." A prática vai ajudar a fazer boas identificações, e mais tarde vamos apresentar alguns princípios que ajudam nessa escolha. Nesse exemplo escolheremos $u = x$ pois a sua derivada é uma constante (e assim esperamos que a integral no lado direito seja mais simples) e consequentemente escolhemos $\mathrm{d}v = \cos x\ \mathrm{d}x$. Em geral, é útil para fazer uma pequena tabela de valores como feito abaixo. Inicialmente só conhecemos u e $\mathrm{d}v$ como mostrado no lado esquerdo da Figura 6.2; Na direita, preenchemos com os valores restantes que precisamos. Se $u = x$, então $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Como $\mathrm{d}v = \cos x\ \mathrm{d}x$, v é uma antiderivada de $\cos x$. Logo podemos escolher $v = \operatorname{sen} x$

$$\begin{array}{ll} u = x & v = ? \\ \mathrm{d}u = ? & \mathrm{d}v = \cos x\ \mathrm{d}x \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} u = x & v = \operatorname{sen} x \\ \mathrm{d}u = dx & \mathrm{d}v = \cos x\ \mathrm{d}x \end{array}$$

.

Figura 6.2 Montando a Integração por Partes

Fazendo as substituições na integral por partes temos

$$\int x \cos x\ \mathrm{d}x = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x.$$

Integrando $\operatorname{sen} x$ temos $-\cos x + C$ e assim

$$\int x \cos x\ \mathrm{d}x = x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

■

O exemplo acima demonstra como a integração por partes funciona de modo geral. Tentamos identificar u e $\mathrm{d}v$ na integral dada, e o ponto crucial é que geralmente queremos escolher u e $\mathrm{d}v$ para que $\mathrm{d}u$ seja mais simples do que u e esperemos que v não seja muito mais complicado do que $\mathrm{d}v$. Isto significa que a integral no lado direito da Integração pela fórmula Partes, $\int v \ \mathrm{d}u$ será mais simples que o integrando original $\int u \ \mathrm{d}v$. No exemplo acima, nós escolhemos $u = x$ e $\mathrm{d}v = \cos x \ \mathrm{d}x$. Então $\mathrm{d}u = \ \mathrm{d}x$ era mais simples do que u e $v = \operatorname{sen} x$ não é mais complicado do que $\mathrm{d}v$. Portanto, em vez de integrar $x \cos x \ \mathrm{d}x$, poderíamos integrar $\operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x$, o que sabemos fazer.

Exemplo 6.4 [Integração por Partes]

Calcule $\int x e^x \ \mathrm{d}x$.

Solução Fazemos $u = x$ e $\mathrm{d}v = e^x \ \mathrm{d}x$. Logo $\mathrm{d}u = \ \mathrm{d}x$ e $v = e^x$.

$$\begin{array}{cc} u = x & v = ? \\ du = ? & dv = e^x \ \mathrm{d}x \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc} u = x & v = e^x \\ du = dx & dv = e^x \ \mathrm{d}x \end{array}$$

Figura 6.3 Montando a Integração por Partes

Logo utilizando integração por partes temos

$$\int x e^x \ \mathrm{d}x = x e^x - \int e^x \ \mathrm{d}x.$$

$$\int x e^x \ \mathrm{d}x = x e^x - e^x + C.$$

■

Exemplo 6.5 [Integração por Partes]

Calcule $\int x^2 \cos x \ \mathrm{d}x$.

Solução Faremos $u = x^2$ e logo $dv = \cos x \ \mathrm{d}x$. Assim $du = 2x \ \mathrm{d}x$ e $v = \operatorname{sen} x$ como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{cc} u = x^2 & v = ? \\ du = ? & dv = \cos x \ \mathrm{d}x \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc} u = x^2 & v = \operatorname{sen} x \\ du = 2x \ \mathrm{d}x & dv = \cos x \ \mathrm{d}x \end{array}$$

Figura 6.4 Montando a Integração por Partes

A fórmula de integração por partes fornece então:

$$\int x^2 \cos x \ \mathrm{d}x = x^2 \operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x.$$

Neste ponto, podemos constatar que a integral à direita é realmente mais simples do que a integral com que começamos, mas para calculá-la, precisaremos fazer uma integração por partes novamente. Agora escolhemos $u = 2x$ e $dv = \operatorname{sen} x$

$$\begin{array}{ll} u = 2x & v = ? \\ du = ? & dv = \operatorname{sen} x \; dx \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} u = 2x & v = -\cos x \\ du = 2 \; dx & dv = \operatorname{sen} x \; dx \end{array}$$

Figura 6.5 Integrando por Partes, novamente.

$$\int x^2 \cos x \; dx = x^2 \operatorname{sen} x - \left(-2x \cos x - \int -2 \cos x \; dx \right).$$

E logo

$$\int x^2 \cos x \; dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C.$$

■

Exemplo 6.6 [Integração por Partes]

Calcule $\int e^x \cos x \; dx$.

Solução Essa é uma integral clássica. Faremos u $u = e^x$ e $dv = \cos x \; dx$. Então $du = e^x \; dx$ e $v = \operatorname{sen} x$:

$$\begin{array}{ll} u = e^x & v = ? \\ du = ? & dv = \cos x \; dx \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} u = e^x & v = \operatorname{sen} x \\ du = e^x \; dx & dv = \cos x \; dx \end{array}$$

Figura 6.6 Montando a Integração por Partes

Observe que du não é simples que u, o que vai contra o nosso princípio geral (mas confie). A integração por partes produz

$$\int e^x \cos x \; dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \; dx.$$

A integral à direita não é muito diferente daquela que começamos, então parece que chegamos a lugar nenhum. Mas vamos continuar e aplicar a integração por partes para o novo integrante, usando $u = e^x$ e $dv = \operatorname{sen} x \; dx$. Assim:

$$\begin{array}{ll} u = e^x & v = ? \\ du = ? & dv = \operatorname{sen} x \; dx \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} u = e^x & v = -\cos x \\ du = e^x \; dx & dv = \operatorname{sen} x \; dx \end{array}$$

Figura 6.7 Integrando por partes novamente.

Logo

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \ \mathrm{d}x &= e^x \operatorname{sen} x - \left(-e^x \cos x - \int -e^x \cos x \ \mathrm{d}x\right) \\ &= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Parece que estamos de volta exatamente a onde começamos, pois o lado direito contém $\int e^x \cos x \ \mathrm{d}x$. Mas este fato é positivo. Adicionando $\int e^x \cos x \ \mathrm{d}x$ a ambos os lados, temos:

$$2\int e^x \cos x \ \mathrm{d}x = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$

Dividindo ambos os lados por 2

$$\int e^x \cos x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x\big).$$

simplificando temos

$$\int e^x \cos x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x \left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) + C.$$

■

Exemplo 6.7 [Integração por Partes]

Calcule $\int \ln x \ \mathrm{d}x$.

Solução Até esse ponto, obtivemos regras para integrar as funções trigonométricas familiares e e^x, mas ainda mão apresentamos uma regra para integrar $\ln x$. Isso porque $\ln x$ não podia ser facilmente integrado com nenhuma das regras que apresentamos até este ponto. Mas podemos encontrar sua antiderivada por uma aplicação inteligente de integração por partes. Faça $u = \ln x$ e $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$. Este é um bom e sorrateiro truque, que pode ser útil em outras situações. Assim $\mathrm{d}u = (1/x)\ \mathrm{d}x$ e $v = x$, como apresentamos abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} u = \ln x & v = ? & \Rightarrow & u = \ln x & v = x \\ du = ? & dv = dx & & du = 1/x \ \mathrm{d}x & dv = dx \end{array}$$

Figura 6.8 Montando a Integração por Partes

Logo, por integração por partes

$$\int \ln x \ \mathrm{d}x = x\ln x - \int x\frac{1}{x} \ \mathrm{d}x.$$

Que pode ser simplificado à:

$$\int \ln x \ \mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$$

■

Exemplo 6.8 [Integração por Partes]

Calcule $\int \operatorname{arctg} x \ \mathrm{d}x$.

Solução Utilizaremos o mesmo truque da integral anterior. Faça $u = \operatorname{arctg} x$ e $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$. Então $\mathrm{d}u = 1/(1+x^2) \ \mathrm{d}x$ e $v = x$. Por Integração por Partes, temos:

$$\int \operatorname{arctg} x \ \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \ \mathrm{d}x.$$

A última integral pode ser feita por substituição. Fazendo $u = 1+x^2$, temos $du = 2x \ \mathrm{d}x$. Assim

$$\int \operatorname{arctg} x \ \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} \ \mathrm{d}u.$$

Logo

$$\int \operatorname{arctg} x \ \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2) + C.$$

■

6.3.1 Fórmulas de Recorrência

6.9 Teorema 3.

Dado n um inteiro positivo e $n \geq 2$,

- ☐ $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x \ \mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x \ \mathrm{d}x$
- ☐ $\int \cos^n x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \ \mathrm{d}x$
- ☐ $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x \ \mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x \ \mathrm{d}x$

Demonstração. Provaremos o item a.

$$I_n = \operatorname{sen} x cos^{n-1} x + (n-1)\int (1-\cos^2 x) cos^{n-2} x \ \mathrm{d}x$$

Observe que

$$\int (1-\cos^2 x) cos^{n-2} x \ \mathrm{d}x = \int \cos^{n-2} x \ \mathrm{d}x - \int \cos^2 x \ \cos^{n-2} x \ \mathrm{d}x = \int \cos^{n-2} x \ \mathrm{d}x - \int \cos^n x \ \mathrm{d}x$$

logo

$$I_n = \operatorname{sen} x cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \ \mathrm{d}x - (n-1)\int \cos^n x \ \mathrm{d}x$$

$$I_n = \operatorname{sen} x cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

ou seja

$$nI_n = \operatorname{sen} x cos^{n-1}x + (n-1)I_{n-2}$$
$$I_n = \frac{\operatorname{sen} x cos^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

Agora provaremos o item c. ■

Exemplo 6.10 Prove a fórmula de redução $\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$

Solução Fazendo $u = x^n$ e $dv = e^x \, dx$. Temos que $du = nx^{n1} \, dx$ e $v = e^x$. Fazendo a integral por partes obtemos:

$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - \int e^x \cdot nx^{n-1} \, dx \tag{6.11}$$
$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx \tag{6.12}$$
$$\tag{6.13}$$
$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - \int e^x \cdot nx^{n-1} \, dx \tag{6.14}$$
$$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx \tag{6.15}$$
$$\tag{6.16}$$

■

Exemplo 6.11 Prove a fórmula de redução paara $n \geq 2$ $\int \sec^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg} x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \int \sec^{n-2} x \, dx$

Solução A prova é por integração por partes:

$$\int \sec^n(x) \, dx = \int \sec^2(x) \sec^{n-2}(x) \, dx = \operatorname{tg}(x) \sec^{n-2}(x) - \int \operatorname{tg}(x) \frac{d \sec^{n-2}(x)}{dx} \, dx.$$

Como a derivada de $\sec^{n-2}(x) = (\sec(x))^{n-2}$ é $(n-2)\sec^{n-3}(x)\sec(x)\operatorname{tg}(x)$ temos:

$$\int \sec^n(x) \, dx = \operatorname{tg}(x)\sec^{n-2}(x) - (n-2)\int \operatorname{tg}^2(x)\sec^{n-2}(x) \, dx$$

Agora usando a identidade $\operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) - 1$ temos:

$$\int \sec^n(x) \, dx = \operatorname{tg}(x)\sec^{n-2}(x) - (n-2)\int \sec^n(x) \, dx + (n-2)\int \sec^{n-2}(x) \, dx$$

ou seja

$$I_n = \operatorname{tg}(x)\sec^{n-2}(x) - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2}$$

Adicionando $(n-2)I_n$ em ambos os lados temos:

$$(n-1)I_n = \operatorname{tg}(x)\sec^{n-2}(x) + (n-2)I_{n-2}$$

Agora, obtemos a fórmula dividindo por $n-1$, o que podemos fazer para qualquer valor de n, exceto $n = 1$. ■

Exercícios

Ex. 6.10 — Calcule as seguintes integrais indefinidas:

1. $\int x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$
2. $\int x e^{-x} \, \mathrm{d}x$
3. $\int x^2 \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$
4. $\int x^3 \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$
5. $\int x e^{x^2} \, \mathrm{d}x$
6. $\int x^3 e^{x} \, \mathrm{d}x$
7. $\int x e^{-2x} \, \mathrm{d}x$
8. $\int e^{2x} \cos x \, \mathrm{d}x$
9. $\int e^{2x} \operatorname{sen}(3x) \, \mathrm{d}x$
10. $\int e^{5x} \cos(5x) \, \mathrm{d}x$
11. $\int \operatorname{sen} x \cos x \, \mathrm{d}x$
12. $\int \operatorname{sen}^{-1} x \, \mathrm{d}x$
13. $\int \operatorname{tg}^{-1}(2x) \, \mathrm{d}x$
14. $\int x \operatorname{tg}^{-1} x \, \mathrm{d}x$
15. $\int \operatorname{sen}^{-1} x \, \mathrm{d}x$
16. $\int x \cosh x \, \mathrm{d}x$
17. $\int x \operatorname{senh} x \, \mathrm{d}x$
18. $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$
19. $\int (x-2) \ln x \, \mathrm{d}x$
20. $\int x \ln(x-1) \, \mathrm{d}x$
21. $\int x \ln(x^2) \, \mathrm{d}x$
22. $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$
23. $\int (\ln x)^2 \, \mathrm{d}x$
24. $\int (\ln(x+1))^2 \, \mathrm{d}x$
25. $\int x \sec^2 x \, \mathrm{d}x$
26. $\int x \csc^2 x \, \mathrm{d}x$

Ex. 6.11 —

1. $\int x \csc^2 x \, \mathrm{d}x$
2. $\int x \sec x \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$
3. $\int x \csc x \cot x \, \mathrm{d}x$
4. $\int \sec x \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$

Ex. 6.12 — Calcule a integral indefinida depois de fazer uma substituição.

1. $\int \operatorname{sen}(\ln x) \, \mathrm{d}x$

2. $\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})\ \mathrm{d}x$
3. $\int \ln(\sqrt{x})\ \mathrm{d}x$
4. $\int e^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$
5. $\int e^{\ln x}\ \mathrm{d}x$

Capítulo

7

Integração Definida

> *Nature laughs at the difficulties of integration.*
>
> — Pierre-Simon Laplace

Neste capítulo:

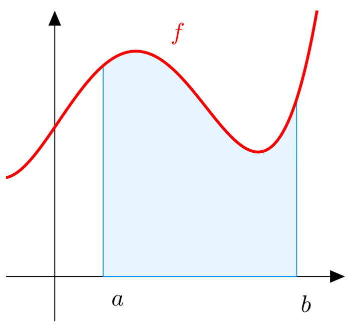
Neste capítulo, utilizaremos o problema da área como motivação e de modo a formular o conceito de integral definida. Discutiremos o teorema fundamental do cálculo, que relaciona os problemas de encontrar retas tangentes e áreas, ou dito de outra forma, que relaciona os problemas de antiderivadas e integrais. Finalmente discutiremos técnicas para cálculo de integrais. Concluímos o capítulo estudando funções definidas por integrais, com foco na função de logaritmo natural.

7.1 Áreas e Somas de Riemann

7.1.1 Problema do cálculo de área

Considere o problema de determinar a área da região delimitada pelo gráfico de uma função $f(x)$, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$.

[h]



A área dessa região pode ser aproximada utilizando retângulos, como na figura 7.1. Aumentando o número de retângulos e diminuindo o tamanho de cada retângulo teremos uma aproximação melhor. E no "limite" teremos a área da região.

[h]

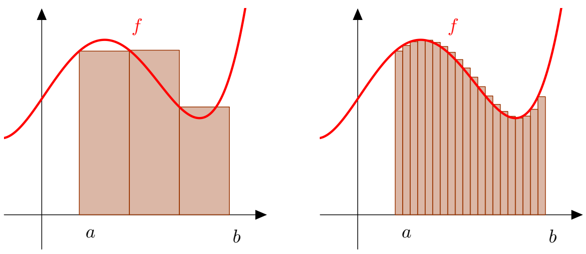
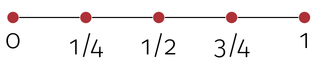


Figura 7.1 Aproximação da área da região pela soma das áreas dos retângulos.

Vamos motivar a construção da integral utilizando um exemplo considere a região abaixo do gráfico $y = x^2$ de $[0, 1]$. Essa região é apresentada na Figura 7.2. Nesse caso considere o problema de aproximar (e posteriormente determinar) a área com sinal da região. Denominaremos essa área de integral de x^2 de 0 até 1 e a denotaremos por $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$. Faremos primeiramente algumas aproximações. Começaremos com 4 divisões de tamanho $1/4$. Estas divisões *particionam* o intervalo $[0, 1]$ em 4 *subintervalos*, $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$ e $[3/4, 1]$. Em cada um desses subintervalos vamos desenhar um retângulo. Três

[h]



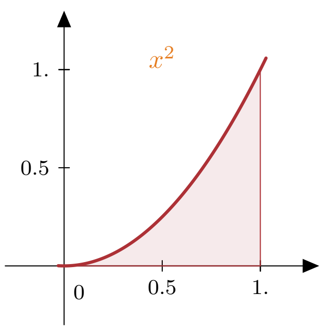


Figura 7.2 Gráfico de $f(x) = x^2$. Qual a área da região pintada?

escolhas são usuais para a altura do retângulo: o **extremo esquerdo**, o **extremo direito** e o **ponto médio**.

- **Extremo esquerdo** Nesse caso escolhemos como altura o valor da função no extremo esquerdo de cada subintervalo.
- **Extremo direito** Nesse caso escolhemos como altura o valor da função no extremo direito de cada subintervalo.
- **Ponto Médio** Nesse caso escolhemos como altura o valor da função no ponto médio de cada subintervalo.

Exemplo 7.1 Aproxime o valor de $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ utilizando o extremo esquerdo, o extremo direito, e o ponto médio, utilizando 4 subintervalos de mesmo tamanho.

[h]

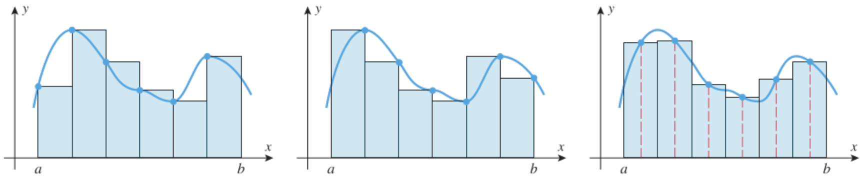


Figura 7.3 Aproximação pelo extremo esquerdo, extremo direito e ponto médio

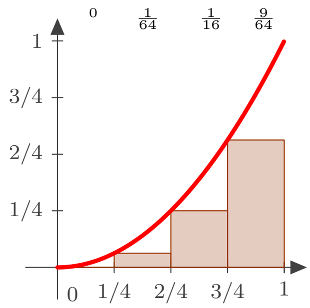


Figura 7.4 Aproximando $\int_0^1 x^2 \; \mathrm{d}x$ usando o extremo esquerdo.

Solução **Aproximação usando o extremo esquerdo.** Dividiremos o intervalo $[0, 4]$ em 4 subintervalos. Na figura 7.4 vemos os 4 retângulos desenhados em $f(x) = x^2$ usando o extremo esquerdo. (As áreas dos retângulos são dadas em cada figura.) Observe que no primeiro subintervalo, $[0, 1/4]$, o retângulo tem altura $f(0) = 0$. Desta forma somando as áreas dos retângulos (base $\times$ altura) temos:

$$f(0) \cdot 1 + f(1/4) \cdot 1/4 + f(1/2) \cdot 1/4 + f(3/4) \cdot 1/4 =$$
$$0 + 1/64 + 1/16 + 9/64 = 14/64.$$

Aproximação usando o extremo direito. Somando a área dos retângulos (altura$\times$ bases) temos:

$$f(1/4) \cdot 1 + f(1/2) \cdot 1 + f(3/4) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 =$$
$$1/64 + 1/16 + 9/64 + 1/4 = 30/64.$$

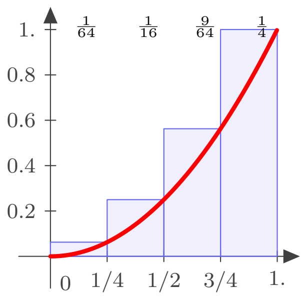


Figura 7.5 Aproximando $\int_0^1 x^2 \; \mathrm{d}x$ usando o extremo direito.

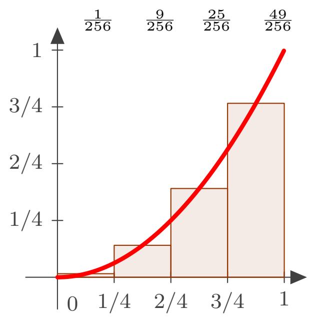


Figura 7.6 Aproximando $\int_0^1 x^2 \; \mathrm{d}x$ usando o ponto médio.

Aproximação usando o ponto médio. A figura 7.6 mostra a aproximação de f usando o ponto médio. Temos a aproximação de $\int_0^1 x^2 \; \mathrm{d}x$ como:

$$f(1/8)\cdot 1/4 + f(3/8)\cdot 1/4 + f(5/8)\cdot 1/4 + f(7/8)\cdot 1/4 = \\ 1/256 + 9/246 + 25/256 + 49/256 = 21/64.$$

■

Observação 2. *Dado uma partição de $[a, b]$, o primeiro subintervalo é $[x_0, x_1]$; o segundo é $[x_1, x_1]$; o i-ésimo subintervalo é $[x_{i-1}, x_i]$.*

- *Quando usamos o extremo esquerdo o ponto que utilizamos para definir a altura é $x_i^* = x_{i-1}$, e consequentemente a altura do i-ésimo retângulo é $f(x_{i-1})$.*
- *Quando usamos o extremo direito o ponto que utilizamos para definir a altura é $x_i^* = x_i$, e consequentemente a altura do i-ésimo retângulo é $f(x_i)$.*
- *Quando usamos o ponto médio o ponto que utilizamos para definir a altura é $x_i^* = \dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$, e a altura do i-ésimo retângulo é $f\left(\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$. Em todos os casos a soma das áreas dos retângulos*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

*é dita **Soma de Riemann** de f em $[a, b]$.*

Utilizaremos essas fórmulas nos próximos exemplos

Exemplo 7.3 Calcule $\int_0^1 x^2 \; \mathrm{d}x$ aproximando a área utilizando o extremo direito com n subintervalos igualmente espaçados.

Solução Sabemos que $\Delta x = \dfrac{1-0}{n} = 1/n$. Também sabemos que $x_i = 0 + \Delta x(i-1) = (i-1)/n$. O extremo direito é $x_i = i/n$. Assim a soma será

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1})\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i}{n}\right]^2 \Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^3}\right) i^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \left(\frac{1}{n^3}\right)\left(\frac{n(n+1)(2n+1}{6}\right) \\ &= \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\end{aligned}$$

Encontramos uma fórmula para aproximar a integral definida utilizando n subintervalos igualmente espaçados e extremo direito. Usando 10 subintervalos, temos uma aproximação de $0,385$. Usando $n = 1000$ dá uma aproximação de 0.3338. ■

Exemplo 7.4 Aproxime $\int_{-1}^{5} x^3 \, \mathrm{d}x$ usando o extremo direito e n subintervalos igualmente espaçados, então faça $n \to \infty$ para encontrar a área exata. Neste caso $\Delta x = \dfrac{5-(-1)}{n} = 6/n$. Também temos que $x_i = (-1) + i\Delta x$; A soma correspondente ao extremo direito é:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5} x^3 \, \mathrm{d}x &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(-1+i\Delta x)\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1+i\Delta x)^3 \Delta x \\ &= \sum_{i=1}^{n}\big((i\Delta x)^3 - 3(i\Delta x)^2 + 3i\Delta x - 1\big)\Delta x \qquad \text{(distribuindo } \Delta x\text{)} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\big(i^3\Delta x^4 - 3i^2\Delta x^3 + 3i\Delta x^2 - \Delta x\big) \qquad \text{(abrindo o somatório)} \\ &= \Delta x^4 \sum_{i=1}^{n} i^3 - 3\Delta x^3 \sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\Delta x^2 \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} \Delta x \\ &= \Delta x^4 \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - 3\Delta x^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\Delta x^2 \frac{n(n+1)}{2} - n\Delta x\end{aligned}$$

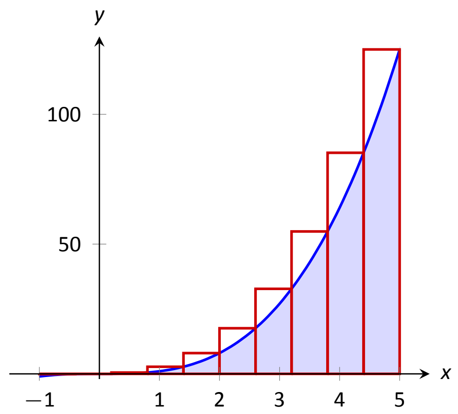


Figura 7.7 Aproximando $\int_{-1}^{5} x^3 \, dx$ usando o extremo direito e 10 subintervalos igualmente espaçados.

(usando $\Delta x = 6/n$)

$$= \frac{1296}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 3\frac{216}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{36}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - 6$$

(simplificando)

$$= 156 + \frac{378}{n} + \frac{216}{n^2}$$

Mais uma vez, encontramos uma fórmula sucinta para aproximar a integral definida utilizando n subintervalos igualmente espaçados e extremo direito. Usando 10 subintervalos, temos uma aproximação de $195,96$. Usando $n = 100$ dá uma aproximação de $159,802$. Podemos agora calcular o valor exato utilizando o limite

$$\int_{-1}^{5} x^3 \, dx = \lim_{n\to\infty} \left(156 + \frac{378}{n} + \frac{216}{n^2}\right) = 156.$$

7.2 Integral Definida

Nesta seção formalizaremos as ideias apresentadas na seção anterior. Começaremos definindo uma partição. Nos exemplos da seção anterior utilizamos apenas partições em subintervalos de mesmo tamanho, mas nada impede que consideremos partições mais gerais. Seja $[a,b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado e fechado. Dizemos que

$$P: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \qquad n \in \mathbb{N},$$

é uma **partição** ou **divisão** de $[a,b]$. Neste caso, escrevemos $P = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ Nos exemplos da seção anterior consideramos três escolhas de ponto para determinar a altura: o extremo direito, o extremo esquerdo e o ponto médio. Novamente, nada impede que

[h]

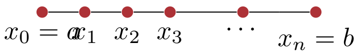


Figura 7.8 Uma partição do intervalo $[a, b]$

consideremos escolhas mais gerais. Denotaremos por Δx_i o tamanho do i-ésimo subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ e por x_i^* qualquer valor no i-ésimo subintervalo. Os pontos x_i^* são denominados **marcas** e o conjunto das marcas será denotado por $C = \{x_i^*\}$. Seja f uma função limitada

[h]

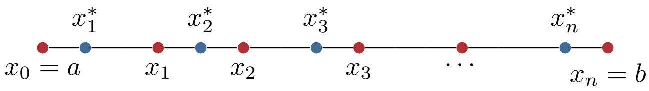


Figura 7.9 Marcas

definida no intervalo fechado $[a, b]$, a soma

$$R_{f,P,C} \triangleq \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

é dita **Soma de Riemann** de f em $[a, b]$. Diremos que uma função f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ é **integrável**, se existir um número $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = A$$

para toda partição $P = (x_i)$ de $[a, b]$ e para todo conjunto de marcas $x_i^* \in [x_{i-1}\,,\, x_i]$. Escrevendo o limite acima utilizando ε's e δ's temos

7.1 Definição 2. : Integral de Riemann

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ será dita **integrável**, se existir $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i - A \right| < \varepsilon$$

para toda partição de $[a, b]$ com $|P| < \delta$, qualquer que seja a escolha das marcas $x_i^* \in [x_{i-1}\,,\, x_i]$. Neste caso, escrevemos

$$A = \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x$$

que é denominada **integral definida** ou simplesmente **integral** de f em relação à x no intervalo $[a, b]$.

É importante observar que de acordo com a definição anterior, para que a integral exista o limite não deve depender da escolha da partição e das marcas. Um caso importante para o qual a integral existe, são as funções contínuas:

7.2 **Teorema 2. :** Funções Contínuas são Integráveis

- Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ então f é integrável em $[a, b]$.
- Se f é limitada e contínua por partes no intervalo $[a, b]$ então f é integrável em $[a, b]$.

A demonstração desse teorema será apresentada na próxima seção. Vejamos alguns exemplos. Nesses exemplos, as funções consideradas, são contínuas, e logo integráveis e consequentemente o valor da integral não depende da escolha da partição e das marcas e dessa forma podemos utilizar uma escolha específica de partição e de marcas.

Exemplo 7.3 Mostre que $\displaystyle\int_a^b x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

Solução Vamos começar subdividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Desta forma os pontos da partição são:

$$x_0 = a \qquad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \qquad x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \qquad \ldots$$

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \qquad \ldots \qquad x_n = b$$

Agora escolheremos c_k como o extremo direito do subintervalo, isto é,

$c_k = x_k$. E logo

$$
\begin{aligned}
\int_a^b x \ \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[a + k\frac{b-a}{n}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right) \\
&= (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[a + k\frac{b-a}{n}\right] \\
&= (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^{n} a + \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} k\right] \\
&= (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[na + \frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= (b-a) \lim_{n\to\infty} \left[a + \frac{b-a}{2}\frac{n(n+1)}{n^2}\right] \\
&= (b-a) \left[a + \frac{b-a}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{n^2}\right] \\
&= (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 7.4 Mostre que $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

Solução Vamos começar subdividindo o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

Desta forma os pontos da partição são:

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = \frac{1}{n}, \qquad x_2 = 2\frac{1}{n}, \qquad \ldots$$

$$x_k = k\frac{1}{n}, \qquad \ldots \qquad x_n = 1$$

Agora escolheremos c_k como o extremo esquerdo do subintervalo, isto é, $c_k = x_{k-1}$. E logo

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2 \; \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[(k-1)\frac{1}{n}\right]^2 \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \left[\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - n(n+1) + n\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\right] \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 7.5 Mostre que $\displaystyle\int_0^a x^3 \; \mathrm{d}x = \frac{a^4}{4}$.

Solução Vamos começar subdividindo o intervalo $[0, a]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{a}{n}$$

Desta forma os pontos da partição são:

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = \frac{a}{n}, \qquad x_2 = \frac{2a}{n}, \qquad \ldots$$

$$x_k = \frac{ka}{n}, \qquad \ldots \qquad x_n = a$$

Agora escolheremos c_k como o extremo direito do subintervalo, isto é, $c_k = x_{k-1}$. E logo

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2 \; \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{ka}{n}\right]^3 \frac{a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a^4}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a^4}{n^4} \left(\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{a^4(n+1)^2}{4n^2} \\
&= \frac{a^4}{4}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 7.6 Mostre que $\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a$.

Solução Vamos começar subdividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de tamanho

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Desta forma os pontos da partição são $x_k = a + k\Delta x$ Agora escolheremos c_k como o extremo direito do subintervalo, isto é, $c_k = x_k$. E logo

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^x \, dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{a+k\Delta x}\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} e^a \Delta x \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{\Delta x^k}
\end{aligned}$$

Usando a fórmula da soma da P.G.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} e^a \Delta x \frac{e^{\Delta x}\left(e^{\Delta x^n} - 1\right)}{e^{\Delta x} - 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^a \Delta x \frac{e^{b-a} - 1}{e^{\Delta x} - 1}
\end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$ temos que $\Delta x \to 0$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^b - e^a}{(e^{\Delta x} - 1)/\Delta x}$$

Como $(e^{\Delta x} - 1)/\Delta x \to 1$ quando $\Delta x \to 0$

$$= e^b - e^a$$

■

7.3 ⋆ Funções Contínuas são Integráveis

As duas somas de Riemann que apresentamos abaixo são de particular interesse pois representam duas possibilidades extremas da soma de Riemann para uma dada partição.

7.1 **Definição 3. :** Soma Superior e Inferior

Definimos a **soma superior e inferior** de uma função contínua f

com relação à partição P, respectivamente, por

$$I(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\min_{x\in I_i}(f(x))\Delta x_i \quad \text{e} \quad S(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\max_{x\in I_i}(f(x))\Delta x_i.$$

Para uma partição P e um conjunto de marcas C, como

$$I(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\min_{x\in I_i}(f(x))\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \le S(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\max_{x\in I_i}(f(x))\Delta x_i.$$

Consequentemente $I(f;P)\le R(f;P;C)\le S(f;P)$.

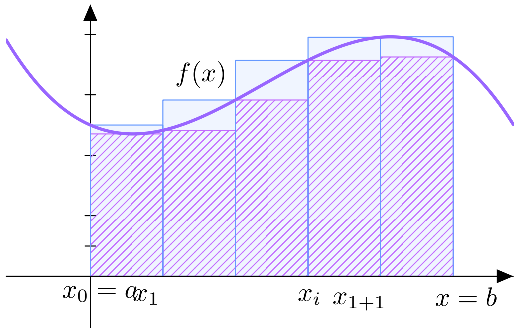


Figura 7.10 $S(f,P)$ e $I(f,P)$ para f contínua e positiva.

7.2 Definição 3. : Integral de Darboux

Considere uma função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Se

$$\lim_{|P|\to 0} S(f,P)=\lim_{|P|\to 0} I(f,P),$$

isto é, se a soma superior convergir para soma inferior quando o tamanho de cada intervalo da partição P vai para zero, dizemos que a integral de Darboux existe.

7.3 Teorema 3.

A integral de Riemann existe se e somente se a integral de Darboux existe.

Demonstração. Dado uma partição P e denotaremos por $R_{f,P}$ a soma de Riemann. Como

$$I(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\min_{x\in I_i}(f(x))\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \le S(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\max_{x\in I_i}(f(x))\Delta x_i.$$

Consequentemente $I_{f,P} \leq R_{f,P} \leq S_{f,P}$. Do fato anterior, temos que se a integral de Darboux existe, então as somas de Darboux superior e inferior correspondente a uma partição suficientemente pequena estará próximo do valor da integral, de modo que qualquer soma de Riemann estará próximo do valor da integral. Por outro lado para que a soma de Riemann exista, a soma deve existir para qualquer escolha de marcas x_i^* e deve ser igual, em particular podemos escolher o x_i^* como o máximo e o mínimo Ou seja fazemos a escolha $1 \leq k \leq n$, existem $u_k, v_k \in [x_{k-1} \mathinner{..} x_k]$ tais que:

$$f(u_k) = \max \{f(x) : x \in [x_{k-1} \mathinner{..} x_k]\}$$

$$f(v_k) = \min \{f(x) : x \in [x_{k-1} \mathinner{..} x_k]\}$$

E desta forma temos que a função é Darboux integrável ■

7.4 **Teorema 3. : Funções Contínuas são Integráveis**

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ então existe a integral de Riemann de f .

Demonstração. É suficiente demonstrar que dado $\epsilon > 0$, existe uma partição P de $[a, b]$ tal que:

$$S(f; P) - I(f; P) < \epsilon$$

onde $S(f; P)$ e $I(f; P)$ denota $S(f; P)$ denota a soma superior e $I(f; P)$ a soma inferior de $f(x)$ em $[a, b]$ em relação a partição P. Primeiramente observamos que uma função contínua no intervalo fechado é uniformemente contínua. Logo existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in [a, b]$ satisfazem $|x - y| < \delta$, então:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b - a}$$

Deixe $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ser uma partição de $[a, b]$ de tamanho menor que δ, isto é, tal que:

$$\max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) < \delta$$

Então para $1 \leq k \leq n$, existem $u_k, v_k \in [x_{k-1} \mathinner{..} x_k]$ tais que:

$$f(u_k) = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1} \mathinner{..} x_k]\}$$

$$f(v_k) = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1} \mathinner{..} x_k]\}$$

Por hipótese, $x_k - x_{k-1} < \delta$, logo $|u_k - v_k| < \delta$. Pela definição de δ temos que:

$$f(u_k) - f(v_k) < \frac{\epsilon}{b - a}$$

Consequentemente:

$$S(f;P)-I(f;P)=\sum_{k=1}^{n} f\left(u_k\right)\left(x_k-x_{k-1}\right)-\sum_{k=1}^{n} f\left(v_k\right)\left(x_k-x_{k-1}\right) \tag{7.1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(u_k\right)-f\left(v_k\right)\right]\left(x_k-x_{k-1}\right) \tag{7.2}$$

$$<\frac{\epsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-x_{k-1}\right) \tag{7.3}$$

$$=\frac{\epsilon}{b-a}\left(x_n-x_0\right) \tag{7.4}$$

$$=\epsilon \tag{7.5}$$

■

7.4 Propriedades da Integral

Antes de continuar faremos a seguinte convenção:

7.1 Definição 4.

Se $a \leq b$ então definimos

$$\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x \triangleq -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Valem as seguintes propriedades

7.2 Proposição 4.

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis. Então a integral é linear, isto é,

- para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, a função λf é integrável e

$$\int_a^b \lambda f(x)\ \mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

- A função $f+g$ é integrável e

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Demonstração.

$$\int_a^b \lambda f(x) \quad \mathrm{d}x = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \lambda f(x_i^*)\Delta x_i \tag{7.6}$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \lambda \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \tag{7.7}$$

$$= \lambda \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \tag{7.8}$$

$$= \lambda \int_a^b f(x) \quad \mathrm{d}x \tag{7.9}$$

$$\int_a^b f(x) + g(x) \quad \mathrm{d}x = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) + g(x_i^*)\right] \Delta x_i \tag{7.10}$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta x_i\right] \tag{7.11}$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i + \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta x_i \tag{7.12}$$

$$= \int_a^b f(x) \quad \mathrm{d}x + \int_a^b g(x) \quad \mathrm{d}x \tag{7.13}$$

■

7.3 **Proposição 4.**

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. A integral é positiva, isto é, se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) \quad \mathrm{d}x \geq 0$. Em particular, se $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b g(x) \quad \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \quad \mathrm{d}x\,.$$

Além disso, se $f(x) = 0$, para todo $x \in [a, b]$, então f será integrável e $\int_a^b f(x) \quad \mathrm{d}x = 0\,.$

Demonstração. Como $f(x_i^*) \geq 0$ então $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \geq 0$

$$\int_a^b f(x) \quad \mathrm{d}x = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \geq 0 \tag{7.14}$$

Para demonstrar a segunda parte note que $f(x) - g(x) \geq 0$. ■

7.4 Proposição 4.

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável e $m, M \in \mathbb{R}$. Se $m \leq f(x) \leq M$ então:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

Demonstração. Pela Proposição 7.4 temos:

$$\int_a^b m\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b M\ \mathrm{d}x$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

■

7.5 Proposição 4.

A integral é aditiva, isto é, se existirem as integrais $\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x$ e $\int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$, com $c \in [a,b]$, então existirá a integral $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ e

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

Isto quer dizer que se f for integrável em todos os subintervalos de um intervalo $[a,b]$, então f será integrável em $[a,b]$. Em particular, quando $c = a$, teremos $\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0$.

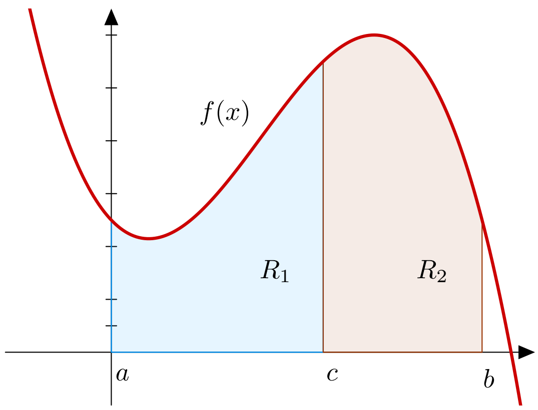


Figura 7.11 $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$

Valor Médio

O valor médio de um números finito de valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ é definido como

$$y_{\mathrm{m}} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

Agora vamos calcular o valor médio de uma função $y = f(x), a \leq x \leq b$. Começamos dividindo o intervalo $[a,\ b]$ em n subintervalos iguais, cada um com comprimento $\Delta x = (b-a)/n$. Em seguida, escolhemos os pontos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ em subintervalos sucessivos e calculamos a média dos números $f(x_1^*), \ldots, f(x_n^*)$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n} &= \frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\frac{b-a}{\Delta x}} \\
&= \frac{1}{b-a}[f(x_1^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x] \\
&= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x
\end{aligned}$$

O valor limite é

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

pela definição de uma integral definida.

> 7.6 **Definição 4. :** Valor Médio de uma função
>
> Suponha f uma função integrável no intervalo $[a,\ b]$. O valor médio de f no intervalo $[a,\ b]$ é definido como
>
> $$f_{\mathrm{m}} \triangleq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exemplo 7. *Calcule o valor médio para* $f(x) = x^2$ *em* $[1, 3]$. ◁

Solução

$$\begin{aligned}
f_{\mathrm{m}} &= \frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) \\
&= \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

■

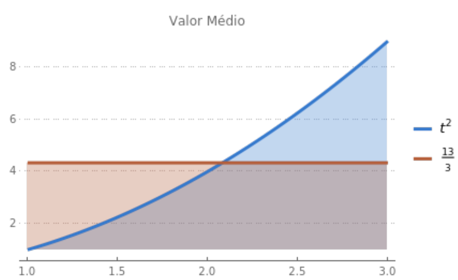


Figura 7.12 Valor Médio da função $f(x) = x^2$.

7.8 **Teorema 4. : Teorema do Valor Médio para Integrais**

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$. Então existe c no intervalo (a,b) tal que : $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = f(c)(b-a)$

Demonstração. Como f é contínua ela é integrável em $[a,b]$. Pelo teorema de Weierstrass, existe $m, M \in [a,b]$ tais que:

$$f(m) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$f(M) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Logo

$$\int_a^b f(m)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(M)\ \mathrm{d}x$$

E assim:

$$f(m)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq f(M)(b-a)$$

Dividindo por $(b-a)$ temos:

$$f(m) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq f(M)$$

Logo pelo teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (a,b)$ tal que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = f(c)$$

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = (c)(b-a)$$

■

Paridade

7.9 **Teorema 4.**

Suponha que f é contínua em $[-a,a]$. Então

- Se f é par então $\int_{-a}^a f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x.$
- Se f é ímpar então $\int_{-a}^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0$

Exemplo 10. *Calcule* $\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2+x^6}\ \mathrm{d}x$ ◁

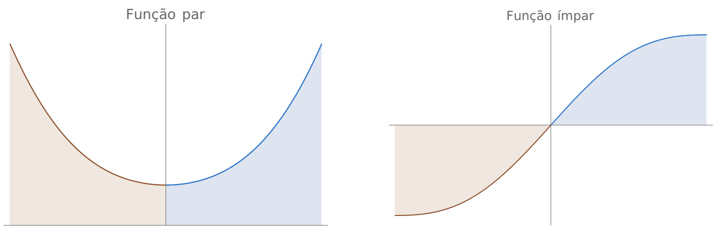


Figura 7.13 Paridade e integração em intervalos simétricos em relação a origem

Solução Como $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{1+x^2+x^6}$ é impar pois

$$f(-x)=\frac{\operatorname{tg} -x}{1+(-x)^2+(-x)^6}=-\frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2+x^6}=-f(x)$$

temos que

$$\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{tg} x}{1+x^2+x^6}\ \mathrm{d}x=0$$

■

7.5 Teorema Fundamental do Cálculo

Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

O Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo estabelece a principal conexão entre cálculo integral e o cálculo diferencial. Considere uma função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ com $f(t)\geq 0$. Então a função

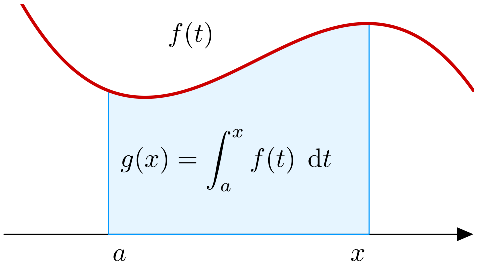
$$g(x)=\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

pode ser interpretada como a área de f de a até x, onde x pode variar de a até b. Vamos calcular $g'(x)$ por definição. Mas antes disso vamos apresentar um cálculo heurístico. Para tanto observamos que, para $h>0$, $g(x+h)-g(x)$ é obtida subtraindo-se as áreas, logo ela é a área sob o gráfico de f de x até $x+h$. Para h pequeno essa área é aproximadamente igual à área do retângulo com altura $f(x)$ e largura h,

$$g(x+h)-g(x)\approx hf(x),\qquad \text{logo}\qquad \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\approx f(x).$$

Assim esperamos que

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f(x).$$



[h!]

Figura 7.14 A função $g(x)$ fornece a área abaixo de $f(x)$ de a até x.

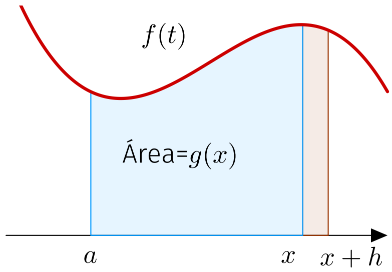


Figura 7.15 Calculando a derivada de $g(x)$ pela definição.

Como veremos esse fato é verdade em geral, como apresentado no seguinte Teorema.

> **7.1 Teorema 5. : Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo**
>
> Seja f uma função contínua em $[a, b]$, então a função g definida por
> $$g(x) \triangleq \int_a^x f(t)\, dt, \qquad a \leq x \leq b$$
> é diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Demonstração. Se x e $x+h$ estão em (a, b), então

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \\ &= \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^{x+h} f(t)\, dt, \end{aligned}$$

logo para $h \neq 0$,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

Suponhamos que $h > 0$. Como f é contínua em $[x, x+h]$, pelo Teorema de Weierstrass 5.1.3 existem x_1 e x_2 em $[x, x+h]$ tais que $f(x_1) \leq f(t) \leq$

$f(x_2)$ para todo $t \in [x, x+h]$. Logo,

$$f(x_1)h \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(x_2)h.$$

Como $h > 0$, podemos dividir por h, obtendo

$$f(x_1) \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq f(x_2),$$

ou equivalentemente,

$$f(x_1) \leq \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq f(x_2).$$

A desigualdade anterior pode ser demonstrada de forma similar para $h < 0$. Agora, quando $h \to 0$, $x_1 \to x$ e $x_2 \to x$. Consequentemente,

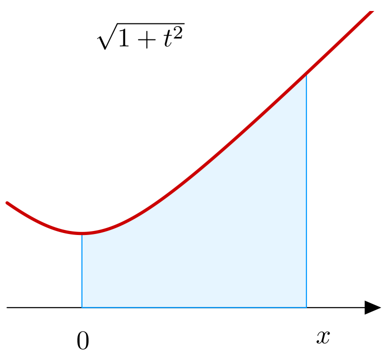
$$\lim_{h\to 0} f(x_1) = \lim_{x_1\to x} f(x_1) = f(x), \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} f(x_2) = \lim_{x_2\to x} f(x_2) = f(x),$$

pois f é contínua, e assim pelo Teorema do Confronto 1.5,

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x),$$

e o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo fica demonstrado. ■

Exemplo 7.2 Ache a derivada da função $g(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$.



Solução Como $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ é contínua, pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo $g'(x) = \sqrt{1+x^2}$. ■

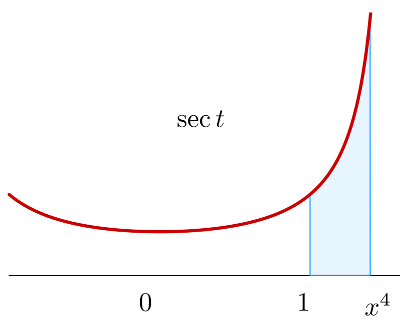
Exemplo 7.3 Calcule a derivada de $g(x) = \displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\,dt$.

Solução

Utilizamos o Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia. Seja $u = x^4$, então

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\,dt \overset{RC}{=} \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\,dt\frac{du}{dx} = \sec u\frac{du}{dx} = \sec(x^4)4x^3.$$

■



7.5.1 Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

Computar integrais a partir da definição como um limite de somas de Riemann pode ser um procedimento longo e difícil. O Segundo Teorema Fundamental do Cálculo nos fornece um método muito mais simples para o cálculo de integrais.

7.4 **Teorema 5. : Segundo Teorema Fundamental do Cálculo**

Suponha que f é contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f.

Demonstração. Seja $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$. Pelo Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo, $g'(x) = f(x)$, ou seja, g é uma antiderivada de f. Pelo Corolário 5.2.2, duas antiderivadas só podem diferir por uma constante portanto, $F(x) - g(x) = k$, onde k é uma constante. Fazendo $x = a$, a fórmula implica que $F(a) = k$ e fazendo $x = b$, temos $F(b) - g(b) = k = F(a)$. Daí,

$$F(b) - F(a) = g(b) = \int_a^b f(t)\, dt,$$

e a demonstração está completa. ■

Notação 5. *Utilizaremos a notação*

$$F(x)\Big|_a^b \triangleq F(b) - F(a).$$

Desse modo o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo pode ser reescrito

$$\int_a^b F'(x) \ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Exemplo 7.6 Calcule a integral de $f(x) = x^2$ no intervalo $[1, 2]$.

$$\int_1^2 x^2 \ \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Exemplo 7.7 Calcule $\displaystyle\int_{-1}^0 (x^3 + 3x - 1) \ \mathrm{d}x$.

$$\int_{-1}^0 (x^3 + 3x - 1) \ \mathrm{d}x = \int_{-1}^0 x^3 \ \mathrm{d}x + \int_{-1}^0 3x \ \mathrm{d}x - \int_{-1}^0 1 \ \mathrm{d}x \tag{7.15}$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^0 + \frac{3x^2}{2}\Big|_{-1}^0 - x\Big|_{-1}^0 = -\frac{11}{4}. \tag{7.16}$$

Exercícios

Ex. 7.1 — Use o Teorema Fundamental do Cálculo para achar a derivada das seguintes funções:

1. $\int_0^x \sqrt{1+2t}dt$
2. $\int_1^x \ln(t)dt$
3. $\int_x^2 \cos(t^2)dt$
4. $\int_1^{\cos(x)} (t+\cos(t)dt$
5. $\int_1^{e^x} (t+\cos(t))dt$
6. $\int_{e^{x2}}^0 \cos^2(t)dt$
7. $\int_{-e^{x2}}^{e^x} \cos^2(t)dt$
8. $\int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}\cos(t)dt$

Ex. 7.2 — Use o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular as seguintes integrais ou explique porque elas não existem:

1. $\int_0^1 x^7 + 3x \;\mathrm{d}x$
2. $\int_{-1}^4 x^6 \;\mathrm{d}x$
3. $\int_{-2}^5 \pi \;\mathrm{d}x$
4. $\int_{-1}^4 x^2 + 3x \;\mathrm{d}x$
5. $\int_0^1 x^{3/2} \;\mathrm{d}x$
6. $\int_1^8 \sqrt[3]{x} \;\mathrm{d}x$
7. $\int_1^4 x^{6/7} \;\mathrm{d}x$
8. $\int_{-5}^5 \frac{2}{x^3} \;\mathrm{d}x$
9. $\int_0^2 x(2+x^5) \;\mathrm{d}x$
10. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \;\mathrm{d}x$
11. $\int_0^{\pi/4} \sec^2(x) \;\mathrm{d}x$
12. $\int_\pi^{2\pi} \csc^2(\theta)d\theta$
13. $\int_0^1 e^{v+1} \;\mathrm{d}v$
14. $\int_0^1 5^t dt$
15. $\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt$

7.5.2 Integração por Substituição na Integral Definida

Existem dois métodos para calcular uma integral definida por substituição. Um deles consiste em calcular primeiro a integral indefinida e então usar o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo. Por exemplo,

$$\int_0^2 2x\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}(5)^{3/2} - \frac{2}{3}(1)^{3/2} = \frac{2}{3}((5)^{3/2} - 1).$$

Um outro modo consiste em se mudar os limites de integração ao se mudar a variável. **Regra da Substituição para Integrais Definidas.** Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na variação de $u = g(x)$, então

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ \mathrm{d}u.$$

Demonstração. Seja F uma antiderivada de f. Então, $F(g(x))$ é uma antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, logo, pelo Segundo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 7.5.1), temos

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ \mathrm{d}x = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Por outro lado, aplicando uma segunda vez o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo também temos

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ \mathrm{d}u = F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)).$$

■

Exemplo 7.8 Determine: $\boxed{a}$ $\displaystyle\int_{-1}^{3} e^{-2x}\ \mathrm{d}x$; $\boxed{b}$ $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} xe^{3x^2}\ \mathrm{d}x$.

Solução $\boxed{a}$ Tome $u = -2x$. Então, $du = -2\ \mathrm{d}x$. Logo, $dx = -du/2$. Quando $x = -1$, $u = 2$; quando $x = 3$, $u = -6$. Logo, trocando integrando, dx e limites de integração, $\displaystyle\int_{-1}^{3} e^{-2x}\ \mathrm{d}x = \int_2^{-6} e^u(-1/2)\ \mathrm{d}u = -\frac{e^u}{2}\Big|_2^{-6} = -\frac{e^{-6}}{2} - (-\frac{e^2}{2}) = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-6})$. Outro modo é primeiro encontrar a antiderivada: $\displaystyle\int e^{-2x}\ \mathrm{d}x = \int e^u(-1/2)\ \mathrm{d}u = -\frac{e^u}{2} = -\frac{e^{-2x}}{2}$. Agora basta calcular $\displaystyle\int_{-1}^{3} e^{-2x}\ \mathrm{d}x = -\frac{e^{-2x}}{2}\Big|_{-1}^{3} = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-6})$. $\boxed{b}$ Tome $u = 3x^2$. Então $du = 6x\ \mathrm{d}x$. Logo, $x\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u/6$. Quando $x = 0$, $u = 0$; quando $x = \sqrt{2}$, $u = 6$. Logo, trocando integrando, dx e limites de integração, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} xe^{3x^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^6 e^u\ \mathrm{d}u/6 = \frac{e^u}{6}\Big|_0^6 = \frac{e^6}{6} - \frac{1}{6}$. Outro modo é primeiro encontrar a antiderivada: $\displaystyle\int xe^{3x^2}\ \mathrm{d}x = \int e^u\ \mathrm{d}u/6 = \frac{e^u}{6} = \frac{e^{3x^2}}{6}$.

Agora basta calcular $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} xe^{3x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{e^{3x^2}}{6}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{e^6}{6} - \frac{1}{6}$. ■

Exemplo 7.9 Calcule $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \sqrt{2x-1}\ \mathrm{d}x$. Fazendo $u = 2x - 1$, temos

$\mathrm{d}u = 2\ \mathrm{d}x$ ou $\frac{1}{2}\ \mathrm{d}u = \ \mathrm{d}x$ Quando $x = \frac{1}{2}$, $u = 0$; quando $x = 1$, $u = 1$.
Assim,

$$\int_{1/2}^{1} \sqrt{2x-1}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{u}\frac{1}{2}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Exercícios

Ex. 7.3 — Calcule as integrais fazendo as seguintes substituições:

1. $\int_0^{\pi} \cos(3x)dx \quad u = 3x$
2. $\int_0^{1} x(4+x^2)^{10}dx \quad u = 4+x^2$
3. $\int_0^{2} x^2\sqrt{x^3+1}dx \quad u = x^3+1$
4. $\int_0^{\pi^2/4} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx \quad u = \sqrt{x}$
5. $\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen}\theta}\cos(\theta)d\theta \quad u = \operatorname{sen}(\theta)$
6. $\int_1^{3} \frac{1}{x-5}\ \mathrm{d}x$
7. $\int_2^{6} x\sqrt{x-2}\ \mathrm{d}x$
8. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\cos x\ \ \mathrm{d}x$
9. $\int_0^{1} 2x(1-x^2)^4\ \ \mathrm{d}x$
10. $\int_{-2}^{-1} (x+1)e^{x^2+2x+1}\ \ \mathrm{d}x$
11. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\ \ \mathrm{d}x$
12. $\int_2^{4} \frac{1}{x^2-6x+10}\ \ \mathrm{d}x$
13. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ \ \mathrm{d}x$

7.5.3 Integração por Partes na Integral Definida

Combinando a fórmula de integração por partes com o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos avaliar integrais definidas por partes.

7.10 Proposição 5. : integração por partes

Sejam f e g funções deriváveis em $[a, b]$ com f' e g' integráveis.

Então

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Demonstração. Seja $h(x) = f(x)g(x)$. Pela regra da derivada do produto, $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Assim, integrando os dois lados de $x = a$ até $x = b$ e utilizando o TFC temos que:

$$\int_a^b h'(x)\ \mathrm{d}x = h(b) - h(a) \tag{7.17}$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) \tag{7.18}$$

$$= \int_a^b f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x. \tag{7.19}$$

Rearrumando os termos obtemos o resultado. ■

Exemplo 7.11 Determine: (a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x\, x\ \mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\ \mathrm{d}x$.

Solução (a) Tome $u = x$ e $\mathrm{d}v = e^x\ \mathrm{d}x$. Assim, $du = dx$ e $v = e^x$. Logo, $\displaystyle\int xe^x\ \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\ \mathrm{d}x = xe^x - e^x$. Agora utilizamos os limites de integração: $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^x\, x\ \mathrm{d}x = xe^x - e^x|_0^{\ln 2} = 2\ln(2) - 1$. Caso tivesse tomado $u = e^x$ e $\mathrm{d}v = x\ \mathrm{d}x$, teríamos $du = e^x\ \mathrm{d}x$ e $v = x^2/2$. Assim, $\displaystyle\int e^x\, x\ \mathrm{d}x = \frac{x^2e^x}{2} - \int \frac{x^2}{2}e^x\ \mathrm{d}x$, uma integral ainda mais complicada! Reflita sobre isso... (b) Tome $u = x$ e $\mathrm{d}v = \cos x\ \mathrm{d}x$. Assim $du = dx$ e $v = \operatorname{sen} x$. Logo, $\displaystyle\int x\cos x\ \mathrm{d}x = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x = x\operatorname{sen} x + \cos x$. E assim $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\ \mathrm{d}x = (x\operatorname{sen} x + \cos x)|_0^{\pi}$ ■

Exemplo 7.12 Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\ \mathrm{d}x$. Fazendo $u = \ln x$, temos $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\ \mathrm{d}x$. Quando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; quando $x = e$, $u = \ln e = 1$. Assim,

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 u\ \mathrm{d}u = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Exercícios

Ex. 7.4 — 1. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{-x}\ \mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2 \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3 \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\ln 2}} xe^{x^2} \ \mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^3 e^x \ \mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int_{1}^{2} xe^{-2x} \ \mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^x \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2x} \cos x \ \mathrm{d}x$

Ex. 7.5 — Calcule as seguintes integrais:

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(5x) \ \mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int re^{r/3} dr$

3. $\displaystyle\int x^2 \cos(mx) \ \mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int \ln(2x+1) \ \mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int t^3 e^t dt$

6. $\displaystyle\int (\ln(x))^2 \ \mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int z \operatorname{senh}(z) dz$

8. $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)e^{-x} \ \mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{t}\ln(t) dt$

10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2} \ \mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int_0^1 x2^x \ \mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int \cos(\ln(x)) \ \mathrm{d}x$

7.6 Deslocamento e Espaço Percorrido

Consideremos uma partícula que se desloca sobre o eixo x com equação de posição $x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a, b]$. Sabemos que $\frac{dx}{dt}(t) = v(t)$, ou seja, $x(t)$ é uma antiderivada de $v(t)$. Portanto, pelo Segundo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 7.5.1), temos

$$\int_a^b v(t) \ \mathrm{d}t = x(b) - x(a) \tag{7.20}$$

que é o **deslocamento** da partícula entre os instantes a e b. Para calcular a distância percorrida devemos ignorar o sinal da velocidade. Portanto, definimos por

$$\int_a^b |v(t)| \ \mathrm{d}t \tag{7.21}$$

o **distância percorrida** pela partícula entre os instantes a e b. Quando $v(t) \geq 0$, para todo $t \in [a, b]$, então (7.20) e (7.21) implicam que a distância percorrida pela partícula e o seu deslocamento coincidem entre os instantes a e b e são iguais à

$$\int_a^b v(t)\ \mathrm{d}t$$

Exemplo 7.1 Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2 - t$.

a Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$.

b Calcule o espaço percorrido entre os instantes 1 e 3.

$$\text{Deslocamento } = \int_1^3 (2-t)\ \mathrm{d}t = \left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^3 = 0.$$

$$\text{Espaço percorrido } = \int_1^3 |2-t|\ \mathrm{d}t = \int_1^2 (2-t)\ \mathrm{d}t - \int_2^3 (2-t)\ \mathrm{d}t = 1.$$

Interpretação: em $[1, 2)$ a velocidade é positiva, o que significa que neste intervalo a partícula avança no sentido positivo; em $(2, 3]$ a velocidade é negativa, o que significa que neste intervalo a partícula recua, de tal modo que em $t = 3$ ela volta a ocupar a mesma posição por ela ocupava no instante $t = 1$.

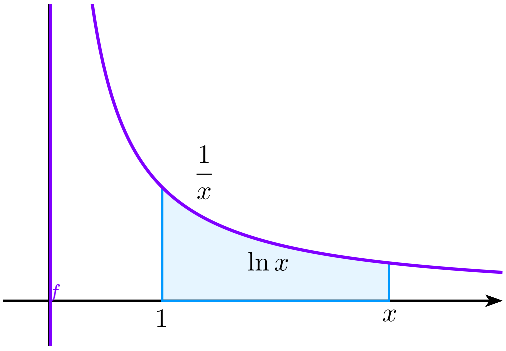
7.7 ⋆ A Função Logaritmo e Exponencial Revisitadas

Nesta seção vamos apresentar a definição da função logarítmica como uma integral e a definição da função exponencial como sua inversa. A função $f(t) = 1/t$ é contínua em $(0, \infty)$. Pelo teorema fundamental do cálculo, f tem uma antiderivada em no intervalo com pontos finais 1 e x sempre que $x > 0$. Esta observação permite-nos fazer a seguinte definição.

7.1 Definição 7.

A função **logaritmo natural** é uma função definida por

$$\ln x \triangleq \int_1^x \frac{1}{t}\, dt, \qquad x > 0.$$



[h]

Figura 7.16 Definição do logaritmo como integral.

7.2 **Proposição 7. : Propriedades do Logaritmo.**

A função logaritmo é contínua e diferenciável em todo seu domínio e satisfaz:

- a $\ln 1 = 0$,
- b $\ln' x = \dfrac{1}{x}$ para todo $x > 0$,
- c $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, para todo $a, b > 0$,
- d $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, para todo $a, b > 0$,
- e $\ln(a^r) = r \ln a$ para todo $a > 0$ e r racional.

Demonstração. O item (a) segue diretamente da definição pois

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = 0.$$

A diferenciabilidade de $\ln x$, bem como o item (b) são consequências do Teorema Fundamental do Cálculo I 7.5:

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

A continuidade da função logaritmo é consequência de sua diferenciabilidade. Para demonstrar o item (c), seja $f(x) = \ln(ax)$, onde a é uma constante positiva. Pela Regra da Cadeia, temos

$$f'(x) = \frac{1}{ax} a = \frac{1}{x}.$$

Portanto, $f(x)$ e $\ln x$ tem a mesma derivada, então pelo Corolário 5.2.2, diferem por uma constante:

$$\ln(ax) = \ln x + C.$$

Fazendo $x = 1$, temos que $\ln a = C$. Assim,

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a,$$

e substituindo $x = b$, temos a propriedade (c). O item (c) também pode ser demonstrado do seguinte modo

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int_1^{x} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \ln(x) + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Agora fazemos a substituição $u = t/x$ e assim temos

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int_1^{y} \frac{1}{xu} x\, du = \int_1^{y} \frac{1}{u}\, du = \ln(y).$$

Para demonstrar o (d) utilizaremos o item (c) com $a = 1/b$, temos que

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln b = \ln 1 = 0, \quad \text{portanto} \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b.$$

Agora,

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a\frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

Finalmente o item (e) é demonstrado de maneira análoga e será deixado como exercício. ■

7.7.1 Gráfico do logaritmo.

7.3 Proposição 7.

A função $\ln x$ é crescente e seu gráfico é côncavo para baixo em todos os pontos..

Demonstração. Como a derivada de $\ln x$ é sempre positiva, o logaritmo é crescente e como a derivada segunda é sempre negativa, $\ln''(x) = -1/x^2$, o logaritmo é côncavo para abaixo em $(0, +\infty)$. ■

Observe que em particular esta Proposição implica que $\ln x$ é injetiva.

7.4 Proposição 7.

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

Demonstração. Observe que $\ln 2 > 0$ e para $n \in \mathbb{N}$, $\ln 2^n = n \ln 2$. Como $\ln x$ é crescente, quando $x > 2^n$, $\ln(x) > n\ln 2$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln 2 = \infty$, então $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$. ■

7.5 Proposição 7.

$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Demonstração. Se $0 < x < 1$, então $(1/x) > 1$ e $\lim_{x\to 0^+}(1/x) = \infty$. Seja $y = 1/x$; então $\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{y\to\infty} \ln(1/y) = \lim_{y\to\infty} \ln(1) - \ln(y) = \lim_{y\to\infty} - \ln(y) = -\infty$. ∎

Logo, o domínio de $\ln$ é $(0, \infty)$ e a imagem é $\mathbb{R}$; $\ln(x)$ como mostra a Figura 7.17. Como $\ln 1 = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ e $\ln x$ é uma função contínua

[h]

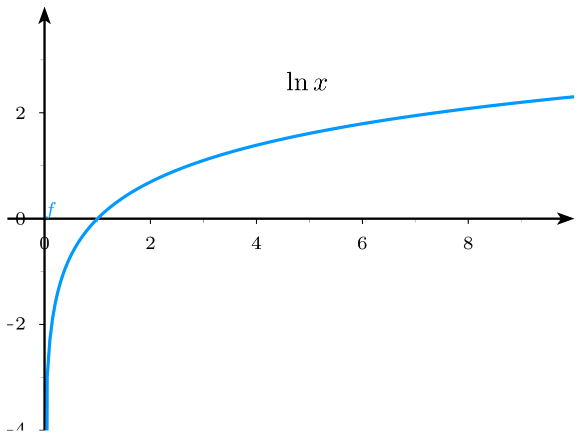


Figura 7.17 Gráfico do logaritmo natural.

crescente, pelo Teorema do Valor Intermediário **??**, existe um número onde $\ln x$ assume o valor 1. Esse número é denotado por e.

7.6 Definição 7.

Denotamos por e o número tal que $\ln e = 1$.

Esta definição é consistente com a definição do número e como um limite. Para isso demonstraremos que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Seja $f(x) = \ln x$. Então $f'(1) = 1$ e pela definição de derivada

$$f'(1) = \lim_{x\to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \tag{7.22}$$

$$= \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} \tag{7.23}$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right), \tag{7.24}$$

pois a função $\ln$ é contínua. Assim,

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right) = 1$$

e portanto

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Função Exponencial Agora vamos apresentar uma nova definição da função exponencial. Começamos lembrando que já mostramos que a função $\ln x$ é injetiva e, portanto, tem uma inversa.

7.7 **Definição 7.**

A função inversa de $\ln(x)$ é denominada de **função exponencial natural** e denotada por $y = \exp(x)$.

O domínio da função $\exp(x)$ é os números reais e sua imagem é $(0, \infty)$. Observe que como$\exp(x)$ é a inversa de $\ln(x)$, $\exp(\ln x) = x$ para $x > 0$, e $\ln(\exp x) = x$ para todo x. Além disso, como consequência das propriedades do $\ln(x)$ temos que $\exp(1) = e$, $\exp(0) = 1$, $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$, e $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$.

7.8 **Proposição 7.**

A função exponencial é diferenciável em todos os pontos do domínio e

$$\frac{d}{dx}\exp(x) = \exp(x).$$

Demonstração. Pelo Teorema da Função Inversa, $\exp(x)$ possui derivada em todos os pontos. O teorema também nos diz qual é derivada. Alternativamente, podemos calcular a derivada usando diferenciação implícita: Deixe $y = \exp x$, então $\ln y = x$. diferenciando em relação a x chegarmos $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$. Assim, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y = \exp x$. ■

Como $\exp x > 0$, $\exp x$ é uma função crescente cujo gráfico é concavo para cima.

Capítulo 8

Técnicas de Integração

> *A melhor maneira de explicar é fazer*
>
> — Alice no País das Maravilhas, Lewis Carrol

Uma das consequências do Teorema Fundamental do Cálculo, é que podemos calcular efetivamente uma integral de uma função se conhecermos uma primitiva, isto é, uma integral indefinida. Neste capítulo desenvolveremos um conjunto de técnicas para calcular integrais indefinidas e definidas. Os métodos que apresentaremos são para classes particulares de funções, tais como funções racionais (método das frações parciais), trigonométricas e envolvendo raízes quadradas (substituição trigonométrica). Finalmente na última seção apresentaremos algumas estratégias para o cálculo de integrais.

Neste capítulo:

8.1 Frações Parciais

Nesta seção mostraremos como integrar uma função racional, i.e., quociente de polinômios, expressando-a como soma de *frações parciais*. Para esse fim considere a função racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são polinômios. Primeiramente observamos que se o grau de P for maior ou igual ao grau de Q, então podemos simplificar a expressão realizando a divisão de polinômios,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

onde $S(x)$ e $R(x)$ são também polinômios. Quando o grau de P for menor que o grau de Q dizemos que $P(x)/Q(x)$ é uma **função racional própria**. Essa será a primeira etapa da técnica de integração de funções racionais: realizar a divisão de polinômios de modo a obter uma função racional própria.

Exemplo 8.1 Calcule $\int \frac{x^3+2x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x$. Fazendo a divisão polinomial

$$
\begin{array}{rl}
\big(\;x^3 \qquad\quad + 2x + 1\big) \div \big(x-1\big) = x^2 + x + 3 + \dfrac{4}{x-1} \\
\underline{-x^3 + x^2} \qquad\qquad\qquad & \\
x^2 + 2x \qquad\qquad & \\
\underline{-x^2 \;\; + x} \qquad\qquad & \\
3x + 1 \qquad & \\
\underline{-3x + 3} \qquad & \\
4 \qquad &
\end{array}
$$

obtemos

$$\int \frac{x^3+2x+1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2+x+3+\frac{4}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x+4\ln|x-1|+C.$$

A segunda etapa da técnica de integração de funções racionais consiste em fatorar o denominador $Q(x)$ o máximo possível. Pode ser mostrado que qualquer polinômio $Q(x)$ pode ser fatorado como produto de fatores lineares e de fatores quadráticos irredutíveis. Um fator quadrático é dito **irredutível** se não tiver raizes, ou seja, se $\Delta < 0$. Ou seja, qualquer polinômio $Q(x)$ pode ser fatorado como produto de termos da forma:

$$(ax+b)^m \qquad (cx^2+dx+e)^n$$

O seguinte quadro estabelece como decompor uma função racional como uma soma de funções racionais cujos denominadores são todos de grau inferior ao grau de $Q(x)$.

Decomposição em Frações Parciais

Seja $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ uma função racional, na qual o grau de P é menor que o grau de Q.. Para obtermos a decomposição em frações parciais repetimos os passos abaixo para cada fator linear e para cada fator quadrático irredutível de $Q(x)$

1. **Termos Lineares:** Se $(x-a)$ divide $Q(x)$, seja $(x-a)^n$ a maior potência de $(x-a)$ que divide $Q(x)$. Então a decomposição de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ conterá a soma de termos

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

2. **Termos Quadráticos** Se x^2+bx+c divide $Q(x)$, seja $(x^2+bx+c)^n$ a maior potência de x^2+bx+c que divides $Q(x)$. Então a decomposição de $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ conterá a soma de termos

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}.$$

De posse dos termos que aparecem na decomposição em frações parciais, para determinar os coeficientes A_i, B_i e C_i:

1. Multiplique as frações por $Q(x)$, simplifique o denominador. Agrupe os termos de mesmo grau.
2. Iguale os coeficientes resultantes dos potências de x e resolva o sistema de equações lineares resultante.
3. O truque de Heaviside apresentado abaixo pode ajudar a simplificar o sistema.

Explicamos os detalhes dessa expansão através dos diferentes casos que podem ocorrer.

8.1.1 Fatores Lineares

8.2 Teorema 1.

Para cada fator da forma $(ax+b)^m$, a decomposição em frações parciais contém a seguinte soma de m frações parciais

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots\frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

> onde $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são constantes a serem determinadas.

Exemplo 8.3 [Decompondo em Frações Parciais] Encontre a Decomposição em Frações Parciais de $\dfrac{1}{x^2-1}$.

Solução O denominador fatora em produto de termos lineares $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Logo temos a seguinte expansão

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Para determinar as constantes A e B, multiplique ambos os lados por $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{A(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{B(x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= A(x+1) + B(x-1) \\ &= Ax + A + Bx - B \end{aligned}$$

Agrupe os termos de mesmo grau

$$= (A+B)x + (A-B).$$

Temos a igualdade

$$1 = (A+B)x + (A-B).$$

Por uma questão de clareza, reescrever o lado esquerdo como

$$0x + 1 = (A+B)x + (A-B).$$

No lado esquerdo, o coeficiente do termo x é 0; à direita, é $(A+B)$. Uma vez que ambos os lados são iguais, temos que $0 = A + B$. De modo análogo, no lado esquerdo o termo constante é 1; no lado direito o termo constante é $(A-B)$. Logo temos $1 = A - B$. Temos um sistema linear com 2 equações e duas variáveis. Resolvendo temos

$$\begin{array}{c} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} A=1/2 \\ B=-1/2 \end{array}.$$

Logo

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}.$$

■

Exemplo 8.4 [Integrando usando Frações Parciais] Utilize a decomposição em frações parciais para integrar $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$.

Solução Observe que $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. O método de frações parciais fornece a decomposição

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

e portanto $A(x-2)+B(x-1)=x+3$ ou $(A+B)x-2A-B=x+3$. Como os polinômios são idênticos, seus coeficientes devem ser iguais. Logo, $A+B=1$ e $-2A-B=3$. Resolvendo, obtemos $A=-4$ e $B=5$ e assim

$$\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-4}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right)\mathrm{d}x = -4\ln|x-1|+5\ln|x-2|+k.$$

■

Observação 5 - Método de Heaviside. *O método de Heaviside pode facilitar a descoberta dos fatores da decomposição. O método de Heaviside é um método para facilitar a resolução da igualdade de dois polinômios. Como a igualdade de polinômios deve ser satisfeita para todos os valores de x, tomaremos alguns valores particulares para os quais a igualdade se simplifica, em especial, tomaremos as raízes dos termos lineares.*

Ilustraremos a utilização do método no exemplo no qual devemos determinar A, B na expansão

$$\frac{3x+1}{(x+3)(x+1)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+1}.$$

Para isso multiplique os dois lados por $(x+3)(x+1)$:

$$3x+1 = A(x+1)+B(x+3).$$

Como a equação anterior deve ser satisfeita para todos os valores de x, tomaremos alguns valores particulares para os quais a igualdade se simplifica, em especial, tomaremos as raízes dos termos lineares. Para o sistema anterior. Tome $x=-1$ para obter $\quad -2=2B \quad$ e portanto $B=-1$.
Tome $x=-3$ para obter $\quad -8=(-2)A \quad$ e portanto $A=4$.

Exemplo 8.6 [Integrando usando Frações Parciais] Utilize a decomposição em frações parciais para integrar $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-5)(x+3)}\,\mathrm{d}x$.

Solução A estratégia de integração por frações parciais 8.1 pressupõe que o grau do numerador é menor que o denominador. Uma vez que este não é o caso, começamos usando divisão polinomial para reduzir o grau do numerador.

$$\begin{array}{l}
\left(\quad x^3\right) \div \left(x^2-2x-15\right) = x+2+\dfrac{19x+30}{x^2-2x-15} \\
\underline{-x^3+2x^2+15x} \\
\qquad\quad 2x^2+15x \\
\qquad \underline{-2x^2\ \ +4x+30} \\
\qquad\qquad\quad 19x+30
\end{array}$$

Assim
$$\frac{x^3}{(x-5)(x+3)} = x+2+\frac{19x+30}{(x-5)(x+3)}.$$
Usando frações parciais, fazemos a expansão
$$\frac{19x+30}{(x-5)(x+3)} = \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+3}$$
para valores apropriados A e B. Logo
$$\begin{aligned} 19x+30 &= A(x+3)+B(x-5) \\ &= (A+B)x+(3A-5B). \end{aligned}$$
que implica que
$$\begin{aligned} 19 &= A+B \\ 30 &= 3A-5B. \end{aligned}$$
resolvendo o sistema linear
$$\begin{aligned} 125/8 &= A \\ 27/8 &= B. \end{aligned}$$
Integrando
$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-5)(x+3)}\, \mathrm{d}x &= \int \left(x+2+\frac{125/8}{x-5}+\frac{27/8}{x+3}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2}+2x+\frac{125}{8}\ln|x-5|+\frac{27}{8}\ln|x+3|+C. \end{aligned}$$
■

Exemplo 8.7 [Integrando usando Frações Parciais] Utilize a decomposição em frações parciais para integrar $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1}\, \mathrm{d}x$.

Solução Primeiramente observamos que 1 é raiz de x^3-x^2-x+1, logo $(x-1)$ é um fator. Fazendo a divisão de polinômios obtemos $x^3-x^2-x+1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)$. Consequentemente a decomposição em frações parciais é
$$\frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$
Expandindo temos que $2x+1 = A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)$. Utilizaremos o método de Heaviside. Fazendo $x=1$ obtemos $3=2C$ ou seja $C=\frac{3}{2}$. Fazendo $x=-1$, obtemos $-1=4A$ ou seja $A=-\frac{1}{4}$. Finalmente fazendo $x=0$, obtemos $1=-\frac{1}{4}-B+\frac{3}{2}$ e assim $B=\frac{1}{4}$. Consequentemente
$$\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\, \mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\, \mathrm{d}x+\frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\, \mathrm{d}x \tag{8.1}$$
$$= -\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}+C. \tag{8.2}$$

■

8.1.2 Fatores quadráticos

Queremos calcular integrais do tipo

$$\int \frac{P(x)}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x\,,$$

onde P é um polinômio e $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Então devemos reescrever o denominador como soma de quadrados. Em seguida, fazemos uma mudança de variável e calculamos a integral. Antes de apresentar o método de frações parciais, para esse caso. Mostraremos como é possível integrar os termos obtidos.

Exemplo 8.8 Calcule $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x.$

Solução Escrevamos o denominador como soma de quadrados $x^2+2x+2 = x^2+2x+1+1 = (x+1)^2+1$. Fazendo a substituição $u = x+1$, temos $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$;

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x && (8.3)\\
&= \int \frac{2(u-1)+1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u && (8.4)\\
&= \int \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u + \int \frac{-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u && (8.5)\\
&= \ln(1+u^2) - \operatorname{arctg} u + C && (8.6)\\
&= \ln(1+(x+1)^2) - \operatorname{arctg}(x+1) + C. && (8.7)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 8.9 Calcule $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\,\mathrm{d}x.$

Solução Como o grau do denominador é igual ao grau do denominador, primeiro vamos dividir os polinômios,

$$\frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} = 1 + \frac{x-1}{4x^2-4x+3} = 1 + \frac{x-1}{(2x-1)^2+2}.$$

Fazendo $u = 2x - 1$ ou $x = \dfrac{u+1}{2}$, temos $du = 2\ \mathrm{d}x$, assim

$$\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\ \mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{x-1}{(2x-1)^2 + 2}\right)\ \mathrm{d}x \tag{8.8}$$

$$= x + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{u+1}{2} - 1}{u^2 + 2}\ \mathrm{d}u \tag{8.9}$$

$$= x + \frac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}\ \mathrm{d}u \tag{8.10}$$

$$= x + \frac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+2}\ \mathrm{d}u - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}\ \mathrm{d}u \tag{8.11}$$

$$= x + \frac{1}{8}\ln|u^2+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C \tag{8.12}$$

$$= x + \frac{1}{8}\ln|(2x-1)^2+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{(2x-1)}{\sqrt{2}}\right) + C. \tag{8.13}$$

■

8.10 **Teorema 1.**

Para cada fator da forma $(ax^2 + bx + c)^n$, a decomposição em frações parciais contém a seguinte soma de n frações parciais

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são constantes a serem determinadas.

Exemplo 8.11 [Decompondo em Frações Parciais]

Decomponha $f(x) = \dfrac{1}{(x+5)(x-2)^3(x^2+x+2)(x^2+x+7)^2}$ em frações parciais, mas não determine os coeficientes resultantes.

Solução O denominador já se encontra fatorado, já que x^2+x+2 e x^2+x+7 são irredutíveis. Como $(x+5)$ é um termo linear que divide o denominador, teremos o termo

$$\frac{A}{x+5}$$

na decomposição. Como $(x-2)^3$ divide o denominador, teremos os seguintes termos na decomposição :

$$\frac{B}{x-2}, \quad \frac{C}{(x-2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{D}{(x-2)^3}.$$

O x^2+x+2 termo no denominador fornece o termo $\dfrac{Ex+F}{x^2+x+2}$. Finalmente, o termo $(x^2+x+7)^2$ gera os seguintes termos na decomposição

$$\frac{Gx+H}{x^2+x+7} \quad \text{e} \quad \frac{Ix+J}{(x^2+x+7)^2}.$$

Juntando tudo temos:

$$\frac{1}{(x+5)(x-2)^3(x^2+x+2)(x^2+x+7)^2} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+x+2} + \frac{Gx+H}{x^2+x+7} + \frac{Ix+J}{(x^2+x+7)^2}$$

Determinar os coeficientes $A, B, \ldots, J$ seria um processo tedioso. ■

Exemplo 8.12 [Integrando usando Frações Parciais] Utilize a decomposição em frações parciais para integrar $\displaystyle\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx$.

Solução Como o grau do numerado é maior que o grau do denominador, começamos fazendo a divisão polinomial:

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^5 \qquad\quad + x + 1\right) \div \left(x^3 - 8\right) = x^2 + \dfrac{8x^2+x+1}{x^3-8} \\ \underline{\;-x^5 + 8x^2\;} \\ \qquad\qquad 8x^2 + x + 1 \end{array}$$

Como $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$.

$$\frac{x^5+x+1}{x^3-8} = x^2 + \frac{8x^2+x+1}{x^3-8} = x^2 + \frac{8x^2+x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)}.$$

Pelo método de frações parciais,

$$\frac{8x^2+x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Então, $8x^2+x+1 = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$. Fazendo $x = 2$ obtemos $35 = 12A$ ou $A = \dfrac{35}{12}$. Fazendo $x = 0$, obtemos $1 = 4A - 2C$ ou $C = \dfrac{16}{3}$. Fazendo $x = 1$, obtemos $10 = 7A - B - C$ ou $B = \dfrac{61}{12}$.
Assim,

$$\int \frac{8x^2+x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)}\,dx = \frac{35}{12}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{\frac{61}{12}x + \frac{16}{3}}{x^2+2x+4}\,dx$$
$$= \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{1}{12}\int \frac{61x+64}{x^2+2x+4}\,dx.$$

Para calcular a última integral, escrevemos $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3$ e fazemos $u = x+1$ ou $x = u-1$ e $du = dx$; portanto,

$$\int \frac{61x+64}{x^2+2x+4}\,dx = \int \frac{61x+64}{(x+1)^2+3}\,dx = \int \frac{61(u-1)+64}{u^2+3}\,du$$
$$= 61\int \frac{u}{u^2+3}\,du + 3\int \frac{1}{u^2+3}\,du = \frac{61}{2}\ln(u^2+3) + \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}} + C$$
$$= \frac{61}{2}\ln((x+1)^2+3) + \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^5+x+1}{x^3-8}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{35}{12}\ln|x-2| + \frac{61}{24}\ln((x+1)^2+3) + \frac{3}{12\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

■

Exemplo 8.13 [Integrando usando Frações Parciais] Utilize a decomposição em frações parciais para integrar $\int \frac{x^2+2x+5}{x^2(x-1)}\,\mathrm{d}x$.

Solução Expandindo em frações parciais temos;

$$\frac{x^2+2x+5}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$$

Para calcular a, b, c colocamos o lado direito com o mesmo denominador:

$$\frac{x^2+2x+5}{x^2(x-1)} = \frac{ax(x-1)+b(x-1)+cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{(a+c)x^2+(b-a)x-b}{x^2(x-1)}.$$

Igualando os coeficientes obtemos o sistema

$$a+c=1, \qquad b-a=2, \qquad -b=5$$

Resolvendo, obtemos a expansão em frações parciais:

$$\frac{x^2+2x+5}{x^2(x-1)} = -\frac{7}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{8}{x-1}.$$

Integrando cada um dos termos da direita, obtemos:

$$\int \frac{x^2+2x+5}{x^2(x-1)}\,\mathrm{d}x = -7\log|x| + \frac{5}{x} + 8\log|x-1|.$$

■

Exemplo 8.14 [Integrando usando Frações Parciais] Utilize a decomposição em frações parciais para integrar $\int \frac{7x^2+31x+54}{(x+1)(x^2+6x+11)}\,\mathrm{d}x$.
Expandindo em frações parciais

$$\frac{7x^2+31x+54}{(x+1)(x^2+6x+11)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+11}.$$

Colocando no mesmo denominador

$$\begin{aligned} 7x^2+31x+54 &= A(x^2+6x+11) + (Bx+C)(x+1) \\ &= (A+B)x^2 + (6A+B+C)x + (11A+C). \end{aligned}$$

o que implica:

$$\begin{aligned} 7 &= A+B \\ 31 &= 6A+B+C \\ 54 &= 11A+C. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $A = 5$, $B = 2$ e $C = -1$. Logo

$$\int \frac{7x^2 + 31x + 54}{(x+1)(x^2+6x+11)}\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{5}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2+6x+11}\right)\ \mathrm{d}x.$$

O primeiro termo é fácil de integrar e é igual a $5\ln|x+1|$. O segundo termo exigirá um pouco mais de trabalho. O integrando $\dfrac{2x-1}{x^2+6x+11}$ possui um termo quadrático no denominador e um termo linear no numerador. Isso nos leva a tentar uma substituição. Faremos a substituição $u = x^2 + 6x + 11$, logo $du = (2x+6)\ \mathrm{d}x$. Como o numerador é $2x - 1$, e não $2x + 6$, Podemos obter o termo $2x + 6$ no numerador adicionando e subtraindo 7 "$7 - 7$."

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x^2+6x+11} &= \frac{2x-1+7-7}{x^2+6x+11}\\ &= \frac{2x+6}{x^2+6x+11} - \frac{7}{x^2+6x+11}.\end{aligned}$$

Nós agora pode integrar o primeiro termo utilizando substituição, levando a $\ln|x^2+6x+11|$. O termo final pode ser integrado usando arco tangente. Em primeiro lugar, completamos o quadrado no denominador:

$$\frac{7}{x^2+6x+11} = \frac{7}{(x+3)^2+2}.$$

Fazendo a substituição $u = x + 3$ obtemos

$$\int \frac{7}{x^2+6x+11}\ \mathrm{d}x = \frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

Juntando tudo

$$\begin{aligned}\int \frac{7x^2+31x+54}{(x+1)(x^2+6x+11)}\ \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{5}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2+6x+11}\right)\ \mathrm{d}x\\ &= \int \frac{5}{x+1}\ \mathrm{d}x + \int \frac{2x+6}{x^2+6x+11}\ \mathrm{d}x - \int \frac{7}{x^2+6x+11}\ \mathrm{d}x\\ &= 5\ln|x+1| + \ln|x^2+6x+11| - \frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+3}{\sqrt{2}}\right) + C.\end{aligned}$$

Nem sempre o método de frações parciais é o método mais simples, como ilustra o exemplo a seguir:

Exemplo 8.15 Calcule $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{(x-1)^2}\ \mathrm{d}x.$

Solução Essa integral pode ser calculada por frações parciais, mas nesse caso é melhor fazer uma mudança de variáveis. Seja $u = x - 1$ ou $x = u + 1$ e $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2}{(x-1)^2}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{(u+1)^3}{u^2}\ \mathrm{d}u && (8.14)\\ &= \int \frac{u^3+3u^2+3u+3}{u^2}\ \mathrm{d}u && (8.15)\\ &= \frac{u^2}{2} + 3u + 3\ln|u| - \frac{3}{u} + C && (8.16)\\ &= \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C. && (8.17)\end{aligned}$$

■

Exercícios

Ex. 8.1 — Decomponha $\frac{1}{x^2-3x}$ em frações parciais.

Ex. 8.2 — Decomponha $\frac{7-x}{x^2-9}$ em frações parciais.

Ex. 8.3 — Dados α, β, m, n constantes, com $\alpha \neq \beta$ mostre que existem A e B tais que:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

Ex. 8.4 — Usando o exercício anterior calcule as seguintes integrais:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_7^9 \frac{x-1}{x(x-2)}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$

Ex. 8.5 — Seja $\alpha \neq 0$. Mostre que:

$$\int \frac{1}{\alpha^2+x^2}dx = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right) + k$$

Use esse fato para calcular as integrais:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{5+x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{3+4x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{5+x^2}\,\mathrm{d}x$

Ex. 8.6 — Prove que dados α, m, n constantes mostre que existem A e B tais que:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}.$$

Ex. 8.7 — Calcule as seguintes integrais por frações parciais:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-9}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x+3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{x^4+x+1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

Ex. 8.8 — Calcule as seguintes integrais por frações parciais:

1. $\displaystyle\int \frac{12x^2+21x+3}{(x+1)(3x^2+5x-1)}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{6x^2+8x-4}{(x-3)(x^2+6x+10)}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+5}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+2x^2+3x}\,\mathrm{d}x$

Ex. 8.9 — Calcule as seguintes integrais

1. $\displaystyle\int \frac{7x+7}{x^2+3x-10}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \frac{7x-2}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int \frac{-4}{3x^2-12}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int \frac{x+7}{(x+5)^2}\,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int \frac{-3x-20}{(x+8)^2}\,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int \frac{9x^2+11x+7}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int \frac{-12x^2-x+33}{(x-1)(x+3)(3-2x)}\,\mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int \frac{94x^2-10x}{(7x+3)(5x-1)(3x-1)}\,\mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$

10. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-x-20}\,\mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int \frac{2x^2-4x+6}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+2x^2+3x}\,\mathrm{d}x$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+5}{x^2+4x+10}\,\mathrm{d}x$

14. $\displaystyle\int \frac{12x^2+21x+3}{(x+1)(3x^2+5x-1)}\,\mathrm{d}x$

15. $\displaystyle\int \frac{6x^2+8x-4}{(x-3)(x^2+6x+10)}\,\mathrm{d}x$

16. $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2-20x-69}{(x-7)(x^2+2x+17)}\,\mathrm{d}x$

18. $\displaystyle\int \frac{9x^2-60x+33}{(x-9)(x^2-2x+11)}\,\mathrm{d}x$

19. $\displaystyle\int \frac{6x^2+45x+121}{(x+2)(x^2+10x+27)}\,\mathrm{d}x$

20. $\displaystyle\int_1^2 \frac{8x+21}{(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$

21. $\displaystyle\int_0^5 \frac{14x+6}{(3x+2)(x+4)}\,\mathrm{d}x$

22. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2+5x-5}{(x-10)(x^2+4x+5)}\,\mathrm{d}x$

23. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x^2+2x+1)}\,\mathrm{d}x$

24. $\displaystyle\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+1}\,\mathrm{d}x$

8.2 ⋆ Decomposição em Frações Parciais

Nessa seção denotaremos por $\mathbb{R}[x]$ o conjunto dos polinômios com coeficientes reais e por $\mathbb{C}[x]$ o conjunto dos polinômios com coeficientes com coeficientes complexos.

> 8.1 **Teorema 2. :** Teorema de D'Alembert

Seja $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $c \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tal que $P(c) = 0$. Então existe um $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ (ou $\mathbb{C}[x]$) tal que $P(x) = (x - c)R(x)$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão de polinômios, a divisão de $P(x)$ por $x - c$ terá como resto um polinômio de grau 0, isto é, $P(x) = Q(x)(x - c) + S$. Como $P(c) = 0 = Q(c)(c - c) + S = S = 0$, logo $P(x) = Q(x)(x - c)$. ■

8.2 Teorema 2. : Frações Parciais - Raízes Reais

Sejam $P(x)$ e $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$ com $Q(a) \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Então existem $B \in \mathbb{R}$ e $R(x) \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)(x-a)^n} = \frac{R(x)}{Q(x)(x-a)^{n-1}} + \frac{B}{(x-a)^n}.$$

Demonstração. Colocando os dois lados com o mesmo denominador do lado esquerdo, queremos Q e B tais que $P(x) = R(x)(x - a) + BQ(x)$. Como $P(a) = BQ(a)$, e $Q(a) \neq 0$, defina $B = P(a)/Q(a)$. Defina, $h(x) = P(x) - BQ(x)$. Pela definição de B, é claro que $h(a) = 0$. Pelo Teorema8.2 (D'Alembert), existe $q \in \mathbb{R}[x]$ tal que $h(x) = R(x)(x - a) = P(x) - BQ(x)$. Logo, $P(x) = R(x)(x - a) + BQ(x)$. ■

Como consequência temos:

8.3 Corolário 2.

Sejam $P(x)$ e $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$ com $R(a) \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Então existem $B_1, \ldots, B_n \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)(x-a)^n} = \frac{R(x)}{Q(x)} + \frac{B_1}{(x-a)} + \frac{B_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(x-a)^n}.$$

Assim se $b \in \mathbb{R}$ é raiz de $Q(x)$ do Corolário acima, podemos aplicar o próprio Corolário em $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ e prosseguir na expansão em frações parciais. Precisamos de alguns fatos sobre as raízes complexas de polinômios reais. e polinômios reais.

8.4 Lema 2.

Seja $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (complexo não-real) e $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Então: (a) $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$. (b) $P(\alpha) = 0$ se, e somente se, $P(\overline{\alpha}) = 0$. (c) se α é raiz de x^2+bx+c então $x^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$.

Demonstração. (a) É fácil ver que $\overline{a+b}=\overline{a}+\overline{b}$ e $\overline{ab}=\overline{a}\overline{b}$ para todo $a,b\in\mathbb{C}$ e que se $c\in\mathbb{R}$, $\overline{c}=c$. Agora considere um $P(x)=\sum a_i x^i$ e faça a conta termo a termo. (b) $P(\alpha)=0$, se, e somente se, $\overline{P(\alpha)}=0$. Por (a), isto ocorre, se e somente se, $P(\overline{\alpha})=\overline{P(\alpha)}=0$. (c) Por (b) é claro que $\overline{\alpha}$ também é raiz. Pelo Teorema de D'Alembert, $x^2+bx+c=R(x)(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$. Comparando os graus dos polinômios dos dois lados, concluímos que q tem grau 1, isto é, $R(x)=C$. Comparando o coeficiente do x^2 dos dois lados, concluímos que $R(x)=1$. ■

A conclusão do item (b) do Lema é que raízes complexas não-reais de polinômios reais aparecem **sempre** aos pares conjugados.

8.5 Teorema 2. : Frações Parciais - Raízes Complexas

Sejam $P(x)$ e $Q\in\mathbb{R}[x]$ e $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ (complexo não-real), raiz de x^2+bx+c, $b,c\in\mathbb{R}$ com $Q(\alpha)\neq 0$ e $n\in\mathbb{N}$. Então existem $B,C\in\mathbb{R}$ e $R(x)\in\mathbb{R}[x]$ tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)(x^2+bx+c)^n}=\frac{R(x)}{Q(x)(x^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}.$$

Demonstração. Colocando os dois lados com o mesmo denominador do lado esquerdo, queremos Q e B,C tais que $P(x)=R(x)(x^2+bx+c)+(Bx+C)Q(x)$. Como α é raiz de x^2+bx+c, pelo Lema 8.2 (b), $\overline{\alpha}$ também é raiz. Agora temos que $P(\alpha)=(B\alpha+C)Q(\alpha)$ e $P(\overline{\alpha})=(B\overline{\alpha}+C)Q(\overline{\alpha})$. Como por hipótese $Q(\alpha)$ não se anula, pelo Lema 8.2 (a), $Q(\overline{\alpha})$ também não se anula. Assim introduzimos $P=P(\alpha)/Q(\alpha)$. Pela propriedade do conjugado, e pelo Lema 8.2 (a), $\overline{P}=P(\overline{\alpha})/Q(\overline{\alpha})$. Para determinar B e C precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} B\alpha+C &= P,\\ B\overline{\alpha}+C &= \overline{P}.\end{cases}$$

Ele possui solução única pois seu determinante é $\alpha-\overline{\alpha}$, que é não nulo pois por hipótese α é complexo não-real. Agora, conjugando todos elementos do sistema, obtemos um sistema para $\overline{B},\overline{C}$:

$$\begin{cases} \overline{B}\alpha+\overline{C} &= \overline{P},\\ \overline{B}\overline{\alpha}+\overline{C} &= P,\end{cases}$$

que é idêntico ao anterior mas com outras incógnitas. Pela unicidade de solução temos que $B=\overline{B}$ e $C=\overline{C}$, isto é, $B,C\in\mathbb{R}$. Defina, $h(x)=P(x)-(Bx+C)Q(x)$. Pela definição de B e C, é claro que $h(\alpha)=h(\overline{\alpha})=0$. Pelo Teorema 8.2, aplicado duas vezes, existe $q\in\mathbb{R}[x]$ tal que $h(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})R(x) = P(x) - (Bx+C)Q(x)$. Pelo Lema 8.2 (c), $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2+bx+c$. Assim, $h(x) = (x^2+bx+c)R(x) = P(x)-(Bx+C)Q(x)$. Como os polinômios do lado direito estão em $\mathbb{R}[x]$ e o primeiro termo do esquerdo também, concluímos que $q \in \mathbb{R}[x]$. É necessário provar isto pois por D'Alembert, como a raiz é complexa, $q \in \mathbb{C}[x]$ de forma geral. Logo $P(x) = R(x)(x^2+bx+c)+(Bx+C)Q(x)$. ■

Como consequência do teorema anterior temos:

8.6 **Corolário 2.**

Sejam $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (complexo não-real), raiz de x^2+bx+c, $b, c \in \mathbb{R}$ com $Q(\alpha) \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Então existem $B_1, \ldots, B_n, C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$\frac{P(x)}{Q(x)(x^2+bx+c)^n} = \frac{R(x)}{Q(x)} + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+bx+c)} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+bx+c)^n}.$$

8.3 Integrais Trigonométricas

Nesta seção nós dedicaremos as integrais envolvendo funções trigonométricas e algumas das técnicas que podemos usar para calculá-las. Vamos começar com um exemplo simples:

Exemplo 8.1 Calcule $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \cos x \; dx$

Solução Na integral em questão podemos realizar a substituição simples $u = \operatorname{sen} x$.

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos x \; dx = \int u^5 \; du \quad \text{Fazendo a substituição } u = \operatorname{sen} x \tag{8.18}$$

$$= \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x \tag{8.19}$$

■

Exemplo 8.2 Calcule $\displaystyle\int \cos^5 x \; dx$.

Solução Nesse caso nenhuma substituição simples funciona. Para integramos potências de cosseno por substituição, necessitamos de um fator extra $\operatorname{sen} x$. Assim, iremos separar um fator cosseno e converter o fator $cos^4 x$ restante em uma expressão envolvendo o seno, usando a identidade trigonométrica fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

Observe que $\cos^5 x = \cos^4 x\,\cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x$.

$$\int \cos^5 x \; dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \; dx \tag{8.20}$$

$$= \int (1 - u^2)^2 \; du \quad \text{Fazendo } u = \operatorname{sen} x,\, du = \cos x \; dx. \tag{8.21}$$

$$= \int 1 - 2u^2 + u^4 \; du \tag{8.22}$$

$$= u - \frac{2}{3}u^3 \frac{u^5}{5} + C \tag{8.23}$$

$$= \operatorname{sen} x - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 x + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C \tag{8.24}$$

■

Exemplo 8.3 Calcule $\int \operatorname{sen}^5 x \, \cos^2 x \; dx$.

Solução Neste caso temos ambos senos e cossenos e, neste caso, o expoente do seno é par enquanto o expoente do cosseno é impar Assim, podemos usar uma técnica semelhante nesta integral. Desta vez, vamos separar um cosseno e converter o restante para senos.

$$\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen}(x) \tag{8.25}$$

$$= (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x. \tag{8.26}$$

Fazendo a substituição $u = \cos x$ temos $du = -\operatorname{sen} x dx$ e assim

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \; dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x \; dx \tag{8.27}$$

$$= - \int (1 - u^2)^2 u^2 \; du \tag{8.28}$$

$$= - \int u^2 - 2u^4 + u^6 \; du \tag{8.29}$$

$$= - \left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right) + C \tag{8.30}$$

$$= - \frac{\cos^3 x}{3} + 2\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + C. \tag{8.31}$$

■

O único caso que ainda não analisamos é quando ambos os expoentes são pares, Neste caso, a técnica que usamos no primeiros exemplos simplesmente não funcionará. Nesse caso a estratégia é utilizar uma ou mais das seguintes fórmulas para reescrever o integrando.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left[1 + \cos(2x)\right] \tag{8.32}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(2x)\right] \tag{8.33}$$

$$\tag{8.34}$$

Exemplo 4. *Calcule* $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x \; dx.$ ◁

Solução Como as potências de seno e cosseno são ambas pares, procedemos como segue:

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) \, dx \\ &= \int \frac{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4} \cdot \frac{1-\cos(2x)}{2} \, dx \\ &= \int \frac{1}{8}\big(1+\cos(2x)-\cos^2(2x)-\cos^3(2x)\big) \, dx\end{aligned}$$

O termo $\cos(2x)$ é fácil de integrar. O termo $\cos^2(2x)$ exige que reduzamos a potência novamente. O termo $\cos^3(2x)$ possui potência impar, e para calculá-la utilizaremos uma substituição.

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C.$$

$$\int \cos^2(2x) \, dx = \int \frac{1+\cos(4x)}{2} \, dx = \frac{1}{2}\big(x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)\big) + C.$$

Finalmente $\cos^3(2x)$ as

$$\cos^3(2x) = \cos^2(2x)\cos(2x) = \big(1-\operatorname{sen}^2(2x)\big)\cos(2x).$$

Fazendo $u = \operatorname{sen}(2x)$, temos $du = 2\cos(2x) \, dx$, logo

$$\begin{aligned}\int \cos^3(2x) \, dx &= \int \big(1-\operatorname{sen}^2(2x)\big)\cos(2x) \, dx \\ &= \int \frac{1}{2}(1-u^2) \, du \\ &= \frac{1}{2}\Big(u - \frac{1}{3}u^3\Big) + C \\ &= \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(2x)\Big) + C\end{aligned}$$

Agrupando, temos:

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int \frac{1}{8}\big(1+\cos(2x)-\cos^2(2x)-\cos^3(2x)\big) \, dx \\ &= \frac{1}{8}\Big[x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}\big(x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)\big) \\ &- \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(2x)\Big)\Big] + C \\ &= \frac{1}{8}\Big[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(2x)\Big] + C\end{aligned}$$

■

Exemplo 8.5 Calcule $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(x) \, dx$.

Solução Nesse caso ambos os expoentes são pares e utilizaremos as identidades $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}[1-\cos(2x)]$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2}[1+\cos(2x)]$. Assim,

$$\int \operatorname{sen}^4(x)\ dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos(2x))^2\ dx \tag{8.35}$$
$$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos(2x)+\cos^2(2x))\ dx \tag{8.36}$$
$$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos(2x)+\frac{1}{2}(1+\cos(4x))\ dx \tag{8.37}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}-\operatorname{sen}(2x)+\frac{\operatorname{sen}(4x)}{8}\right)+C. \tag{8.38}$$

■

Exemplo 8.6 Calcule a seguinte integral $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\ dx$

Solução Faremos de dois modos: **Solução 1**
No primeiro modo utilizaremos as identidades $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}[1-\cos(2x)]$ e $\cos^2 x = \frac{1}{2}[1+\cos(2x)]$. Assim,

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cos^x\ dx = \int \frac{1}{2}[1-\cos(2x)]\,\frac{1}{2}[1+\cos(2x)]\ dx \tag{8.39}$$
$$= \frac{1}{4}\int 1-\cos^2(2x)\ dx \tag{8.40}$$

Novamente reutilizaremos a fórmula de ângulo duplo:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\ dx = \frac{1}{4}\int 1-\cos^2(2x)\ dx \tag{8.41}$$
$$= \frac{1}{4}\int 1-\frac{1}{2}[1+\cos(4x)]\ dx \tag{8.42}$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}\frac{1}{2}\cos(4x)\ dx \tag{8.43}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\operatorname{sen}(4x)\right]+C \tag{8.44}$$
$$= \frac{x}{8}-\frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x)+C \tag{8.45}$$

Solução 2
No segundo modo utilizaremos a identidade:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\ dx = \int [\operatorname{sen} x\cos x]^2\ dx \tag{8.46}$$
$$= \int \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right]^2\ dx \tag{8.47}$$
$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2(2x)\ dx \tag{8.48}$$
$$= \frac{1}{8}\int 1-\cos(4x)\ dx \tag{8.49}$$
$$= \frac{x}{8}-\frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x)+C \tag{8.50}$$

■

Estratégia para avaliar $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$

a Se n for ímpar,

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{(2k+1)} x \, dx = \int \operatorname{sen}^m x \, (\cos^2 x)^k \cos x \, dx \tag{8.51}$$

$$= \int \operatorname{sen}^m x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \, dx. \tag{8.52}$$

Então faça $u = \operatorname{sen} x$.

b Se m for ímpar,

$$\int \operatorname{sen}^{(2k+1)} x \cos^n x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx \tag{8.53}$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx. \tag{8.54}$$

Então faça $u = \cos x$.

c Se m e n forem pares, utilizamos as identidades dos ângulos metade

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

Algumas vezes pode ser útil a identidade

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x).$$

Quando tivermos produtos de senos e cossenos podemos usar também as identidades:

a $2 \operatorname{sen} a \cos b = \operatorname{sen}(a - b) + \operatorname{sen}(a + b)$,

b $2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$,

c $2 \cos a \cos b = \cos(a - b) + \cos(a + b)$.

Exemplo 8.7 Calcule $\int \operatorname{sen}(3x) \cos(2x) \, dx$.

Solução Como $\operatorname{sen}(3x)\cos(2x) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(x)]$. Então,

$$\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x) \, dx = \frac{1}{2} \int [\operatorname{sen}(5x) + \operatorname{sen}(x)] \, dx = -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

■

Estratégia para avaliar

$\int \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\ \mathrm{d}x \quad \int \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)\ \mathrm{d}x \quad \int \cos(mx)\cos(nx)\ \mathrm{d}x$

Utilize a identidade correspondente:

a) $2\operatorname{sen} a\ \cos b = \operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)$,

b) $2\operatorname{sen} a\ \operatorname{sen} b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$,

c) $2\cos a\ \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$.

Podemos usar uma estratégia semelhante para avaliar integrais envolvendo potências de tangente e secante.

Exemplo 8.8 Calcule $\int \sec^3 x\ \mathrm{d}x$.

Solução Faremos de dois modos. No primeiro modo converteremos em senos e cossenos:

$$\sec^3(x) = \frac{1}{\cos^3(x)} = \frac{\cos(x)}{(1-\operatorname{sen}^2(x))^2}$$

Como $\cos x$ aparece com uma potência ímpar, então o substituição $u = \operatorname{sen}(x)$ deveria funcionar

$$\int \sec^3 x\, dx = \int \frac{du}{(1-u^2)^2}$$

A última integral admite a seguinte expansão em frações parciais

$$\frac{1}{(1-u^2)^2} = \frac{1/4}{1-u} + \frac{1/4}{(1-u)^2} + \frac{1/4}{1+u} + \frac{1/4}{(1+u)^2}.$$

Calculando as antiderivadas termo a termo temos

$$-\frac{1}{4}\ln(1-u) + \frac{1/4}{1-u} + \frac{1}{4}\ln(1+u) - \frac{1/4}{1+u} + C = \frac{1}{4}\ln\frac{1+u}{1-u} + \frac{1}{2}\frac{u}{1-u^2} + C \tag{8.55}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} + \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + C. \tag{8.56}$$

No segundo método utilizaremos integral por partes

$$\int \sec^3 x\, dx = \int u\, dv$$

com

$$\mathrm{d}v = \sec^2 x\ \mathrm{d}x, \tag{8.57}$$

$$v = \operatorname{tg} x, \tag{8.58}$$

$$u = \sec x, \tag{8.59}$$

$$\mathrm{d}u = \sec x \operatorname{tg} x\ \mathrm{d}x. \tag{8.60}$$

Então

$$\int \sec^3 x\, dx = \int u\, dv \tag{8.61}$$
$$= uv - \int v\, du \tag{8.62}$$
$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x \ \mathrm{d}x \tag{8.63}$$
$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \left(\sec^2 x - 1\right) \ \mathrm{d}x \tag{8.64}$$
$$= \sec x \operatorname{tg} x - \left(\int \sec^3 x\, dx - \int \sec x \ \mathrm{d}x.\right) \tag{8.65}$$
$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x \ \mathrm{d}x. \tag{8.66}$$

Dessa forma

$$2\int \sec^3 x\, dx = \sec x \operatorname{tg} x + \int \sec x \ \mathrm{d}x \tag{8.67}$$
$$= \sec x \operatorname{tg} x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C. \tag{8.68}$$

E logo

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C_1.$$

■

Exemplo 8.9 Calcule $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \ \mathrm{d}x$. Observe que $\operatorname{tg}^6 x \sec^4 x = \operatorname{tg}^6 x \sec^2 x \sec^2 x = \operatorname{tg}^6 x(1+\operatorname{tg}^2 x)\sec^2 x$. Fazendo $u = \operatorname{tg} x$ temos $\mathrm{d}u = \sec^2 x \ \mathrm{d}x$ e assim

$$\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \ \mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}^6 x(1+\operatorname{tg}^2 x)\sec^2 x \ \mathrm{d}x = \int u^6(1+u^2) \ \mathrm{d}u$$
$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C = \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{tg}^9 x}{9} + C.$$

Exemplo 8.10 Calcule $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x \ \mathrm{d}x$. Observe que $\operatorname{tg}^5 x \sec^7 x = \operatorname{tg}^4 x \sec^6 x \sec x \operatorname{tg} x = (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x \sec x \operatorname{tg} x$. Fazendo $u = \sec x$ temos $\mathrm{d}u = \sec x \operatorname{tg} x \ \mathrm{d}x$ e assim

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x \ \mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^6 x \sec x \operatorname{tg} x \ \mathrm{d}x = \int (u^2-1)^2 u^6 \ \mathrm{d}u$$
$$= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sec^{11} x}{11} - 2\frac{\sec^9 x}{9} + \frac{\sec^7 x}{7} + C.$$

Estratégia para avaliar $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x \, dx$

$\boxed{a}$ Se n for par,

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x \, dx = \int \operatorname{tg}^m x \, (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx \tag{8.69}$$

$$= \int \operatorname{tg}^m x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx. \tag{8.70}$$

Então faça $u = \operatorname{tg} x$.

$\boxed{b}$ Se m for ímpar,

$$\int \operatorname{tg}^{(2k+1)} x \sec^n x \, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x \, dx$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x \, dx.$$

Então faça $u = \sec x$.

Exercícios

Ex. 8.10 — Calcule as seguintes integrais

1. $\int \operatorname{sen} x \cos^4 x \, dx$
2. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x \, dx$
3. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$
4. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \, dx$
5. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^5 x \, dx$
6. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^7 x \, dx$
7. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$
8. $\int \operatorname{sen}(5x) \cos(3x) \, dx$
9. $\int \operatorname{sen}(x) \cos(2x) \, dx$
10. $\int \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(7x) \, dx$
11. $\int \operatorname{sen}(\pi x) \operatorname{sen}(2\pi x) \, dx$
12. $\int \cos(x) \cos(2x) \, dx$
13. $\int \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) \cos(\pi x) \, dx$
14. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x \, dx$
15. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^4 x \, dx$

16. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x \; dx$

17. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x \; dx$

18. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x \; dx$

19. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5 x \sec^5 x \; dx$

20. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^4 x \; dx$

21. $\displaystyle\int \sec^5 x \; dx$

22. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \sec x \; dx$

23. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \sec^3 x \; dx$

24. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos^4 x \; dx$

25. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \cos x \; dx$

26. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^7 x \; dx$

Ex. 8.11 — Calcule as seguintes integrais.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(5x)\cos(3x) \; dx$

2. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\cos(2x) \; dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x \; dx$

4. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \sec^4 x \; dx$

Ex. 8.12 — Calcule:

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(8x) \; dx$

2. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x) \; dx$

3. $\displaystyle\int \cos^2(4x) \; dx$

4. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\cos^4(5x) \; dx$

5. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(2x)\cos^2(2x) \; dx$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^2(2x)\cos^2(2x) \; dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\cos^2(4x) \; dx$

8.4 Substituição Trigonométrica

Este método pode ser utilizado no cálculo de integrais que contêm radicais, realizado através de substituições envolvendo funções trigonométricas. Em particular queremos calcular integrais que contém expressões da forma:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \sqrt{a^2 + x^2} \qquad \sqrt{x^2 - a^2}$$

A estratégia para calcular tais integrais é fazer uma substituição que elimine o radical. Por exemplo para eliminar $\sqrt{a^2 - x^2}$ faça $x = a \operatorname{sen} \theta$. Logo $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(x/a)$, para $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Nesse intervalo, $\cos\theta \geq 0$, logo

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$$

Vejamos um exemplo:

Exemplo 8.1 Calcule $\int \sqrt{9-x^2}\ \mathrm{d}x$.

Solução Como $1-\operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t$, então $9 - 9\operatorname{sen}^2 t = 9\cos^2 t$, a mudança $x = 3\operatorname{sen} t\,, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, elimina a raiz do integrando. Temos $dx = 3\cos t\ dt$. Então,

$$\int \sqrt{9-x^2}\ \mathrm{d}x = 3\int \sqrt{9-9\operatorname{sen}^2 t}\cos t\, dt \tag{8.71}$$

$$= 3\int \sqrt{9\cos^2 t}\cos t\ \mathrm{d}t \tag{8.72}$$

$$= 9\int |\cos t|\cos t\ \mathrm{d}t = 9\int \cos^2 t\ \mathrm{d}t \tag{8.73}$$

pois $\cos t \geq 0$ se $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Assim,

$$\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = 9\int \cos^2 t\ \mathrm{d}t \tag{8.74}$$

$$= 9\int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ \cos(2t)\right)\ \mathrm{d}t \tag{8.75}$$

$$= \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\ \operatorname{sen}(2t) + C = \frac{9}{2}t + \frac{9}{2}\ \operatorname{sen} t\ \cos t + C \tag{8.76}$$

Devemos retornar à variável x original. Como $x = \operatorname{sen} t\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, segue $t = \operatorname{arcsen} x$ e $\cos t = \sqrt{1-x^2}$; logo

$$\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{9}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{9}{2}x\sqrt{1-x^2} + C, \quad -1 < x < 1.$$

■

Substituição Trigonométrica

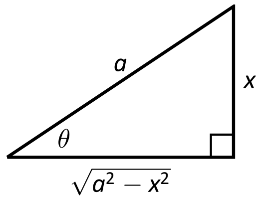
a Para integrandos contendo $\sqrt{a^2 - x^2}$:

Faça $x = a \operatorname{sen} \theta$, $\quad dx = a \cos \theta \, \mathrm{d}\theta$

Logo $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(x/a)$, para $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

No intervalo, $\cos \theta \geq 0$, logo

$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$



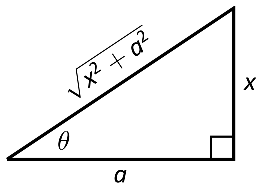
b Para integrandos contendo $\sqrt{x^2 + a^2}$:

Faça $x = a \operatorname{tg} \theta$, $\quad dx = a \sec^2 \theta \, \mathrm{d}\theta$

Logo $\theta = \operatorname{arctg}(x/a)$, para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$.

No intervalo, $\sec \theta > 0$, logo

$\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec \theta$



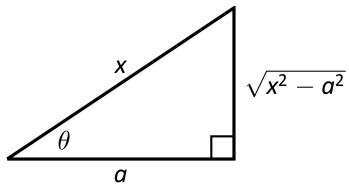
c Para integrandos contendo $\sqrt{x^2 - a^2}$:

Faça $x = a \sec \theta$, $\quad dx = a \sec \theta \operatorname{tg} \theta \, \mathrm{d}\theta$

Logo $\theta = \sec^{-1}(x/a)$. Se $x/a \geq 1$, então $0 \leq \theta < \pi/2$; se $x/a \leq -1$, então $\pi/2 < \theta \leq \pi$.

Restringimos à $x \geq a$, logo $x/a \geq 1$, r $0 \leq \theta < \pi/2$. No intervalo, $\operatorname{tg} \theta \geq 0$, Logo

$\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} \theta$



Exemplo 2 - Usando Substituição Trigonométrica.
Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5 + x^2}} \, \mathrm{d}x.$ $\triangleleft$

Solução Facilmente reconhecemos a escolha $a = \sqrt{5}$ e fazemos $x = \sqrt{5} \operatorname{tg} \theta$. Dessa forma $dx = \sqrt{5} \sec^2 \theta \, \mathrm{d}\theta$. Usaremos o fato que $\sqrt{5 + x^2} = \sqrt{5 + 5 \operatorname{tg}^2 \theta} = \sqrt{5 \sec^2 \theta} = \sqrt{5} \sec \theta$. Substituindo temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{5 + x^2}} \, \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{5 + 5 \operatorname{tg}^2 \theta}} \sqrt{5} \sec^2 \theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int \frac{\sqrt{5} \sec^2 \theta}{\sqrt{5} \sec \theta} \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int \sec \theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= \ln \left| \sec \theta + \operatorname{tg} \theta \right| + C.
\end{aligned}$$

A integração terminou. Como o problema original foi colocado em termos de x, devemos converter nossa resposta de volta a essa variável: O triângulo de referência (b) da Substituição Trigonométrica ajuda. Como $x = \sqrt{5} \operatorname{tg} \theta$, nós temos

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{\sqrt{5}}.$$

Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{5+x^2}}\ dx &= \ln\left|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta\right| + C\\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}}\right| + C.\end{aligned}$$

Podemos deixar esta resposta como está, ou podemos usar uma identidade logarítmica para simplificá-la. Observe:

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}}\right| + C &= \ln\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\big(\sqrt{x^2+5}+x\big)\right| + C\\ &= \ln\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right| + \ln\left|\sqrt{x^2+5}+x\right| + C\\ &= \ln\left|\sqrt{x^2+5}+x\right| + C,\end{aligned}$$

o termo $\ln\left(1/\sqrt{5}\right)$ é absorvido na constante C. ■

Exemplo 3 - Usando Substituição Trigonométrica. *Calcule* $\int \sqrt{4x^2-1}\ dx$. ◁

Solução Começamos reescrevendo o integrando na forma $\sqrt{x^2-a^2}$ para algum valor de a:

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2-1} &= \sqrt{4\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}\\ &= 2\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}.\end{aligned}$$

Assim temos que $a = 1/2$, e seguindo a ideia da Substituição Trigonométrica(c), fazemos $x = \frac{1}{2}\sec\theta$, e logo $dx = \frac{1}{2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta\ d\theta$. Fazendo as substituições temos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4x^2-1}\ dx &= \int 2\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\ dx\\ &= \int 2\sqrt{\frac{1}{4}\sec^2\theta-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\sec\theta\operatorname{tg}\theta\right)\ d\theta\\ &= \int \sqrt{\frac{1}{4}(\sec^2\theta-1)}\Big(\sec\theta\operatorname{tg}\theta\Big)\ d\theta\\ &= \int \sqrt{\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\theta}\Big(\sec\theta\operatorname{tg}\theta\Big)\ d\theta\\ &= \int \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta\sec\theta\ d\theta\\ &= \frac{1}{2}\int\Big(\sec^2\theta-1\Big)\sec\theta\ d\theta\\ &= \frac{1}{2}\int\left(\sec^3\theta-\sec\theta\right)\ d\theta.\end{aligned}$$

Calculamos a integral de $\sec^3\theta$ no Exemplo 8, m

$$\int \sec^3\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\Big(\sec\theta\operatorname{tg}\theta + \ln\left|\sec\theta+\operatorname{tg}\theta\right|\Big) + C.$$

Logo

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4x^2-1}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \left(\sec^3\theta - \sec\theta\right)\ \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Big(\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta + \ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta|\Big) - \ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta|\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\left(\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - \ln|\sec\theta + \mathrm{tg}\,\theta|\right) + C.\end{aligned}$$

Vamos retornar a variável inicial. Com $a = 1/2$, e $x = \dfrac{1}{2}\sec\theta$, o triângulo da Substituição Trigonométrica (c) mostra que

$$\mathrm{tg}\,\theta = \sqrt{x^2-1/4}\Big/(1/2) = 2\sqrt{x^2-1/4} \quad \text{e} \quad \sec\theta = 2x.$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\Big(\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta - \ln|\sec\theta+\mathrm{tg}\,\theta|\Big) + C &= \frac{1}{4}\Big(2x\cdot 2\sqrt{x^2-1/4} - \ln\left|2x + 2\sqrt{x^2-1/4}\right|\Big) + C \\ &= \frac{1}{4}\Big(4x\sqrt{x^2-1/4} - \ln\left|2x + 2\sqrt{x^2-1/4}\right|\Big) + C.\end{aligned}$$

Assim

$$\int \sqrt{4x^2-1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Big(4x\sqrt{x^2-1/4} - \ln\left|2x+2\sqrt{x^2-1/4}\right|\Big) + C.$$

■

Exemplo 8.4 [Usando Substituição Trigonométrica] Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\ \mathrm{d}x.$

Solução Usando a Substituição Trigonométrica (a) com $a = 2$, $x = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$, $dx = 2\cos\theta$ e logo $\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$. Consequentemente

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\ \mathrm{d}x &= \int \frac{2\cos\theta}{4\,\mathrm{sen}^2\,\theta}(2\cos\theta)\ \mathrm{d}\theta \\ &= \int \cot^2\theta\ \mathrm{d}\theta \\ &= \int (\csc^2\theta - 1)\ \mathrm{d}\theta \\ &= -\cot\theta - \theta + C.\end{aligned}$$

Para reescrever a resposta em termos de x utilizaremos o triângulo de referência da Substituição Trigonométrica (a), assim $\cot\theta = \sqrt{4-x^2}/x$ e $\theta = \mathrm{sen}^{-1}(x/2)$. Logo

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

■

Exemplo 8.5 [Usando Substituição Trigonométrica] Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x.$

Solução Já sabemos que a integral anterior é $\mathrm{arctg}\,x + C$. Nós aplicamos Substituição Trigonométrica para mostrar que obtemos a mesma resposta sem inerentemente confiar no conhecimento da derivada da função arco tangente. Fazendo a substituição (b), deixe $x = \operatorname{tg}\theta$, $dx = \sec^2\theta \; \mathrm{d}\theta$ e note que $x^2+1 = \operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$. Logo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+1} \; \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sec^2\theta} \sec^2\theta \; \mathrm{d}\theta \\ &= \int 1 \; \mathrm{d}\theta \\ &= \theta + C.\end{aligned}$$

Como $x = \operatorname{tg}\theta$, $\theta = \operatorname{arctg} x$, e concluímos que $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1} \; \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C.$ ■

Tabela 8.1 Substituições Trigonométricas

Expressão no integrando	Substituição	Restrição	Simplificação
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\operatorname{sen}\theta$	$-\pi/2 \leq \theta\pi/2$	$a^2-x^2 = a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta = a^2\cos^2\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a\operatorname{tg}\theta$	$-\pi/2 \leq \theta\pi/2$	$a^2+x^2 = a^2 + a^2\operatorname{tg}^2\theta = a^2\sec^2\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec\theta$	$0 \leq \theta \leq \pi/2$ se $x \geq a$	$x^2-a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2\operatorname{tg}^2\theta$

Exercícios

Ex. 8.13 — Calcule as integrais usando substituição trigonométrica. Esboce o triângulo retângulo associado

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}} \; \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9-x^2} \; \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}} \; \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} x^3\sqrt{4-9x^2} \; \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^4} \; \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{5/2}}$

Ex. 8.14 —

1. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1} \; \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4} \; \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2} \; \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2} \; \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1} \; \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-16} \; \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2+1} \; \mathrm{d}x$

8. $\int \sqrt{1-9x^2}\ \mathrm{d}x$
9. $\int \sqrt{16x^2-1}\ \mathrm{d}x$
10. $\int \frac{8}{\sqrt{x^2+2}}\ \mathrm{d}x$
11. $\int \frac{3}{\sqrt{7-x^2}}\ \mathrm{d}x$
12. $\int \frac{5}{\sqrt{x^2-8}}\ dx$
13. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}\ \mathrm{d}x$
14. $\int \frac{\sqrt{x^2-11}}{x}\ \mathrm{d}x$
15. $\int \frac{5x^2}{\sqrt{x^2-10}}\ \mathrm{d}x$
16. $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x$
17. $\int \frac{1}{(x^2+4x+13)^2}\ \mathrm{d}x$
18. $\int \frac{x}{(x^2+9)^{3/2}}\ \mathrm{d}x$
19. $\int x^2(1-x^2)^{-3/2}\ \mathrm{d}x$
20. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$
21. $\int \frac{\sqrt{5-x^2}}{7x^2}\ \mathrm{d}x$
22. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}\ \mathrm{d}x$
23. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$
24. $\int_{4}^{8} \sqrt{x^2-16}\ \mathrm{d}x$

Ex. 8.15 —

1. $\int_0^2 \sqrt{x^2+4}\ \mathrm{d}x$
2. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)^2}\ \mathrm{d}x$
3. $\int_{-1}^{1} \sqrt{9-x^2}\ \mathrm{d}x$
4. $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$

8.5⋆ A Substituição de Weierstrass $u = \text{tg}(x/2)$

Se um integrando é uma função racional de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, ela pode ser reduzida a uma função racional de u pela substituição de Weierstrass $u = \text{tg}(x/2)$ Esse fato pode ser facilmente verificado, observando que

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2) = 2\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{\cos(x/2)}\cos^2(x/2).$$

Assim,

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\,\text{tg}(x/2)}{1+\text{tg}^2(x/2)} = \frac{2u}{1+u^2}.$$

De modo análogo temos:

$$\cos x = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x/2) = \cos^2(x/2)\sec^2(x/2) - 2\cos^2(x/2)\,\text{tg}^2(x/2),$$

logo,

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Dessa forma temos que ao realizarmos a substituição $u = \operatorname{tg}(x/2)$ temos que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Como $u = \operatorname{tg}^2(x/2)$, temos que $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sec^2(x/2)\ \mathrm{d}x = 1/2(1+\operatorname{tg}^2(x/2)\ \mathrm{d}x$. Logo

$$\mathrm{d}x = \frac{2\ \mathrm{d}u}{1+u^2}$$

Exemplo 8.1 Calcule $\int \operatorname{cossec} x\ \mathrm{d}x$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot 2 \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

Exemplo 8.2 Calcule $\int \frac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x}\ \mathrm{d}x$. Fazendo $u = \operatorname{tg}(x/2)$, temos que $\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2(x/2))dx$, então $dx = \frac{2}{1+u^2}\ \mathrm{d}u$. Utilizando as identidades trigonométricas anteriores,

$$\cos x + \operatorname{sen} x = \frac{1-u^2+2u}{1+u^2}.$$

Assim,

$$\int \frac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x}\ \mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{1-u^2+2u}\ \ \mathrm{d}u,$$

a qual pode ser integrada utilizando frações parciais. Note que

$$\frac{1}{u^2-2u-1} = \frac{1}{(u-a)(u-b)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-b}\right),$$

onde $a = 1+\sqrt{2}$ e $b = 1-\sqrt{2}$. Portanto,

$$\int \frac{1}{\cos x + \operatorname{sen} x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ln|u-b| - \ln|u-a|) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln|\operatorname{tg}(x/2) - 1 + \sqrt{2}| - \ln|\operatorname{tg}(x/2) - 1 - \sqrt{2}|\right) + C.$$

8.6 Estratégias de Integração

Alice no País das Maravilhas- Lewis Carrol

> *Alice perguntou: "Poderia me dizer, por favor, que caminho devo tomar ...?"*
> *"Isso depende bastante de onde você quer chegar", disse o Gato.*
> *"O lugar não me importa muito...", disse Alice.*
> *"Então não importa que caminho tomar", disse o Gato.*
>
> — Alice no País das Maravilhas, Lewis Carrol

Esta seção apresenta uma estratégia geral para resolver problemas na integração.[1] A estratégia tem três etapas:

- SIMPLIFICAR;
- CLASSIFICAR;
- MODIFICAR.

No passo 1, SIMPLIFICAR temos que tentar reduzir nosso problema para um que possa ser resolvido mais facilmente. Se isso não resolver o problema passamos para o passo 2, CLASSIFICAR. Aqui usamos a forma do integrando para decidir qual técnica especial que podemos utilizar, ou seja, a integração por partes, substituição, etc. Se formos incapazes de classificar o integrando, passamos para a etapa 3, MODIFICAR. Nesse caso temos que manipular o integrando em uma ou mais formas. Devemos sempre buscar por alternativas simples antes de iniciar os cálculos mais complicados, e iniciar o processo com o passo 1 sempre que conseguirmos transformar a integral para algo mais fácil. Há um par de observações que precisam ser feitas sobre essa estratégia. Primeiro, não é um conjunto rígido e rápido de regras para determinar o método que deve ser usado. É realmente nada mais do que um conjunto geral de diretrizes que nos ajudam a identificar as técnicas que podem funcionar. Algumas integrais podem ser calculadas em mais de uma maneira e assim dependendo do caminho que você tomar você pode terminar com uma técnica diferente de outra pessoa que também está seguindo essas estratégias.

SIMPLIFICAR

Como os problemas a seguir ilustram, vale a pena tomar alguns momentos para procurar uma solução rápida ou fácil para um problema antes de saltar para um procedimento complicado. Isto é especialmente verdadeiro em integração, onde uma observação oportuna pode economizar uma enorme quantidade de trabalho. Os dois tipos principais de simplificação que vamos discutir estão resumidos no quadro a seguir.

Simplificações

- Manipulações Algébricas Simples;
- Substituições Óbvias;

[1] Essa estratégia é baseada na estratégia apresentada em (SCHOENFELD, 1978) e sua eficiência é discutida em (KALLAM; KALLAM, 1996).

Exemplo 8.1

$$\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{x} + x\ \mathrm{d}x$$

$$\int \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\,[1+\cos(2x)]\ \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x-3}{x-4}\ \mathrm{d}x = \int 1 + \frac{1}{x-4}\ \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{3x^2-2x+1}{2x-1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\ \mathrm{d}x$$

Exemplo 8.2

$$\int \frac{x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x$$

Solução Faça a substituição $u = x^2+1$. ■

Exemplo 8.3 Calcule $\int x^3\sqrt{x^2-1}\ \mathrm{d}x$

Solução Faça $u = \sqrt{x^2-1}$ ■

Exemplo 8.4 Calcule

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sec^4 x}\ \mathrm{d}x$$

Solução

$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sec^4 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cos^4 x\ \mathrm{d}x \tag{8.77}$$

$$= \int \operatorname{sen} x \cos^3 x\ \mathrm{d}x \quad u = \cos x \tag{8.78}$$

$$= -\int u^3\ \mathrm{d}u \tag{8.79}$$

$$= \frac{1}{4}\cos^4 x + C \tag{8.80}$$

■

Exemplo 8.5 Calcule $\int \frac{x+1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x$

Solução

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

■

Exemplo 8.6 Calcule

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$$

Solução Faça a substituição $u = \ln x$ ■

CLASSIFICAR

Aqui usamos a forma do integrando para decidir qual técnica especial que podemos utilizar, ou seja, a integração por partes, substituição, substituição trigonométrica, etc.

CLASSIFICAR

Se o integrando:

- For uma Função Racional: então a integração por frações parciais deve funcionar.
- For uma Função contendo

$$\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \sqrt{a^2 + x^2} \qquad \sqrt{x^2 - a^2}$$

  nesse caso uma substituição trigonométrica deve funcionar;
- For um produto de senos e cossenos, secantes e tangentes, ou cossecantes e cotangentes: então as estratégias apresentadas na seção de integração trigonométrica devem funcionar.
- For um polinômio vezes uma função trigonométrica, exponencial, ou logaritmo? Se assim for, então a integração por partes pode funcionar.
- Tem outras raízes que não aquelas listados acima: então a substituição $u = \sqrt[n]{g(x)}$ pode funcionar.

Exemplo 8.7 Classifique as seguintes integrais:

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4x^2 - 9}}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x^2\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\cos(8x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 2x + 1}\,\mathrm{d}x$

- ☐ $\displaystyle\int \operatorname{sen}(5x)\cos^4(5x)\ dx$
- ☐ $\displaystyle\int e^{3z}\cos(4z)dz$

Solução $\boxed{a}$ Como o integrando possui uma raiz $\sqrt{4x^2-9}$, que pode ser simplificada à $2\sqrt{x^2-9/4}$ uma boa escolha é fazer uma substituição trigonométrica. $\boxed{b}$ Nesse caso começamos com uma substituição $u = x^2$, e logo $\ du = 2x\ dx$ e após essa substituição a integral fica:

$$\int u \operatorname{sen} u\ du$$

que pode ser feita por partes. $\boxed{c}$ Essa integral é produto de senos e cossenos e pode ser convertida numa soma usando a relação:

$$2\operatorname{sen} a\ \cos b = \operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b)$$

$\boxed{d}$ Como a integral em questão envolve uma função racional com o grau do numerador maior que o denominador, a estratégia é fazer a divisão polinomial e usar integração por frações parciais. $\boxed{e}$ Integral Trigonométrica. $\boxed{f}$ A integral em questão pode ser feita por integrando por partes duas vezes. ■

Exemplo 8.8

$$\int x \ln x\ dx$$

Solução Por partes ■

MODIFICAR

Algumas integrais podem não se encaixar no esquema de classificação anterior, e nesse caso nós podemos desconhecer de forma adequada para resolvê-los. Uma maneira de abordar esses problemas é procurar similaridades entre estas integrais e outras integrais que sabemos como fazer. Se a forma de um problema difícil se assemelha a de um problema padrão, existem duas possibilidades. Poderíamos ser capazes de reduzir o problema difícil de que forma "padrão". Ou ainda, as técnicas que usaria no problema mais fácil pode nos ajudar a resolver o mais difícil. Observação: Existem problemas de integração que parecem muito semelhante a um problema solúvel, mas que sobre um exame mais minucioso, se mostram impossíveis de serem resolvidas utilizando as técnicas apresentadas neste livro.

Problemas Similares

- ◻ Procure por problemas fáceis similares ao que você está trabalhando.
- ◻ Tente reduzir o problema difícil de forma semelhante do problema fáceis.
- ◻ Tente as técnicas que você usaria no problema similar.

Algumas manipulações algébricas são bastante fáceis de serem utilizadas e valem a pena considerá-las automaticamente antes de tentar qualquer outra coisa. Por exemplo, nós quase sempre quebramos o integrando de uma soma em uma soma de integrais e depois integramos termo a termo. Antes de fazer isso, no entanto, devemos procurar outras alternativas. Uma operação que é mais complicada, mas que também vale a pena ser considerada é simplificar funções racionais pela divisão longa. Nós chamamos uma função racional (o quociente de dois polinômios) uma ”fração própria”se o grau do numerador é menor do que o grau do denominador. Frações próprias são geralmente mais fáceis de manipular do que as impróprias.

Exemplo 8.9 Calcule

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Multiplique o numerador e o denominador por $\sqrt{1-x}$.

Exemplo 8.10 Calcule

$$\cos\sqrt{x}\ \mathrm{d}x$$

Solução Faça a substituição $u = \sqrt{x}$ então $x = u^2$ e logo $\mathrm{d}x = 2u\ \mathrm{d}u$. Assim:

$$\cos\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = 2\int u\cos u\ \mathrm{d}u. \tag{8.81}$$

Por partes temos: ■

Exemplo 8.11 Calcule

$$\int \frac{2}{3+2x^2}\ \mathrm{d}x$$

Solução

$$\int \frac{2}{3+2x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x\right)^2}\ \mathrm{d}x \tag{8.82}$$

Fazendo a substituição $u = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$ ■

Caso nada disso funcione, tente:

- ☐ Racionalização;
- ☐ Uso de identidades trigonométricas
- ☐ Substituições ”inusitadas”
- ☐ Tente modificar a integral para produzir o termo você precisa.
- ☐ Tentar introduzir o termo que você precisa, e compensá-lo.

Exemplo 8.12 Calcule $\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\ \mathrm{d}x$.

Solução

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\ \mathrm{d}x \tag{8.83}$$

$$= \int \frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\ \mathrm{d}x \tag{8.84}$$

$$= \int \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x \tag{8.85}$$

$$= \int \sec^2 x - \operatorname{tg} x \sec x\ \mathrm{d}x \tag{8.86}$$

$$= \operatorname{tg} x - \sec x + C \tag{8.87}$$

■

Exercícios

Ex. 8.16 — Calcule:

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+3}}\ \mathrm{d}x$
2. $\int \operatorname{sen}(\ln t)\ \mathrm{d}x$
3. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$
4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+3}}\ \mathrm{d}x$
5. $\int \csc^6(2t)\ \mathrm{d}t$
6. $\int \frac{1}{4x^2+4x-3}\ \mathrm{d}x$
7. $\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2-2x}\ \mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x^2 \ \mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh} x}{1+\cosh x} \ \mathrm{d}x$

10. $\displaystyle\int e^{3z} \cos(4z) dz$

11. $\displaystyle\int \frac{4x^4+x+1}{x^5+x^4} \ \mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2(2t) \sec^4(2t) \ \mathrm{d}t$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2\sqrt{4x^2-9}}{\mathrm{d}x}$

14. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^2} \ \mathrm{d}x$

15. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^5(2x) \ \mathrm{d}x$

16. $\displaystyle\int \sqrt{y} \ln y \ \mathrm{d}y$

17. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x-2} \ \mathrm{d}x$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16x^2+9}} \ \mathrm{d}x$

19. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16x^2+9}} \ \mathrm{d}x$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16x^2+9}} \ \mathrm{d}x$

21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh} \ln x}{x} \ \mathrm{d}x$

22. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3x)\cos(8x) \ \mathrm{d}x$

Ex. 8.17 — Calcule:

1. $\displaystyle\int 2^{-\sqrt{x}} \ \mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x}{\sec x} \ \mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int \frac{e^{4t}}{(e^{2t}-1)^3} \ \mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+16}} \ \mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(x) \ \mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x)\cos(8x) \ \mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(x) \ \mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int \sec^2(x) \ \mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int \sec^3(x) \ \mathrm{d}x$

10. $\displaystyle\int \sec^5(x) \ \mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos 2x \ \mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2+3x+2} \ \mathrm{d}x$

13. $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+1}{x^3-x} \ \mathrm{d}x$

Capítulo

9

Aplicações da Integral

Neste capítulo vamos mostrar como somas de Riemann e integrais definidas surgem nos mais diversos problemas tais como encontrar o volume e a área de superfície de um sólido, encontrar o comprimento de uma curva plana, calcular o trabalho realizado por uma força, encontrar o centro de a gravidade de uma região plana, encontrar a pressão e a força, etc.

Neste capítulo:

9.1 Construção de Fórmulas Integrais

Considere uma função f limitada e contínua por partes em $[a, b]$ e uma partição em n subintervalos igualmente espaçados

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b.$$

Deixe $\Delta x = (b - a)/n$ denotar o comprimento do subintervalo, e deixe c_i ser um valor no i-ésimo subintervalo. A soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

é denominada *Soma de Riemann*. As somas de Riemann podem ser utilizadas para aproximar algumas quantidades como áreas, volumes, trabalho, pressão, etc. Para uma função limitada e contínua por partes pelo Teorema 7.3 a aproximação torna-se exata tomando o limite das somas de Riemann obtendo a integral definida:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Este capítulo emprega essa técnica para uma variedade de aplicações. Suponha que o valor Q de uma quantidade deve ser calculada. Primeiramente aproximaremos o valor de Q utilizando uma soma de Riemann, em seguida, encontraremos o valor exato através de uma integral definida. Nós resumimos essa técnica no seguinte quadro

Aplicação da Estratégia de Integrais Definidas

Deixe uma quantidade Q cujo valor deve ser computado.

1. Divida a quantidade em n "subquantidades" menores de valores Q_i.
2. Identifique a variável x e a função $f(x)$d e tal forma que cada subquantidade pode ser aproximada com o produto $f(c_i)\Delta x$, onde Δx representa uma pequena mudança em x. Assim $Q_i \approx f(c_i)\ \mathrm{d}x$.
3. Reconheça que $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$, que é uma soma de Riemann.
4. Tomando os limites apropriados temos $Q = \displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$

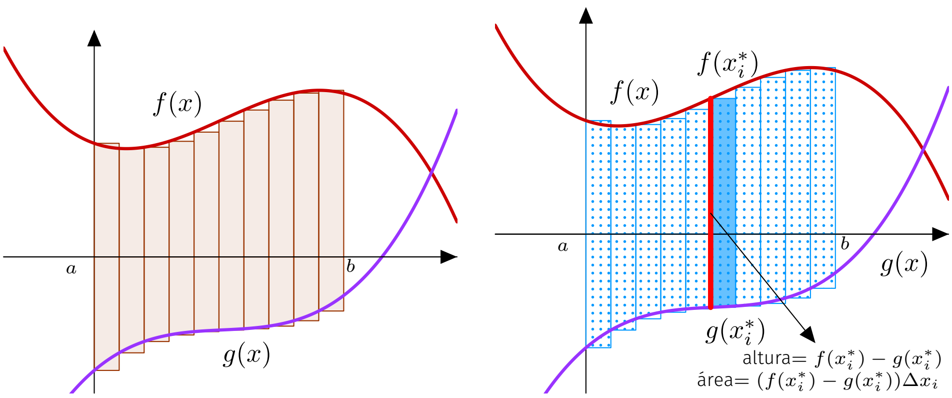
9.2 Áreas

9.2.1 Área entre duas curvas

Sejam f e g funções continuas em $[a, b]$ tais que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ então $f(x) - g(x)$ é continua em $[a, b]$ e $f(x) - g(x) \geq 0$ Considere $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ em subintervalos de igual comprimento, então a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i^\star) - g(x_i^\star)\right) \Delta x_i$$

é uma aproximação para a área entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$. Como a



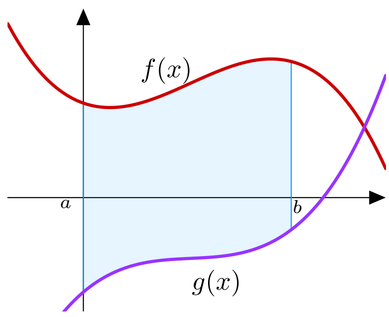


Figura 9.1 Área entre duas curvas.

Aproximação da área entre duas curvas por retângulos.

função $f(x) - g(x)$ é continua em $[a, b]$, temos que o limite da soma de Riemann acima existe. Agora, como $f - g$ é não negativa em $[a, b]$ é natural definir a área entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$, denotada por $A(f, g)$, como sendo

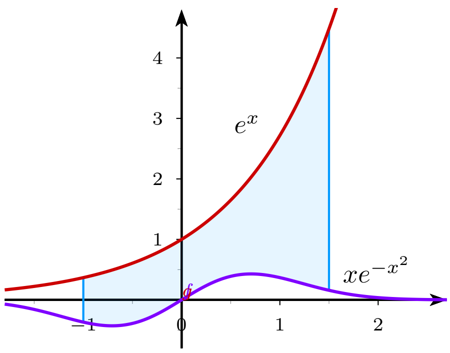
$$A(f,g) = \int_a^b (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x.$$

9.1 **Teorema 2. : Área entre Curvas**

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em $[a, b]$ com $f(x) \geq g(x)$ para todo x in $[a, b]$. A área da região limitada pela funções $y = f(x)$, $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$ é

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\ \mathrm{d}x.$$

Exemplo 9.2 Calcule a área da região limitada por de $y = xe^{-x^2}$ e $y = e^x$ e $x = -1$ e $x = 1$.



Solução Como $e^x > xe^{-x^2}$ temos que a área é dada por:

$$A = \int_{-1}^{1} e^x - xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x \tag{9.1}$$

$$= \int_{-1}^{1} e^x\ \mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x \tag{9.2}$$

Fazendo a substituição $u = -x^2$ na segunda integral

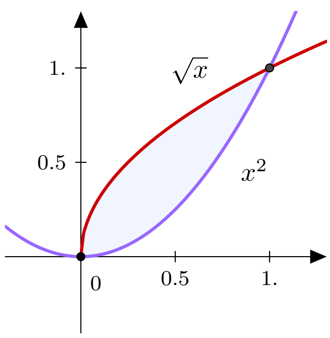
$$= \int_{-1}^{1} e^x\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^u\ \mathrm{d}u \tag{9.3}$$

$$= \left(e^x + \frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Big|_{-1}^{1} \tag{9.4}$$

$$= e - \frac{1}{e} \tag{9.5}$$

■

Exemplo 9.3 Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.



Solução Primeiramente determinaremos os pontos nos quais as curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt(x)$ se interceptam. Igualando as equações temos que $x^2 = \sqrt(x)$, e resolvendo temos que as curvas se interceptam em $x = 0$ e $x = 1$. Observamos que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ para todo $x \in [0, 1]$. Consequentemente a área é dada pela integral:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

■

Exemplo 9.4 Mostre que a área do círculo de raio r é πr^2

Solução A área do círculo com o raio r pode ser calculado pela integral

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2})\ \mathrm{d}x = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ \mathrm{d}x$$

Para calcular a integral, faremos a substituição: $x = r \operatorname{sen}\theta$ e assim $dx = r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$. Esse é um exemplo de Substituição Trigonométrica que será estudada detalhadamente em 8.4. Com essa substituição temos que: $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right)$

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ \mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} \cdot r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{9.6}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{9.7}$$

$$= \frac{r^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{9.8}$$

$$= \frac{r^2}{2}\left(\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) \tag{9.9}$$

$$= \frac{\pi r^2}{2} \tag{9.10}$$

■

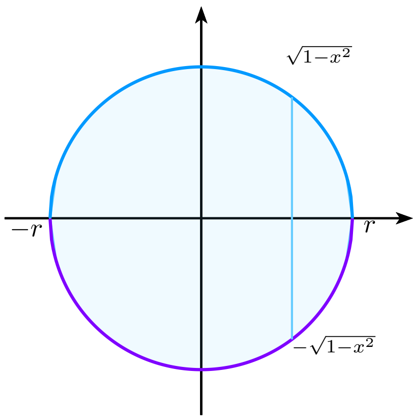


Figura 9.3 Área do Círculo

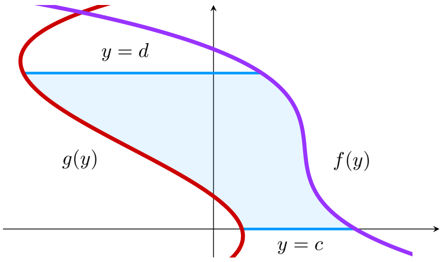
9.2.2 Integrando em Relação a y

Em diversas situações é mais fácil calcular a área da região integrando com respeito a y ao invés de integrar em relação a x. Considere, por exemplo, a região R delimitada pelos gráficos de $x = f(y)$ e $x = g(y)$, onde $f(y) \geq g(y)$, e as linhas horizontais $y = c$ e $y = d$. Nesse caso podemos mostrar que

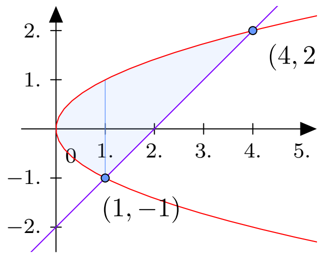
9.5 Teorema 2. : Área entre Curvas

Sejam $f(y)$ e $g(y)$ funções contínuas em $[c, d]$ com $f(y) \geq g(y)$ para todo y in $[a, b]$. A área da região limitada pela funções $x = f(y)$, $x = g(y)$ e as retas $y = c$ e $y = d$ é

$$\int_c^d (f(y) - g(y))\ \mathrm{d}y.$$



Exemplo 9.6 Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $y = x - 2$ e $x = y^2$



Solução Começaremos calculando a intersecção das duas curvas: Igualando as equações temos $x = y + 2 = y^2$ e logo $y^2 - y - 2 = 0$. Assim as curvas se interceptam em $y = -1$ e $y = 2$.

Integrando em relação a y temos:

$$A = \int_{-1}^{2} (y+2) - y^2 \; dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} = \frac{9}{2} \right] \tag{9.11}$$

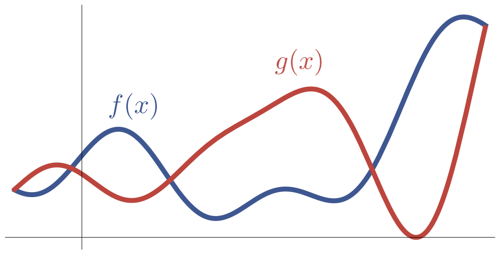
Também podemos calcular integrando em relação a x. Nesse caso precisamos dividir a região em duas

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^1 \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) \; dx = 2 \int_0^1 \sqrt{x} \; dx \\
&= 2 \left[\frac{2}{3} \sqrt{x}^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \\
A_2 &= \int_1^4 \sqrt{x} - (x-2) \; dx = \int_1^4 \sqrt{x} - x + 2 \; dx \\
&= \left[\frac{2}{3} \sqrt{x}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 + 2x \right] \Big|_1^4 = \frac{19}{6} \\
A &= A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

■

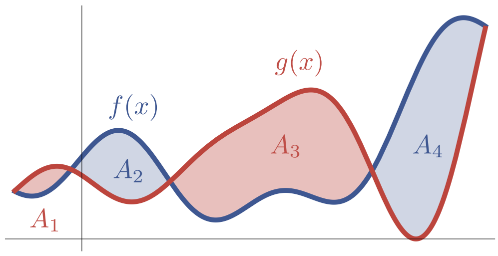
9.2.3 Curvas que se Entrelaçam

Nesse caso queremos determinar a área de uma região R entre duas funções f e g tais que o gráfico de f situa-se acima do gráfico de g para alguns valores de x ($f(x) > g(x)$) e encontra-se abaixo para outros valores de x ($f(x) < g(x)$).

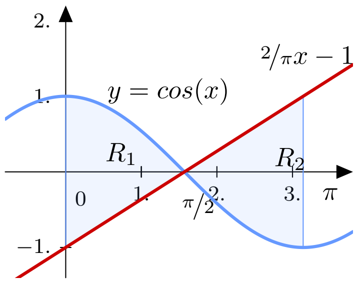


Nesse caso, a estratégia para determinar a área da região R é que dividi-la em sub-regiões cada uma descrita por uma única condição:

- ou $f(x) \geq g(x)$
- ou $f(x) \leq g(x)$.



Exemplo 9.7 Encontre a área da região R limitada pelos gráficos de $y = \cos x$ e $y = \dfrac{2}{\pi}x - 1$ e as retas verticais $x = 0$ e $x = \pi$.



Solução

$$A_1 = \int_0^{\pi/2} [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x \qquad \text{f(x)>g(x)} \tag{9.12}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\cos x - \left(\frac{2}{\pi}x - 1\right)\right]\ \mathrm{d}x \quad = \left[\operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi}x^2 + x\right]\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4+\pi}{4} \tag{9.13}$$

e

$$A_2 = \int_0^{\pi/2} [g(x) - f(x)]\ \mathrm{d}x \qquad \text{g(x)>f(x)} \tag{9.14}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{2}{\pi}x - 1 - \cos x\right]\ \mathrm{d}x \qquad = \left[\frac{2}{\pi}x^2 - x - \operatorname{sen} x\right]\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{4+\pi}{4} \tag{9.15}$$

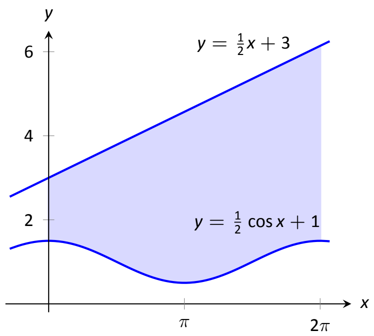
Assim a área total é

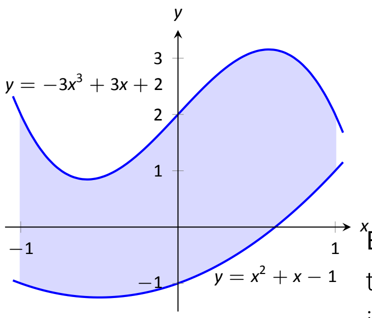
$$A = A_1 + A_2 = 2 + \frac{\pi}{2}$$

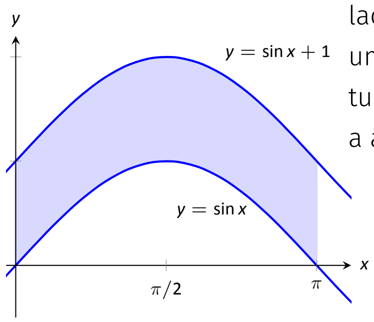
■

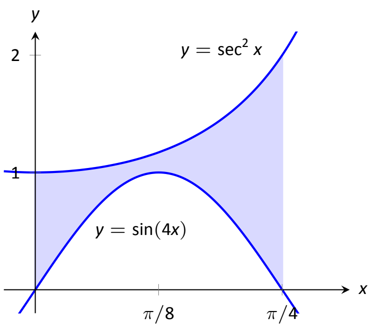
Exercícios

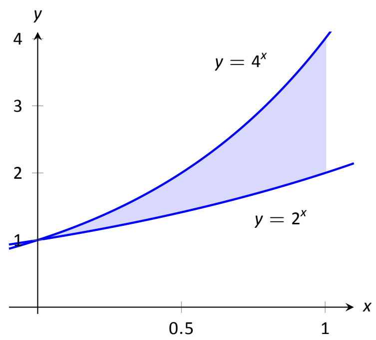
Ex. 9.1 — Nos Exercícios 1 a 7, encontre a área da região sombreada no gráfico dado .

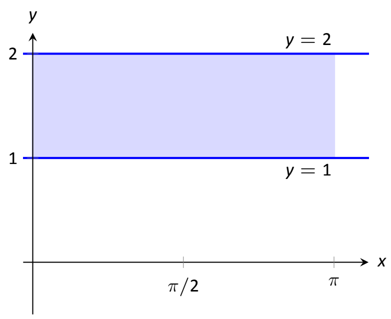
1.


2.


3.


4.


5.


6.


Ex. 9.2 — Esboce a região delimitada pelas curvas e decida se a integração deve ser feito com relação a variável x ou y. Desenhe um retângulo típico com sua altura e largura. Finalmente ache a área da região.

1. $y = x + 1, \quad y = 9 - x^2, \quad x = -1, \quad x = 2$
2. $y = \text{sen}(x), \quad y = x^2$
3. $y = x^2, y = x^4$
4. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad x + y = 1$
5. $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$
6. $x = 2y^2 \quad x + y = 1$
7. $y = cos(x)y = 1 - 2x/\pi$
8. $y = \text{sen}(\pi x) \quad y = x^2 - x \quad x = 2$

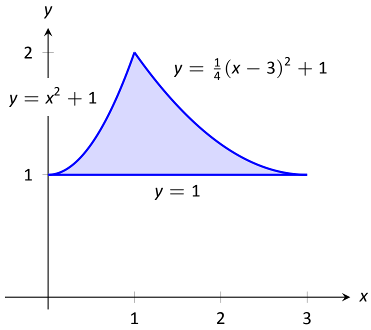
9. $y = \sec^2(x)$ $y = \cos(x)$, $x = -\dfrac{-\pi}{3}$ $x = -\dfrac{\pi}{3}$

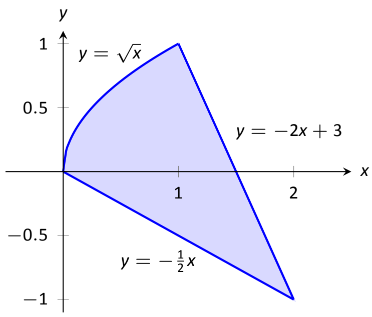
Ex. 9.3 — Ache a área da região delimitada pela parábola $y = x^2$ a reta tangente a está parábola no ponto $(1, 1)$ e o eixo x.

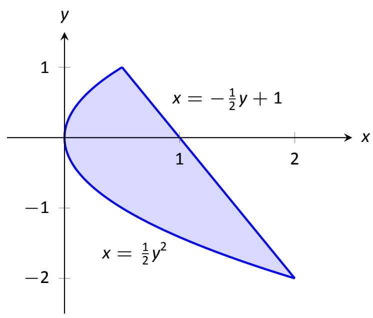
Ex. 9.4 — Ache o número b tal que a reta $y = b$ divida a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$ em duas regiões de áreas iguais.

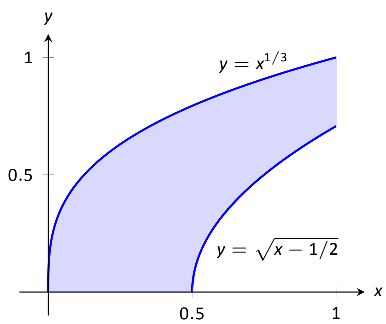
Ex. 9.5 — Determine c para que a área da região delimita pelas parábolas $y = x^2 - c^2$ e $y = c^2 - x^2$ seja 576.

Ex. 9.6 — Nos próximos itens encontre a área da região delimitada pelas funções de duas maneiras: 1. tratando os limites como funções de x, e 2. tratando os limites como funções de y.

1. 

2. 

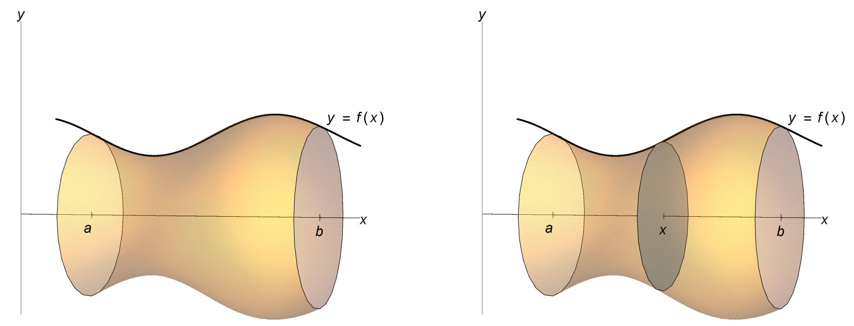
3. 

4. 

9.3 Volume

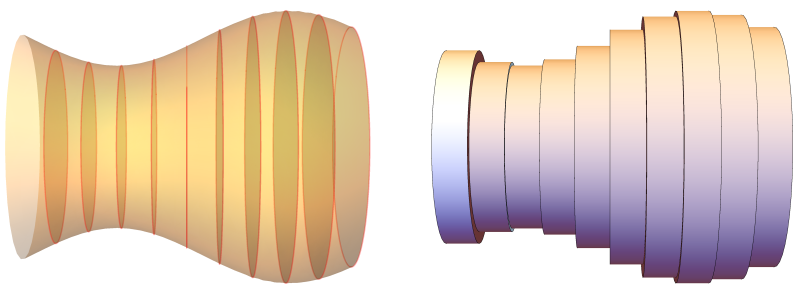
9.3.1 Secções Transversais

Seja S um sólido limitado pelos planos $x = a$ e $x = b$, como o primeiro da Figura 9.7. Quando interceptamos o sólido S com um plano, obtemos uma região plana que é denominada de **secção transversal** de S. Na segunda imagem da figura 9.7 apresentamos uma seção transversal de S.



Sólido S é uma seção transversal do mesmo.

Denotaremos por $A(x)$ a área de secção transversal perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x com $x \in [a, b]$. Para calcular o volume consideraremos uma partição $P = (x_i)$ de $[a, b]$. Vamos dividir o sólido S em n fatias utilizando os planos $P_{x_1}, \cdots, P_{x_{n-1}}$. Essa divisão do sólido em fatias é apresentada na Figura ??. Escolhemos então pontos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ e consideraremos a seção transversal passando por x_i^*, temos que o volume da i-ésima fatia S_i pode ser aproximado pelo volume do cilindro reto com base a seção passando por x_i^* e altura Δx_i. A aproximação por cilindros é apresentada na Figura ??. Como a



(a) Fatias do sólido

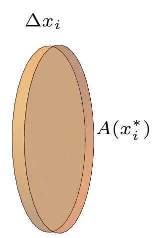
(b) Aproximação do sólido por cilindros

área da base de cada um dos cilindro é $A(x_i^*)$ e sua altura Δx_i, uma aproximação para o volume da i-ésima fatia S_i é

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x_i.$$

Somando os volumes destas fatias obtemos uma aproximação para o volume total

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i.$$



Fazendo o tamanho da partição tender a zero, $|P| \to 0$, temos:

$$V = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x_i = \int_a^b A(x) \, dx.$$

9.1 **Teorema 3. :** Volume por Seções Transversais

Seja S o sólido limitado por planos que são perpendiculares ao eixo x em $x = a$ e $x = b$. Se a área da seção transversal é $A(x)$ para $x \in [a, b]$, com A contínua, então o volume de S é

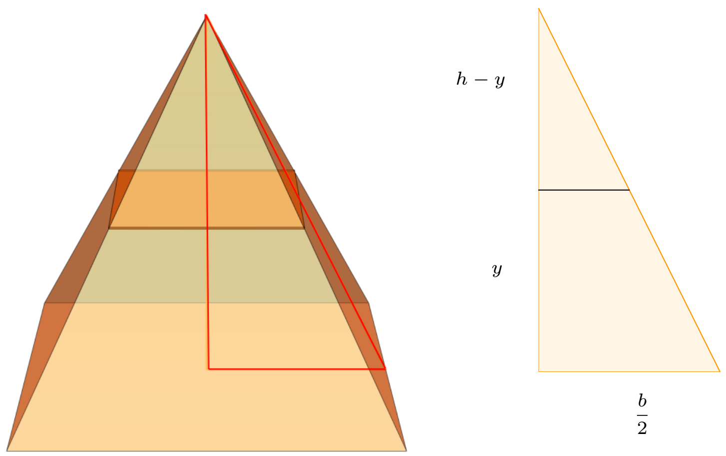
$$V = \int_a^b A(x) \, dx.$$

Exemplo 9.2 Determine o volume de uma pirâmide com uma base quadrada do comprimento do lado l e uma altura de h. Uma fatia da pirâmide é um quadrado de lados $2x$. Por semelhança de triângulos temos:

$$\frac{x}{\frac{b}{2}} = \frac{h-y}{h}$$

e logo

$$x = \frac{b}{2h}h - y$$



Solução Logo a área da seção transversal é:

$$A(y) = (2x)(2x) = 4x^2 = \frac{b^2}{h^2}(h - y^2)^2$$

Como a piramide está entre os planos $y = 0$ e $y = h$ temos que o volume é dado pela integral:

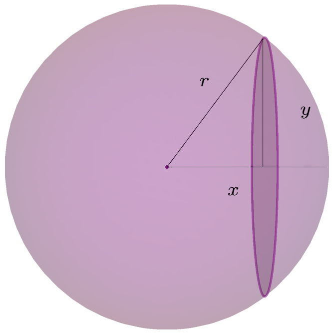
$$V = \int_0^h A(y)\ \mathrm{d}y = \int_0^h \frac{b^2}{h^2}(h-y^2)^2\ \mathrm{d}y \tag{9.16}$$

$$= \left[\frac{b^2}{3h^2}(h-y^2)^3\right]\Big|_0^h = \frac{1}{3}b^2 h \tag{9.17}$$

■

Exemplo 9.3 Mostre que o volume da esfera de raio r é $\dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Solução A seção transversal da esfera por x é um círculo de raio $R(x)$. Pelo Teorema de Pitágoras temos que $R(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Logo o volume é dado por



$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\ \mathrm{d}x \tag{9.18}$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right)\ \mathrm{d}x \tag{9.19}$$

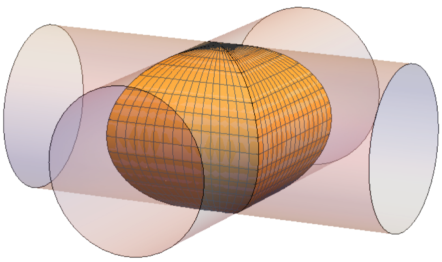
$$= \pi\ r^2 x - \pi\frac{x^3}{3}\Big|_{x=-r}^{x=r} \tag{9.20}$$

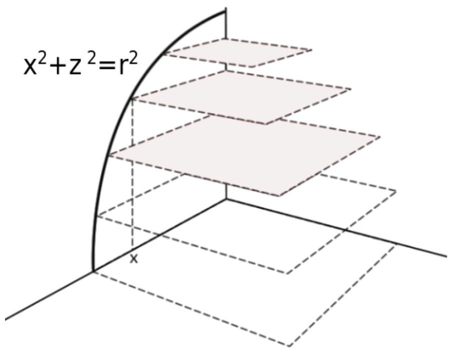
$$= \left(\pi r^3 - \pi\frac{r^3}{3}\right) - \left(\pi\left(-r^3\right) + \pi\frac{-r^3}{3}\right) \qquad = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 \tag{9.21}$$

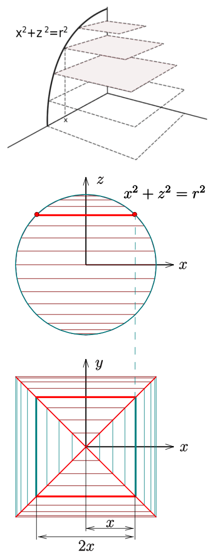
$$= \frac{4\pi r^3}{3} \tag{9.22}$$

■

Exemplo 9.4 [Sólido de Steinmetz] Calcule o Volume da região delimitada pela intersecção de dois cilindros, ambos de raio r, se os eixos dos cilindros são perpendiculares.







Solução Uma seção vertical do sólido de é um quadrado de lado x. Uma vez que o sólido é obtido a partir da intersecção de dois cilindros de raio r, a largura do quadrado x e a altura z são relacionadas por

$$x^2 + z^2 = r^2$$

Desta forma área do quadrado é $A = 4x^2$ que pode ser expressa em termos de z como z:

$$A(z) = 4x^2 = 4(r^2 - z^2)$$

O método de integração por fatias cilíndricas fornece então que o volume é dado por

$$V = \int_{-r}^{r} A(z)dz = 4\int_{0}^{r}(r^2 - z^2)dz = 4\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r}$$
$$= 8\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{16}{3}r^3$$

■

9.3.2 Sólidos de Revolução

Um caso particular importante no qual podemos utilizar o método das seções transversais ocorre quando o solido S é obtido por rotação, *em torno do eixo* x, da região

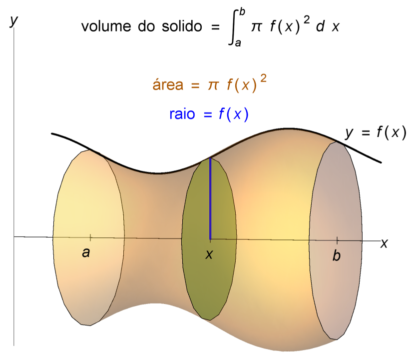
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

Nesse caso temos que a área da seção transversal passando por x é

$$A(x) = \pi[f(x)]^2.$$

Consequentemente, temos que o **volume do sólido S obtido por rotação, em torno do eixo x, do conjunto A** é

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 \; \mathrm{d}x.$$



Método dos Discos

Deixe S ser o sólido obtido rotacionando a região $y = f(x)$ de $x = a$ até $x = b$ ao redor do eixo x. O volume do sólido S é dado por

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x.$$

Exemplo 9.5 Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região sob a curva $y = \sqrt{x}$ de 0 até 4.

Solução Quando fatiamos o sólido por um plano perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto x, obtemos um disco de raio $\sqrt{x}$. Logo a área da secção transversal é

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x.$$

Portanto, o volume do sólido é

$$V = \int_0^4 A(x) \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^4 x \, \mathrm{d}x = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi.$$

■

De modo similar, para determinar o volume de um sólido obtido com a rotação, em torno do eixo y, de uma região compreendida entre o eixo y e a curva $x = f(y), c \leq y \leq d$, observamos que a secção transversal é um circulo de área $A(y) = \pi[f(y)]^2$ e consequentemente o volume é dado por

$$V = \int_c^d A(y)dy.$$

Exemplo 9.6 Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região compreendida entre o eixo y e a curva $x = \dfrac{2}{y}, 1 \leq y \leq 4$.

Solução O volume é

$$V = \int_1^4 A(y)dy = \pi \int_1^4 \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = 4\pi \left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_1^4 = 3\pi.$$

■

Exemplo 9.7 Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região compreendida entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 2x$ no primeiro quadrante.

Solução A reta e a parábola se cortam em $y = 0$ e $y = 4$, portanto os limites de integração são $c = 0$ e $d = 4$. O volume pode ser expresso então como

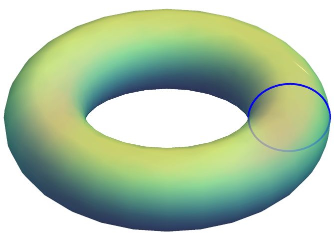
$$V = V_1 - V_2$$

Onde V_1 e V_2 são os volumes dos sólidos obtidos pela rotação, em torno do eixo y, das curvas $R(y) = \sqrt{y}$ e $r(y) = \dfrac{y}{2}$, respectivamente. Assim,

$$V_2 = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy = 8\pi \qquad V_1 = \pi \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy = \frac{\pi 16}{3}.$$

Portanto, $V = 8\pi - \dfrac{16\pi}{3} = \dfrac{8\pi}{3}$. ■

Exemplo 9.8 Deduza a fórmula do volume do toro obtido ao girarmos o círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ em torno do eixo x.



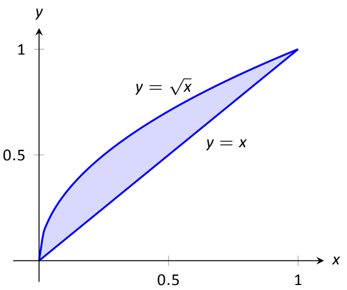
Solução A região é delimitada superiormente por $y = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ e inferiormente por $y = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ com $x \in [-r, r]$. Assim, definindo $K = \sqrt{r^2 - x^2}$, o volume do toro é dado pela integral

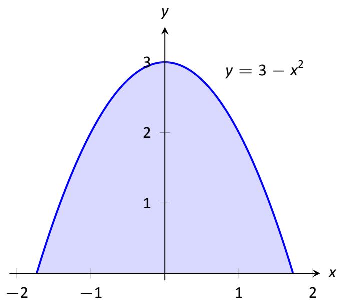
$$\int_{-r}^{r} \pi[(R+K)^2 - (R-K)^2]\ \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} 4\pi RK\ \mathrm{d}x = 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ \mathrm{d}x.$$

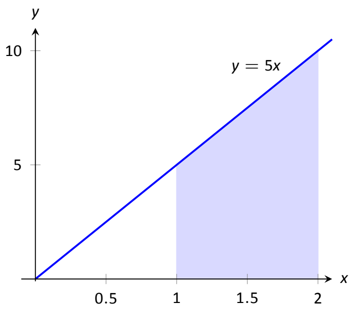
Como $\displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ \mathrm{d}x$ é metade da área do círculo de raio r, esta integral vale $\dfrac{\pi r^2}{2}$. Assim o volume do toro é $4\pi R \dfrac{\pi r^2}{2} = (2\pi R)(\pi r^2)$. ■

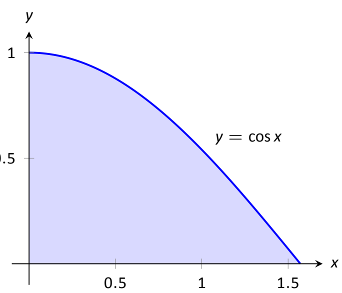
Exercícios

Ex. 9.7 — Nos Exercícios 1 - 4, uma região do plano cartesiano é sombreada. Use o método das seções transversais para encontrar o volume do sólido de revolução formado pela rotação da região em torno do eixo x.

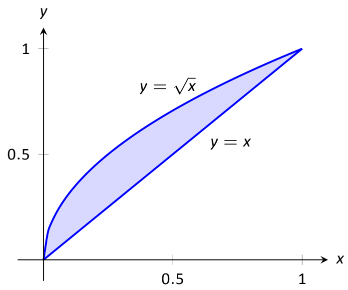
1.


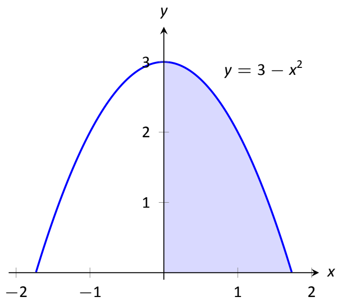
2.


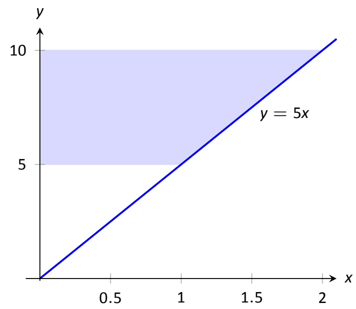
3.


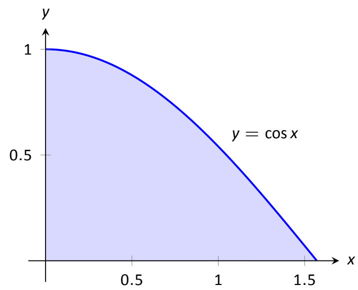
4.


Ex. 9.8 — Nos Exercícios 1 - 4, uma região do plano cartesiano é sombreada. Use o método das seções transversais para encontrar o volume do sólido de revolução formado pela rotação da região em torno do eixo y.

1.


2.


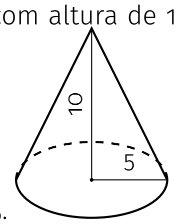
3.


4.


Ex. 9.9 — Nos próximos itens, uma região do plano cartesiano é descrita. Encontre o volume do sólido de revolução formado pela rotação da região em torno de cada um dos eixos dados.

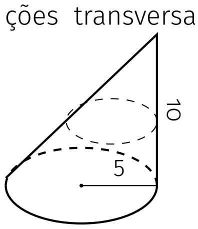
1. Região limitada por: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$. Rotacionada em torno:
   - 1 o eixo x
   - 2 $y = 1$
   - 1 o eixo y
   - 2 $x = 1$
2. Região limitada por: $y = 4 - x^2$ e $y = 0$. Rotacionada em torno:
   - 1 o eixo x
   - 2 $y = 4$
   - 1 $y = -1$
   - 2 $x = 2$
3. O triângulo de vértices $(1, 1)$, $(1, 2)$ e $(2, 1)$. Rotacionada em torno:
   - 1 do eixo x
   - 2 de $y = 2$
   - 1 do eixo y
   - 2 de $x = 1$
4. Região limitada por $y = x^2 - 2x + 2$ e $y = 2x - 1$. Rotacionada em torno:
   - 1 o eixo x
   - 2 $y = 1$
   - 1 $y = 5$
5. Região limitada por $y = 1/\sqrt{x^2 + 1}$, $x = -1$, $x = 1$ e o eixo x. Rotacionada em torno:
   - 1 do eixo x
   - 2 de $y = 1$
   - 1 de $y = -1$
6. Região limitada por $y = 2x$, $y = x$ e $x = 2$. Rotacionada em torno:
   - 1 do eixo x
   - 2 $y = 4$
   - 1 do eixo y
   - 2 $x = 2$

Ex. 9.10 — Um cone circular reto com altura de 10 e raio da base

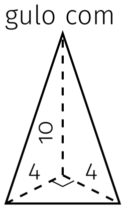


5.

Ex. 9.11 — Um cone circular inclinado com altura de 10 e raio de base de 5. (Dica: todas as seções transversais são círculos).

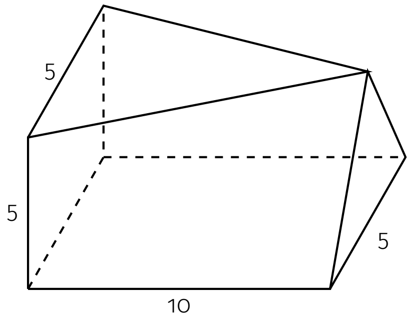


Ex. 9.12 — Um cone triangular reto com altura de 10 e cuja base é um triângulo isósceles retângulo com comprimento lateral 4.



Ex. 9.13 — Um sólido com comprimento 10 com uma base retangular e um topo triangular, em que uma extremidade é um quadrado com comprimento la-

teral 5 e a outra extremidade é um triângulo com base e altura 5.



9.3.3 Cascas Cilíndricas

Considere o sólido S obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada por $y = f(x)$, onde $f(x) \geq 0$, e pelas retas $y = 0, x = a$ e $x = b$. Seja $P = (x_i)$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e seja $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ o

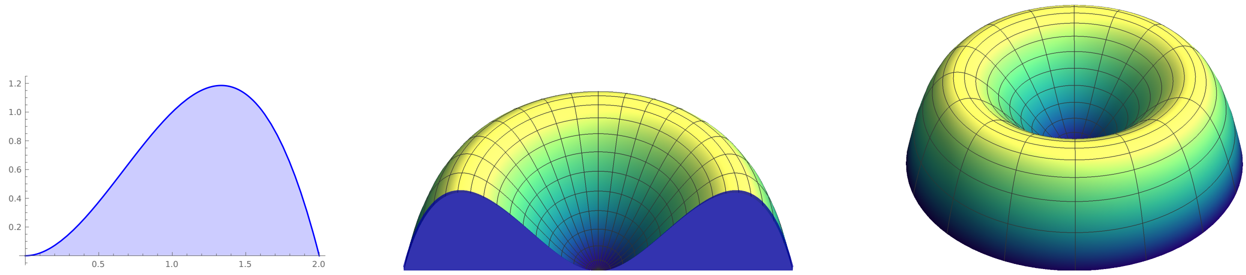


Figura 9.6 Sólido S obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada por $y = f(x)$

ponto médio do i-ésimo intervalo, $x_i^* = (x_i + x_{i-1})/2$. Se o retângulo com base $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$ e altura $f(x_i^*)$ é girado ao redor do eixo y, então o resultado é uma casca cilíndrica cujo volume é

$$V_i = (2\pi x_i^*) f(x_i^*) \Delta x_i = \text{[circunferência][altura][espessura]}.$$

Portanto uma aproximação para o volume V de S é dada pela soma

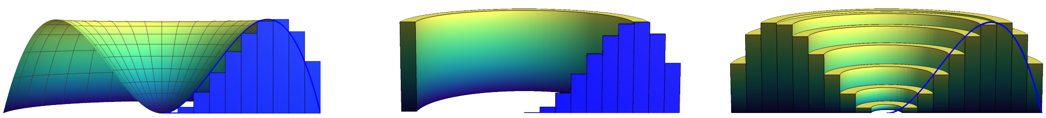


Figura 9.7 Volume

dos volumes dessas seções:

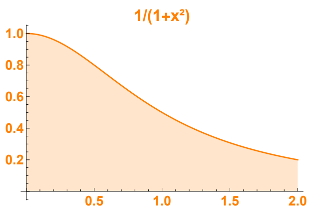
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} (2\pi x_i^*) f(x_i^*) \Delta x_i.$$

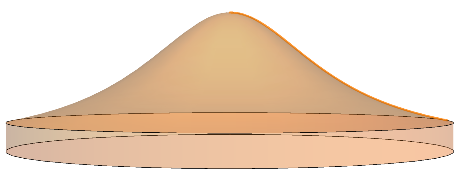
Esta aproximação torna-se melhor quando $|P| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$. Então definimos o **volume do sólido S obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada por $y = f(x)$, onde $f(x) \ge 0, y = 0, x = a$ e $x = b$** por

$$V = 2\pi \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i^* f(x_i^*) \Delta x_i = 2\pi \int_a^b x f(x) \ \mathrm{d}x.$$

> **9.9 Teorema 3. : Cascas Cilíndricas**
>
> Deixe S ser o sólido obtido rotacionando a região $y = f(x)$ de $x = a$ até $x = b$ ao redor de um eixo y. O volume do sólido é
>
> $$V = 2\pi \int_a^b r(x)h(x) \ \mathrm{d}x.$$

Exemplo 9.10 Encontre o volume do sólido formado pela rotação da região limitada por $y = 0$, $y = 1/(1 + x^2)$, $x = 0$ e $x = 2$ ao redor do eixo y-axis.





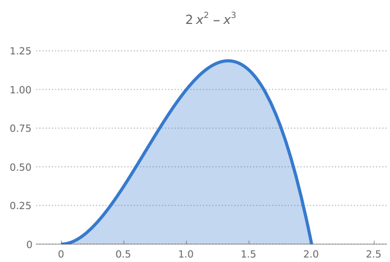
Solução Nesse caso temos que o raio da casca cilíndrica é $r(x) = x$ e a altura é $y = 1/(1+x^2)$. Como a região é limitada pelos planos $x = 0$ e $x = 1$, temos que o volume é dado por

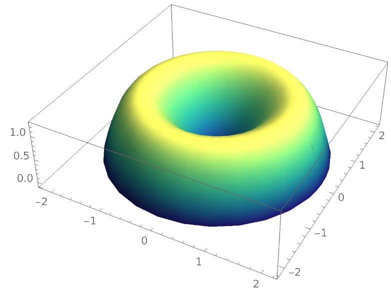
$$V = 2\pi \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} \ \mathrm{d}x.$$

Fazendo a substituição $u = 1 + x^2$, temos $du = 2x \ \mathrm{d}x$. Além disso $u(0) = 1$ e $u(1) = 2$.

$$\begin{aligned} &= \pi \int_1^2 \frac{1}{u} \, du \\ &= \pi \ln u \Big|_1^2 \\ &= \pi \ln 2 \approx 2.178 \end{aligned}$$

■





Exemplo 9.11 Determine o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada por $y = 2x^2 - x^3$ e $y = 0$.

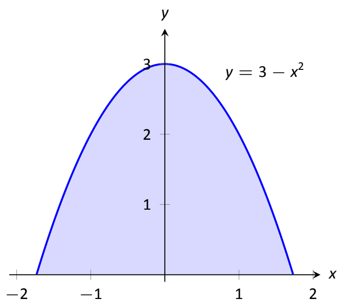
Solução A função $2x^2 - x^3$ intercepta o eixo x em $x = 0$ e $x = 2$. Logo podemos expressar o volume como:

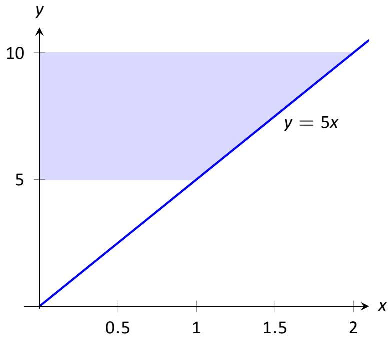
$$V = 2\pi \int_0^2 x f(x)\ \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3)\ \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\ \mathrm{d}x = 2\pi(8 - \frac{32}{5}) = \frac{16}{5}\pi.$$

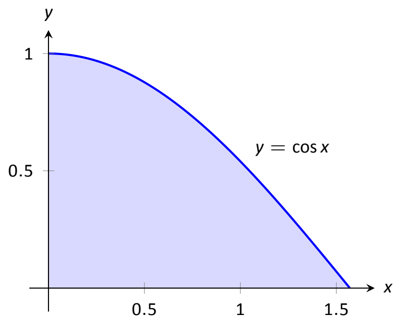
■

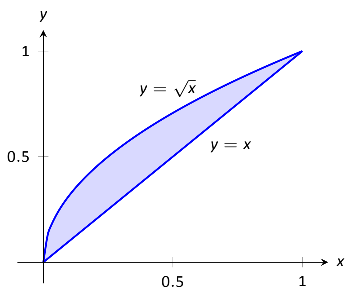
Exercícios

Ex. 9.14 — Nos Exercícios a seguir uma região do plano cartesiano é sombreada. Use o método das cascas cilindrícas para encontrar o volume do sólido de revolução formado pela rotação da região sobre o eixo x.

1. 

2. 

3. 

4. 

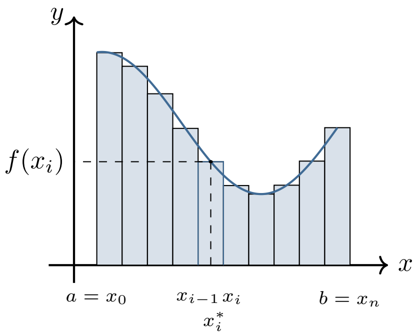
9.4 Trabalho

Nesta seção, vamos definir trabalho realizado por uma força que depende da posição. Começamos lembrando que no caso de uma força constante F, o trabalho realizado ao mover um objeto sob ação dessa força é definido pelo produto da força pelo deslocamento d:

$$\tau = Fd, \qquad \text{trabalho = força} \times \text{distância.}$$

Agora consideremos o deslocamento de uma partícula de $x = a$ até $x = b$ com $a < b$ e suponhamos que a força dependa da posição, isto é, $F = F(x)$, e que a força seja contínua no intervalo $[a, b]$. Considere então $P = (x_i)$ uma partição do intervalo $[a, b]$ com marcas $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Se o tamanho do i-ésimo intervalo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ for suficientemente pequeno, F será praticamente constante nesse intervalo, e então o trabalho realizado pela força de x_{i-1} até x_i é aproximadamente

$$\tau_i = f(x_i^*)\Delta x_i.$$



Logo podemos aproximar o trabalho realizado por F de a até b pela soma dos trabalhos realizados nos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é

$$\tau \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Fazendo o tamanho dos intervalos diminuir a aproximação será melhor, o que nos motiva a definir *trabalho* como segue.

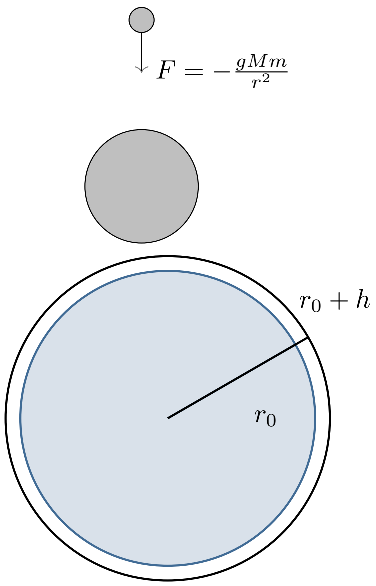
9.1 Definição 4.

O **trabalho** τ realizado por uma força F sobre uma partícula no deslocamento de $x = a$ até $x = b$ é dado por

$$\tau = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \int_a^b F(x)\ \mathrm{d}x.$$

Exemplo 9.2 Quanto trabalho é feito ao lançarmos verticalmente um corpo de massa m kg a partir do superfície da terra para uma órbita de altura h m acima da superfície? Utilize que a força da gravidade exercida por uma massa M em outra massa m é dada por

$$F = \frac{-GMm}{r^2}$$



Solução

$$W = \int_{r_0}^{r_1} \frac{-GMm}{r^2}\, dr,$$

onde r_0 é o raio da Terra e $r_1 = r_0 + h$ Assim o trabalho é dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_0}^{r_1} \frac{-GMm}{r^2}\, dr \\ &= \frac{GMm}{r}\Big|_{r_0}^{r_1} \\ &= \frac{GMm}{r_1} - \frac{GMm}{r_0} \\ &= \frac{GMm}{r_0 + h} - \frac{GMm}{r_0} \end{aligned}$$

■

Exemplo 9.3 [Calculando o Trabalho] Uma corda de escalada de 60m está pendurada na beira de um precipício Quanto trabalho é realizado ao puxar a corda até o topo. Considere que a corda tem uma massa de 66g/m,

Solução Denote por x a quantidade de corda puxada, desta forma a quantidade de corda ainda dependurada é de $60 - x$. Como cada metro de corda tem uma massa de 66 g, ou $0,066$ kg. A massa da corda ainda pendurado é $0,066(60 - x)$ kg; multiplicando esta massa pela aceleração da gravidade, de $9,8m/s^2$, temos uma força variável descrita por

$$F(x) = (9,8)(0,066)(60 - x) = 0,6468(60 - x).$$

Assim, a quantidade total de trabalho em puxar a corda é

$$W = \int_0^{60} 0,6468(60x)\ \mathrm{d}x = 1,164.24\text{J}.$$

■

Exemplo 9.4 [Relação entre Trabalho e Energia Cinética] Uma partícula de massa m desloca-se sobre o eixo x com função de posição $x = x(t)$, com $x_0 = x(t_0)$ e $x_1 = x(t_1)$. Suponha que $x(t)$ seja 2 vezes diferenciável em $[t_0, t_1]$ e que a força $f(x)$ seja contínua em $[x_0, x_1]$. Seja $v = v(t)$ a função que descreve a velocidade da partícula, com $v_0 = v(t_0)$ e $v_1 = v(t_1)$. Mostre que o trabalho realizado pela resultante de x_0 até x_1 é igual à variação na energia cinética, isto é,

$$\tau = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Solução A posição é dada por $x = x(t)$. Logo $\mathrm{d}x = x'(t)\ \mathrm{d}t$. Como $x_0 = x(t_0)$ e $x_1 = x(t_1)$, então para $x = x_0, t = t_0$ e, para $x = x_1, t = t_1$.

Assim

$$\tau = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} f(\underbrace{x(t)}_{x})\underbrace{x'(t)\ \mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x} = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t))v(t)\ \mathrm{d}t. \quad (9.23)$$

Pela 2ª Lei de Newton, temos

$$f(x(t)) = m \cdot a(t), \quad (9.24)$$

onde $a = a(t)$ é a aceleração da partícula no instante t. Fazendo a mudança de variável $v = v(t), dv = v'(t)\ \mathrm{d}t = a(t)\ \mathrm{d}t$, para $t = t_0, v = v_0$ e para $t = t_1, v = v_1$; portanto, de 9.23 e 9.24,

$$\tau = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\ \mathrm{d}x = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t))v(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} ma(t)v(t)\ \mathrm{d}t = m\int_{t_0}^{t_1} \underbrace{v(t)}_{v}\underbrace{a(t)\ \mathrm{d}t}_{dv}$$

$$= m\int_{v_0}^{v_1} vdv = m\frac{v^2}{2}\bigg|_{v_0}^{v_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

■

Molas e a Lei de Hooke

A Lei de Hooke afirma que a força necessária para comprimir ou esticar uma mola x unidades a partir de seu comprimento natural é proporcional a x; isto é, essa força é $F(x) = kx$ para alguma constante k. Por exemplo, se uma força de 1 N se estende a uma mola de 2 cm, então uma força de 5 N alongará a mola em 10 cm. Convertendo as distâncias para metros, temos que alongar esta mola 0.02 m requer uma força de $F(0.02) = k(0.02) = 1$ N, portanto $k = 1/0.02 = 50$ N / m.

Exemplo 9.5 Uma força de 20 libras estende uma mola de um comprimento natural de 1cm a um comprimento de 6cm. Quanto trabalho foi realizado ao esticarmos a mola para esse comprimento?

Não estamos de forma alguma preocupados com o comprimento da mola, apenas com a quantidade de sua mudança em relação **omprimento natural**. Portanto, não nos importamos que 20 libras de força estiquem a mola para um comprimento de 6 cm, mas sim que uma força de 20 libras estique a mola por 5cm. Isto é ilustrado na Figura 9.8; medimos apenas a mudança no comprimento da mola, não o comprimento total da mola. Convertendo as unidades de força para Newton: 20 lb $= 4,44 \cdot 20 \approx 89$N Convertendo as unidades de comprimento para metro temos

$$F(0,05) = 0,055k = 89 \text{ N}.$$

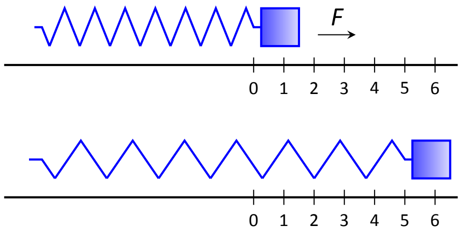
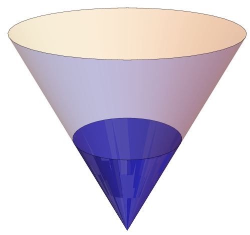


Figura 9.8 Ilustrando os aspectos importantes do trabalho realizado ao esticarmos uma mola no Exemplo 5.

Logo $k = 1780$ N/m e $F(x) = 1780x$. Calculamos o trabalho total realizado integrando $F(x)$ de $x = 0$ até $x = 0,05$:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{0,05} 1780x \, \mathrm{d}x \\ &= 890x^2 \Big|_0^{0,05} \\ &\approx 2.225 \text{ N} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

Exemplo 9.6 Suponha que um tanque de água tem a forma de um cone circular reto com a ponta na parte inferior, e tem 10 metros de altura e raio de 2 metros. Se o tanque está cheio, quanto trabalho é necessário para bombear toda a água para fora por cima do tanque?



Solução Para aproximar o trabalho, dividiremos a água no tanque em secções horizontais, aproximamos o volume de água em uma secção por um disco fino, e calculamos a quantidade de trabalho necessária para levantar cada disco para o topo do tanque. Como de costume, tomamos o limite fazendo as secções mais finas obtendo o trabalho total. Na profundidade h a secção transversal circular através do tanque tem um raio $r = (10 - h)/5$, usando semelhança de triângulos, e área $\pi(10 - h)^2/25$. Uma seção do tanque em profundidade h, portanto, tem um volume de aproximadamente $\pi(10 - h)^2/25\Delta h$ e logo contém $\sigma\pi(10 - h)^2/25\Delta h$ quilogramas de água, onde σ é a densidade da água em quilogramas por metro cúbico; $\sigma \approx 1000$. Assim a força da gravidade sobre esta quantidade de água é $9.8\sigma\pi(10 - h)^2/25\Delta h$, e, finalmente, esta seção de água deve ser levantada uma distância h, o que exige $h9.8\sigma\pi(10 - h)^2/25\Delta h$ Newton-metros de trabalho. Logo o trabalho total é dado por

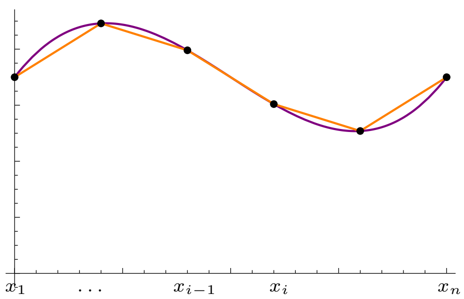
$$W = \frac{9.8\sigma\pi}{25} \int_0^{10} h(10 - h)^2 \, dh = \frac{980000}{3}\pi \approx 1026254 \quad \text{Newton-metros.}$$

■

9.5 Comprimento de Arco e Área Superficial

9.5.1 Comprimento de Arco

Nesta seção iremos definir o comprimento de uma curva. Se a curva é uma poligonal, podemos facilmente encontrar seu comprimento somando os comprimentos dos segmentos de reta que formam a poligonal. Agora suponhamos que a curva C seja dada pela equação $y = f(x)$, onde f é diferenciável e $a \leq x \leq b$. Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$. Então a poligonal com vértices $(x_i, f(x_i))$ é uma aproximação para C. O comprimento da curva C é aproximadamente o comprimento da poligonal, e a aproximação torna-se melhor quando $|P| \to 0$. O compri-



mento da poligonal é

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio 5.2 em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, existe um $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f'(x_i^*)\Delta x_i.$$

Desta forma

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(x_i^*)\Delta x_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(1 + (f'(x_i^*))^2}\Delta x_i.$$

Então, definimos o **comprimento da curva** C por

$$L = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(1 + (f'(x_i^*))^2}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ \mathrm{d}x.$$

Exemplo 9.1 Calcule o comprimento de arco da curva $f(x) = x^{3/2}$, com $1 \leq x \leq 4$.

Solução Como $f(x) = x^{3/2}$, temos que $f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$, e assim,

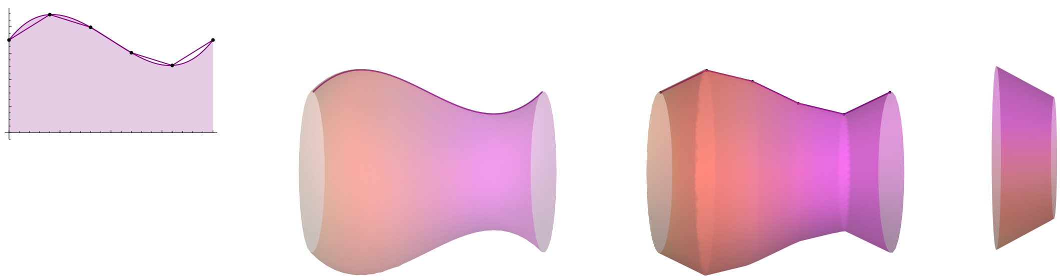
$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\ \mathrm{d}x.$$

Fazendo a substituição, $u = 1 + \dfrac{9}{4}x$, então $du = \dfrac{9}{4}\ \mathrm{d}x$. Quando $x = 1, u = \dfrac{13}{4}$; quando $x = 4, u = 10$. Consequentemente,

$$L = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}du = \frac{4}{9}\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{13/4}^{10} = \frac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right].$$

9.5.2 Área Superficial

Nós já vimos como uma curva de $y = f(x)$ em $[a, b]$ pode ser girada em torno de um eixo para formar um sólido. Em vez de calcular o seu volume, consideraremos agora a sua área superficial.



Podemos aproximar a área da superfície pela área da superfície gerada pela revolução de uma poligonal plana em torno de um eixo deste plano Consideremos f definida e positiva em $[a, b]$ com derivada contínua em (a, b). Seja $P = (x_i)$ uma partição de $[a, b]$. Consideremos a poligonal com vértices $(x_i, f(x_i))$ e girando-a ao redor do eixo x obtemos uma aproximação para a superfície. Seja A a área lateral da superfície gerada pela rotação da poligonal da figura abaixo. Lembramos que a área lateral, A, do tronco de cone é dada por

$$A_T = \pi(r_1 + r_2)g = 2\pi r g$$

onde $r = \dfrac{1}{2}(r_1 + r_2)$.

Agora vamos deduzir a área lateral de um sólido de revolução qualquer em torno do eixo x pela aproximação da soma das áreas laterais de vários troncos de cone. Se denotarmos por L_i o comprimento da curva ligando os pontos x_{i-1} a x_i, como

$$L_i \approx \sqrt{1 + f'(x_i^*)}\Delta x_i$$

para algum x_i^* no i-ésimo subintervalo. Então

$$R = f(x_{i+1}) \quad \text{e} \quad r = f(x_i).$$

Assim, a área da superfície de um dos tronco do cone é de aproximadamente

$$2\pi\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}\sqrt{1+f'(x_i^*)^2}\Delta x_i.$$

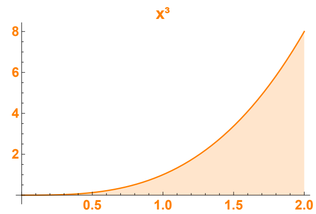
Como f é uma função contínua , pelo TVI temos que existe d_i em $[x_i, x_{i+1}]$ tal que $f(d_i) = \dfrac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$; Logo:

$$2\pi f(d_i)\sqrt{1+f'(x_i^*)^2}\Delta x_i.$$

Somando sobre todos os subintervalos temos

$$\text{Área Superficial} \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(d_i)\sqrt{1+f'(x_i^*)^2}\Delta x_i,$$

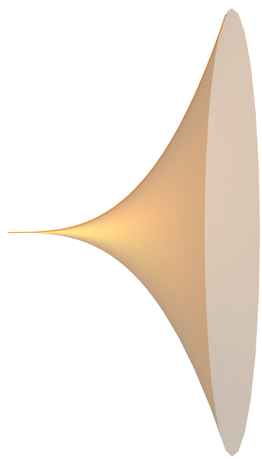
que é uma soma de Riemann. Tomando o limite temos



$$\text{Área Superficial} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ \mathrm{d}x.$$

A área da superfície do sólido formado pela rotação do gráfico de $y = f(x)$ ao redor do eixo y, com $a, b \geq 0$, é

$$\text{Área Superficial} = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\ \mathrm{d}x.$$



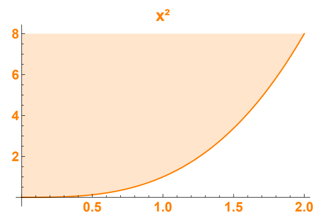
Exemplo 9.2 Determine a área de superfície do sólido formado pela revolução da curva $y = x^3$ em $[0, 2]$ em torno do eixo x.

$$A = \int_0^2 2\pi x^3(1+9x^4)^{1/2}dx \tag{9.25}$$

Substituição $u = 1 - 9x^4$ $du = 27x^3$

$$= 2\pi\int_*^* \frac{u^{1/2}}{27}du \tag{9.26}$$

$$= \frac{\pi}{27}(1+9x^4)^{3/2}\Big|_0^2 \approx 203.04 \tag{9.27}$$



Exemplo 9.3 Determine a área de superfície do sólido formado pela revolução da curva $y = x^2$ em $[0, 1]$ em torno do eixo y.

Uma vez que estamos girando em torno do eixo y, o “ raio ” do sólido não é $f(x)$, mas sim x. Assim, a integral para calcular a área de superfície é:

$$A = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\ \mathrm{d}x.$$

Substituição $u = 1 + 4x^2$; novos extremos $u = 1$ e $u = 5$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4}\int_1^5 \sqrt{u}\, du \\
&= \frac{\pi}{4}\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^5 \\
&= \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \\
&\approx 5.33.
\end{aligned}$$

Exemplo 9.4 Encontre a área da superfície obtida pela rotação da curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, ao redor do eixo x. Temos $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$, e assim,

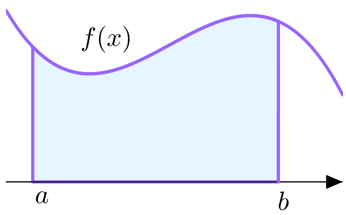
$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2}\frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, \mathrm{d}x = 4\pi \int_{-1}^{1} 1\, \mathrm{d}x = 8\pi.$$

9.6 ⋆ Centro de Massa

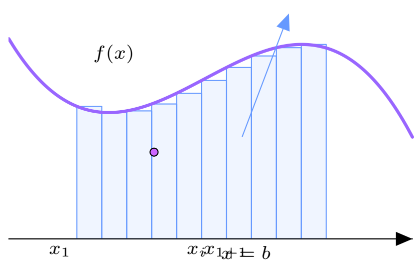
Consideremos uma placa fina com densidade uniforme ρ que ocupa uma região A do plano. Desejamos encontrar o centro de massa da placa A. Suponha que a região A seja da forma

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\},$$

onde f é função definida e contínua em $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$.



Consideremos uma partição $P = (x_i)$ de $[a, b]$ e escolhemos o ponto x_i^* como sendo ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, que é $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$. Isto determina uma aproximação por retângulos de A.



O centro de massa do retângulo R_i é seu centro $\left(x_i^*, \dfrac{f(x_i^*)}{2}\right)$. Como sua área é $f(x_i^*)\Delta x_i$; temos que a massa do i-ésimo retângulo é

$$m_i = \rho \underbrace{\Delta x_i}_{\text{base}} \underbrace{f(x_i^*)}_{\text{altura}}. \tag{9.28}$$

Logo o centro de massa da região formada pela união dos retângulos $R_1, R_2 \dots R_n$ é

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^* m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^* \rho f(x_i^*)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho f(x_i^*)\Delta x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^* f(x_i^*)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i} \tag{9.29}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i^*)}{2} m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\rho f(x_i^*)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho f(x_i^*)\Delta x_i} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(x_i^*)\Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i} \tag{9.30}$$

Fazendo o tamanho da partição tender a zero $|P| \to 0$, obtemos as coordenadas do **centro de massa** da região R

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x f(x)\ \mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x} \qquad \overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x} \tag{9.31}$$

O argumento anterior motiva a definição:

9.1 **Definição 6.**

Exemplo 9.2 Calcule o centro de massa da região limitada pelas curvas $y = \cos x$, $y = 0, x = 0$ e $x = \pi/2$.

Solução A área da região é: Área $A = \int_0^{\pi/2} \cos x\ \mathrm{d}x = \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} = 1$; assim,

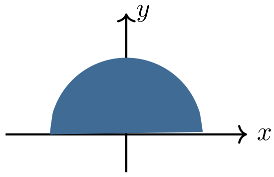
$$\overline{x} = \frac{1}{\text{área}A}\int_0^{\pi/2} x f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} x\cos x\ \mathrm{d}x = x\operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{\text{área}A}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} f^2(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1+\cos(2x))\ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}.$$

Portanto o centro de massa é $\left(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8}\right)$. ■

Exemplo 3. *Calcule o centro de massa do semi-círculo de raio r.* ◁



Solução Por simetria $\overline{x} = 0$. Por outro lado

$$\begin{aligned}\overline{y} &= \frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x} \\ &= \frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_r^{-r} (r^2 - x^2)\ \mathrm{d}x}{\dfrac{\pi r^2}{2}} \\ &= \frac{4r}{3\pi}\end{aligned}$$

■

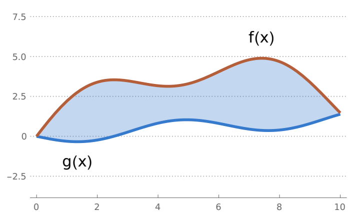
Centro de massa para a região entre duas curvas

Se a região A está entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde $f(x) \geq g(x)$, então o mesmo argumento anterior pode ser usado para mostrar que o **centro de massa** de

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\right\}$$

é dado por

$$\overline{x} = \frac{1}{\text{área } A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x\,, \quad \overline{y} = \frac{1}{\text{área } A}\frac{1}{2}\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\ \mathrm{d}x.$$



Exemplo 9.4 Determine o centro de massa da região A limitada pela reta $y = x$ e pela parábola $y = x^2$.

Solução A área da região é

$$\text{Área } A = \int_0^1 (x - x^2)\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Portanto,

$$\overline{x} = 6\int_0^1 x(x-x^2)\ \mathrm{d}x = 6\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$
$$\overline{y} = 6\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x^4)\ \mathrm{d}x = 3\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

O centro de massa é $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)$.

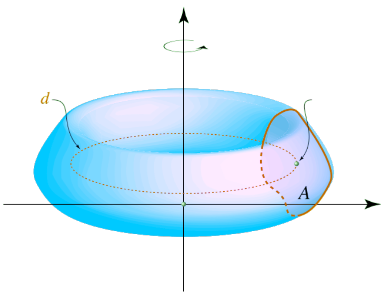
9.6.1 Teorema de Pappus

9.5 **Teorema 6. :** Teorema de Pappus

Seja R uma região plana, que se situa inteiramente de um dos lados de uma reta L no mesmo plano. Se denotarmos por r a distância entre o centroide de R e a reta L, então o volume V do sólido de revolução obtido a partir da rotação de R ao redor de L é dado por

$$V = 2\pi r A$$

onde A é a área de R.



Exemplo 6 - Volume do toro. *Calcule o volume do toro obtendo rotacionando o circulo de raio r cujo centro é $(R,0)$ em torno do eixo y usando o Teorema de Pappus.* ◁

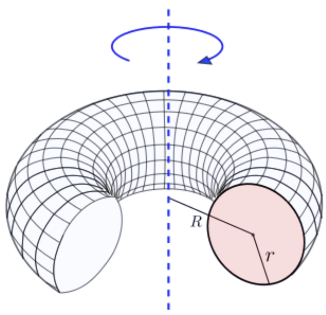


Figura 9.9 Volume do Toro (WIKIPEDIA, 2021)

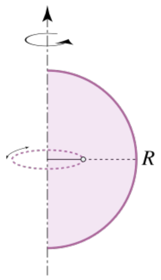
Solução Como a área do círculo é πr^2 e a distância entre o centroide do toro e o eixo y é R,o volume do toro é

$$V = 2\pi^2 R r^2$$

■

Exemplo 7 - Volume da Esfera. *Calcule o volume da esfera usando o Teorema de Pappus.* ◁

Solução



O centroide do semi-circulo está a $\dfrac{4r}{3\pi}$da origem e logo o volume é

$$V = 2\pi \times \frac{4r}{3\pi} \times \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

■

Capítulo 10

Integrais Impróprias

Quando definimos a integral definida $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, colocamos duas hipóteses sobre a família de funções que podiam ser integráveis:

- O intervalo sobre o qual estávamos integrando $[a, b]$, era um intervalo finito, e
- A função $f(x)$ era limitada.

Nesta capítulo, consideramos integrais onde uma ou ambas as condições acima não são válidas. Tais integrais são chamadas **integrais impróprias**.

10.1 Intervalos Infinitos

10.1 **Definição 1. :** Integrais Impróprias em Intervalos Infinitos

1 Deixe f ser uma função contínua em $[a, \infty)$. Definimos

$$\int_a^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x \quad \triangleq \quad \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

2 Deixe f ser uma função contínua em $(-\infty, b]$. Definimos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x \quad \triangleq \quad \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

3 Deixe f ser uma função contínua em $(-\infty, \infty)$. Seja c um número real então definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x \quad \triangleq \quad \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \lim_{b \to \infty} \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

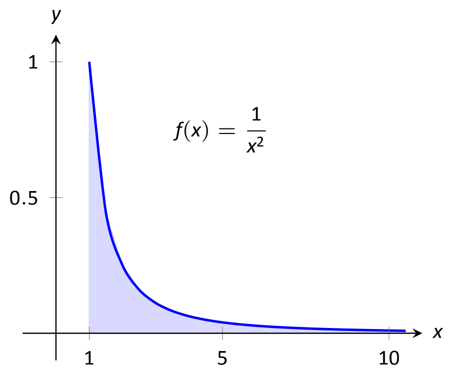


Figura 10.1 O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ do Exemplo 2.

Uma integral imprópria é dita **convergente** se o limite correspondente existe; caso contrário, ela é dita **divergente**. A integral imprópria do item 3 converge se e somente se ambos os limites existem.

Exemplo 10.2 [Calculando Integrais Impróprias] Calcule as seguintes integrais impróprias.

1 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

2 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

3 $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,\mathrm{d}x$

4 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Solução

1
$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{-1}{x}\right|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{-1}{b}+1 \\ &= 1.\end{aligned}$$
O gráfico de da área definida por essa integral é apresentada na Figura 10.1.

2
$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to\infty} \ln|x|\Big|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\ln(b) \\ &= \infty.\end{aligned}$$

O limite não existe, logo a integral imprópria $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge. Compare os gráficos das Figuras 10.1 e 10.2;observe como o gráfico

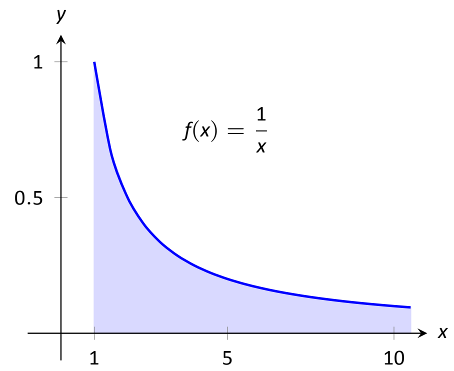


Figura 10.2 O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ do Exemplo 2.

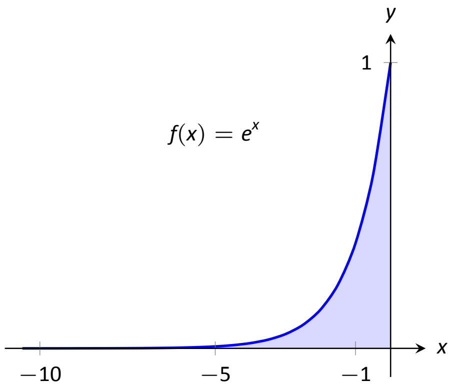


Figura 10.3 O gráfico de $f(x) = e^x$ do Exemplo 2.

de $f(x) = 1/x$ é mais largo. Essa diferença é suficiente para fazer a integral imprópria divergir.

3

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} e^x \; dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x \; dx \\ &= \lim_{a\to-\infty} e^x \Big|_a^0 \\ &= \lim_{a\to-\infty} e^0 - e^a \\ &= 1.\end{aligned}$$

O gráfico de da área definida por essa integral é apresentada na Figura 10.3.

4 Quebraremos em duas Integrais Impróprias e escolheremos um valor de c como na Definição 10.1. Pode ser qualquer valor de c,

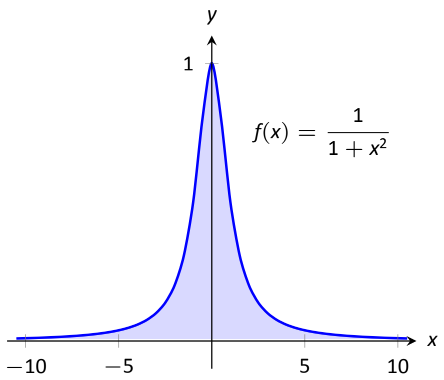


Figura 10.4 O gráfico de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ do Exemplo 2.

escolheremos $c = 0$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{tg}^{-1} x\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \operatorname{tg}^{-1} x\Big|_0^b \\
&= \lim_{a\to-\infty} \left(\operatorname{tg}^{-1} 0 - \operatorname{tg}^{-1} a\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\operatorname{tg}^{-1} b - \operatorname{tg}^{-1} 0\right) \\
&= \left(0 - \frac{-\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right).
\end{aligned}$$

Cada limite existe, logo a integral original converge e vale:

$$= \pi.$$

O gráfico de da área definida por essa integral é apresentada na Figura 10.4.

■

Exemplo 10.3 [Integração Imprópria e a Regra de l'Hôpital] Calcule a integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x$.

Solução Esta integral exigirá o uso da técnica de Integração por Partes. Seja $u = \ln x$ e $dv = 1/x^2\ \mathrm{d}x$. Então

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^b + \int_1^b \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} - (-\ln 1 - 1)\right).
\end{aligned}$$

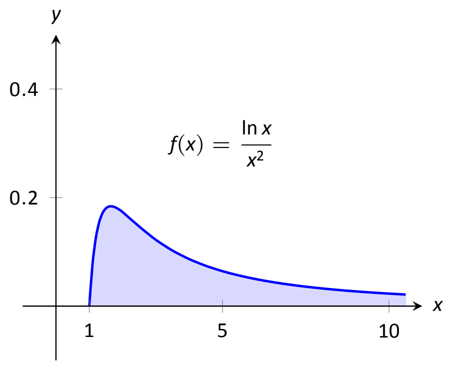


Figura 10.5 O gráfico de $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ do Exemplo 3.

O termo $1/b$ e $\ln 1$ vão para 0, deixando $\lim\limits_{b\to\infty} -\dfrac{\ln b}{b} + 1$. Precisamos calcular $\lim\limits_{b\to\infty} \dfrac{\ln b}{b}$ pela Regra de l'Hôpital's Rule. Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty} \frac{\ln b}{b} &\overset{\text{by LHR}}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{1/b}{1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo a integral imprópria vale:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\ \mathrm{d}x = 1.$$

■

10.2 Integrandos Descontínuos

Acabamos de considerar integrais definidas onde o intervalo de integração era infinito. Consideramos agora outro tipo de Integração Imprópria, onde o imagem do integrando é infinito.

10.1 Definição 2. : Integração Imprópria com Integrandos Descontínuos

Seja $f(x)$ ser uma função contínua em $[a, b]$ exceto em c, $a \leq c \leq b$, onde $x = c$ é uma assíntota vertical de f. Definimos

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x + \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

The integral converge se ambos os limites existem e diverge caso contrário.

Exemplo 10.2 [Integração Imprópria de funções descontínuas] Calcule

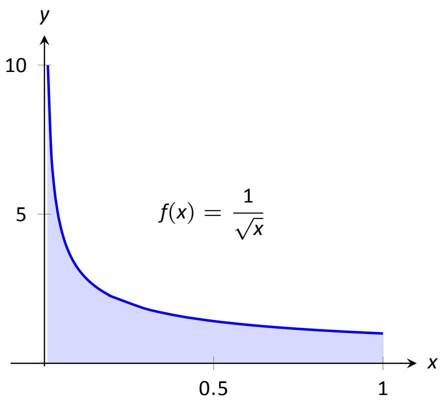


Figura 10.6 O gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ do Exemplo 2.

as seguintes integrais impróprias:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x.$

1 O gráfico de $f(x) = 1/\sqrt{x}$ é apresentado na Figura 10.6. Observe que f tem uma assíntota vertical em $x = 0$; Em certo sentido, estamos tentando calcular a área de uma região que não tem ”topo”.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x &= \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{a\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_a^1 \\ &= \lim_{a\to 0^+} 2\left(\sqrt{1}-\sqrt{a}\right) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Acontece que a região tem uma área finita, embora não tenha limite superior (coisas estranhas podem ocorrer na matemática quando se considera o infinito).

Observação 3. *Na Definição 10.2, c pode ser um dos extremos (a or b). Nesse caso, há apenas um limite a ser considerado.*

2 A função $f(x) = 1/x^2$ tem uma assíntota vertical em $x = 0$, como apresentado na Figura 10.7, logo esta integral é uma integral imprópria. Vamos evitar usar limite s por um momento e prosseguir sem reconhecer a natureza imprópria da integral. Isto leva a:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x &= -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 \\ &= -1-(1) \\ &= -2.\ (!)\end{aligned}$$

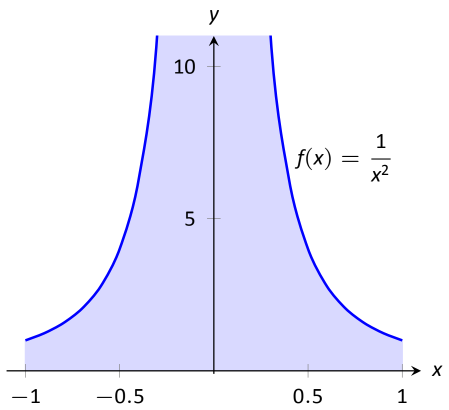


Figura 10.7 O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ do Exemplo 2.

Claramente a área em questão está acima do eixo x, mas a área é supostamente negativa! Por que nossa resposta não corresponde à nossa intuição? Para responder a isso, calcularemos a integral usando Definição 10.2.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x &= \lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x + \lim_{t\to 0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0^-} -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{t} + \lim_{t\to 0^+} -\frac{1}{x}\Big|_{t}^{1} \\
&= \lim_{t\to 0^-} -\frac{1}{t} - 1 + \lim_{t\to 0^+} -1 + \frac{1}{t} \\
&\Rightarrow \Big(\infty - 1\Big) \ + \ \Big(-1 + \infty\Big).
\end{aligned}$$

Nenhum dos limites converge de modo que a integral original imprópria diverge. A resposta absurda que obtivemos ao ignorar a natureza de razão da integral é exatamente isso: sem sentido.

10.3 Compreendendo Convergência e Divergência

Muitas vezes, estamos interessados em saber simplesmente se uma integral imprópria converge ou não, e não necessariamente em determinar o valor de uma integral convergente. Fornecemos agora várias ferramentas que ajudam a determinar a convergência ou divergência de Integrais Impróprias sem integrar. Nossa primeira ferramenta é entender o comportamento de funções da forma $\dfrac{1}{x^p}$.

Exemplo 10.1 [Integração Imprópria de $1/x^p$] Determine os valores de

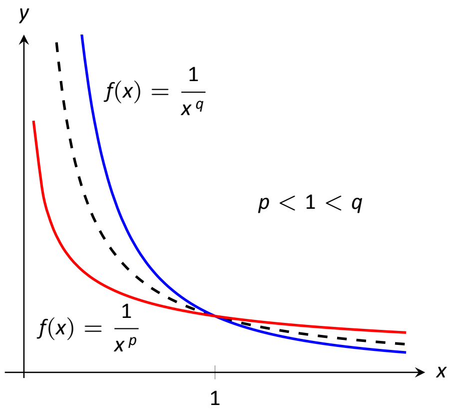


Figura 10.8 Plotando as funções da forma $1/x^p$ do Exemplo 1.

p para os quais $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, \mathrm{d}x$ converge.

Solução Integrando e calculando o limite .

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, \mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}\, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}\, \mathrm{d}x \qquad (\text{assume } p \neq 1) \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\Big|_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-p}\big(b^{1-p} - 1^{1-p}\big).
\end{aligned}$$

Este limite converge precisamente quando a potência de b é menor que 0: ou seja quando $1 - p < 0 \Rightarrow 1 < p$. Nossa análise mostrou que se $p > 1$, então $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, \mathrm{d}x$ converge. quando $p < 1$ a integral imprópria diverge; mostramos no Exemplo 2 que quando $p = 1$ a integral também diverge. Na Figura 10.8 apresentamos o gráfico de $y = 1/x$ em linha tracejada, juntamente com os gráficos de $y = 1/x^p$, $p < 1$, e $y = 1/x^q$, $q > 1$. A linha tracejada é a linha que divide entre convergência e divergência . ■

O resultado do Exemplo 1 fornece uma ferramenta importante na determinação da convergência de outras integrais. Um resultado similar sobre Integrais Impróprias da forma $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, \mathrm{d}x$ é provado nos exercícios. Estes resultados estão sumarizados no seguinte quadro.

Convergência de Integrais Impróprias $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\ \mathrm{d}x$ e $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\ \mathrm{d}x$.

1. A integral imprópria $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\ \mathrm{d}x$ converge quando $p > 1$ e diverge quando $p \le 1$.

2. A integral imprópria $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\ \mathrm{d}x$ converge quando $p < 1$ e diverge quando $p \ge 1$.

A técnica básica para determinar a convergência de Integrais Impróprias é comparar o integrando cuja convergência é desconhecida com um integrando cuja convergência é conhecida. Para esse fim usaremos com frequência integrandos da forma $1/x^p$.

10.2 Teorema 3. : Teste da Comparação Direta para Integrais Impróprias

Deixe f e g serem funções contínuas em $[a, \infty)$ onde $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo x em $[a, \infty)$.

1. Se $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\ \mathrm{d}x$ converge, então $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ converge.

2. Se $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ diverge, então $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\ \mathrm{d}x$ diverge.

3. Deixe f e g serem funções contínuas em $[a, b]$ exceto em $x = c$, onde possuem uma assíntota vertical, e $0 \le f(x) \le g(x)$ para todo x em $[a, b]$, $x \ne c$.
   - Se $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\ \mathrm{d}x$ converge, então $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\ \mathrm{d}x$ converge.
   - Se $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\ \mathrm{d}x$ diverge, então $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\ \mathrm{d}x$ diverge.

Exemplo 10.3 [Convergência de Integrais Impróprias] Determine a convergência das seguintes integrais impróprias. 1. $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ 2. $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}\ \mathrm{d}x$

1. A função $f(x) = e^{-x^2}$ não tem uma antiderivada expressável em termos de funções elementares, então não podemos nos integrar diretamente. Podemos compará-la com $g(x) = 1/x^2$, e como apresentado na Figura 10.9, $e^{-x^2} < 1/x^2$ em $[1, \infty)$. Logo pelo quadro ?? temos que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x$ converge, logo $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$ também

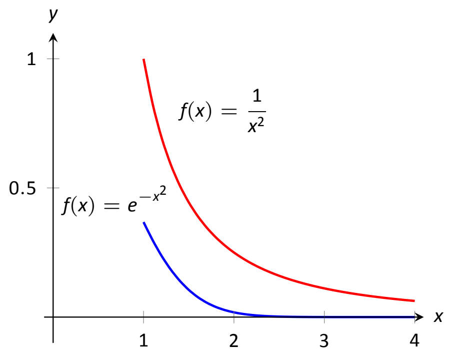


Figura 10.9 Gráfico de $f(x) = e^{-x^2}$ e $f(x) = 1/x^2$ do Exemplo 3.

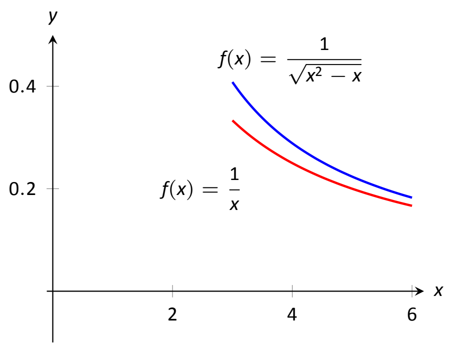


Figura 10.10 Gráfico de $f(x) = 1/\sqrt{x^2 - x}$ e $f(x) = 1/x$ do Exemplo 3.

converge.

2 Observe que para grandes valores de x, $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{x^2}} = \dfrac{1}{x}$. Como $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ diverge, logo vamos tentar comparar o integrando original com $1/x$. Quando $x > 0$, temos que $x = \sqrt{x^2} > \sqrt{x^2 - x}$ e logo

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}.$$

Usando o Teorema 10.3, concluímos que como $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ diverge, $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}\, dx$ também diverge. A Figura 10.10 ilustra isso.

Ser capaz de comparar integrais "desconhecidas"a integrais "conhecidas"é muito útil na determinação da convergência. No entanto, alguns dos nossos exemplos foram um pouco "bons demais". Por exemplo, foi conveniente que $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x}}$, Mas e se "$-x$" fosse trocado por "$+2x + 5$"? O que poderíamos dizer sobre a convergência de $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}\, dx$? Temos que $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$, logo não poderíamos usar o Teorema 10.3. Em casos como este (e outros mais), é útil empregar o seguinte teorema.

10.4 **Teorema 3. :** Teste da Comparação do Limite para Integrais Impróprias

Deixe f e g serem funções contínuas em $[a, \infty)$ com $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ para todo x. Se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty,$$

então

$$\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_a^\infty g(x)\ \mathrm{d}x$$

ambas convergem ou ambas divergem

Exemplo 10.5 Determine a convergência de $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\ \mathrm{d}x$.

Quando x cresce, o denominador do integrando se comportará como $y = x$. Logo comparamos $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ com $\dfrac{1}{x}$ usando o Teste da Comparação do Limite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/\sqrt{x^2+2x+5}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

A avaliação imediata deste limite retorna ∞/∞, uma forma indeterminada. Usar a Regra do L'Hopital parece apropriado, mas, nessa situação, não leva a resultados úteis. (Encorajamos o leitor a empregar a Regra de L'Hopital pelo menos uma vez para verificar isso). O problema está na raiz quadrada. Para eliminá-la usaremos o seguinte fato: Se $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, então $\lim\limits_{x\to c} f(x)^2 = L^2$. (Isso é verdade quando ou c ou L é ∞.) Logo consideramos o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+2x+5}.$$

Este limite converge a 1, de modo que o limite original também converge a 1. Quando x tende ao infinito, a função $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ se comporta como $\dfrac{1}{x}$. Como $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$ diverge, pelo Teste da Comparação do Limite temos que $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\ \mathrm{d}x$ também diverge. A Figura 10.11 apresenta os gráficos de $f(x) = 1/\sqrt{x^2+2x+5}$ e $f(x) = 1/x$, ilustrando que quando x cresce, as funções se tornam iguais.

Exercícios

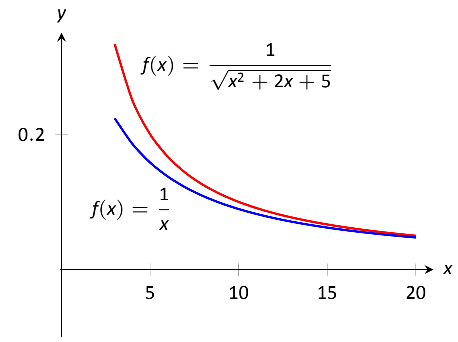


Figura 10.11 Gráficos de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ e $f(x) = \frac{1}{x}$ do Exemplo ??.

Ex. 10.1 — Calcule as integrais impróprias abaixo:

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, \mathrm{d}x$ [Dica: $\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sec x}$.]

Ex. 10.2 — Determine para quais valores de $p > 0$ cada integral abaixo converge e, nesse caso, calcule a integral:

1. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^p}\, \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, \mathrm{d}x$

Ex. 10.3 — Determine se a integral diverge ou converge e, nesse último caso, calcule a integral:

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\, \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+9}\, \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln^2 x}\, \mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\, \mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x(1+ln^2)}\, \mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right)\, \mathrm{d}x$ [Dica Integre por partes $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x}\, \mathrm{d}x$ e compare com a integral da outra parcela.]
10. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x+1}\, \mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2-x+1}\, \mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\, \mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x^2-1)^2}\, \mathrm{d}x$

Ex. 10.4 — Nos próximos exercícios use o Teste de Comparação Direta ou o Teste de Comparação de Limite para determinar se a integral definida dada converge ou diverge. Indique claramente qual teste está sendo usado e qual função do integrando está sendo comparada.

1. $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{3x^2+2x-5}}\, dx$

2. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{4}{\sqrt{7x^3 - x}}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x^3 - x^2 + x + 1}}\,dx$

4. $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x} \ln x\,dx$

5. $\displaystyle\int_5^\infty e^{-x^2+3x+1}\,dx$

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x}\,dx$

10.4 Probabilidade

Suponha que meçamos a altura de uma pessoa escolhida aleatoriamente em um grupo de determinada idade, ou a durabilidade de uma lâmpada escolhida aleatoriamente. Essas quantidades são exemplos de variáveis aleatórias contínuas, porque seus valores variam em um intervalo dos números reais.

Nesse contexto, poderíamos querer saber a probabilidade de que a altura de uma pessoa escolhida aleatoriamente seja maior que 170cm, ou a probabilidade de uma lâmpada nova durar entre 200 e 400 horas. Se deixarmos X representar a durabilidade da lampada, denotamos essa última probabilidade como segue:

$$P(200 \leq X \leq 400)$$

Como uma variável aleatória X pode assumir qualquer um dos valores contínuos, digamos, qualquer valor entre 0 e 1, então não podemos defini-la listando os valores e suas respectivas probabilidade. Como temos infinitos valores, para qualquer valor único x, $P(X = x)$ é zero! Em vez disso, cada variável aleatória contínua X tem uma função densidade de probabilidade f. Ou seja, definimos a probabilidade de X estar entre a e b é dada pela integral de f de a até b:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

A função densidade de probabilidade f de uma variável aleatória X satisfaz:

1. $f \geq 0$ para todo x.
2. Como as probabilidades tomam valores entre de 0 até 1, segue que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$$

10.4.1 Valores Esperados

O valor esperado de uma variável aleatória contínua X é definida como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\ \mathrm{d}x.$$

Capítulo A

Notação de Somatório

Suponha que desejamos somar uma lista de números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$. Em vez de escrever

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10},$$

usamos notação de somatório e escrevemos

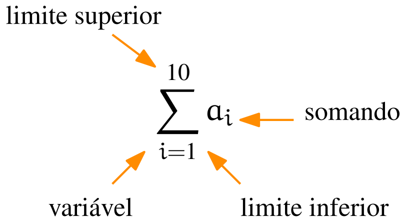


Figura A.1 Notação de Somatório

Na notação de somatório o sigma maiúsculo representa o termo "soma". O índice do somatório neste exemplo é i. Para esse fim qualquer letra pode ser usada. Por convenção, o índice assume apenas os valores inteiros entre (e incluindo) os limites inferiores e superiores. Vejamos um exemplo

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

Observe que na soma acima o termo típico a ser somado é da forma k^2 e estamos somando esses termos de 1 até n. Assim podemos escrever essa soma de modo sucinto, utilizando a notação de somatório, como:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

A expressão anterior deve ser lida como "soma de k^2 com k variando de 1 até n. E de modo mais geral a soma dos números reais $a_1, \cdots a_n$ pode ser escrita usando a notação de somatório como

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$$

Claramente, não é necessário que a soma comece do 1. Assim por exemplo, podemos escrever:

$$\sum_{s=0}^{4}(2s+1) = 1+3+5+7+9$$

$$\sum_{j=2}^{5} j^j = 2^2+3^3+4^4+5^5$$

A.1 **Teorema 0. :** Propriedades do Somatório

1. $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i \pm \sum_{i=m}^{n} b_i$
2. $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i$
3. $\displaystyle\sum_{i=m}^{j} a_i + \sum_{i=j+1}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i$

A.2 **Teorema 0. :** Propriedades do Somatório

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = c \cdot n$, onde c é uma constante.
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exemplo 1.3 Calcule

$$\sum_{i=1}^{6}(2i-1).$$

Solução

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{6}2i-\sum_{i=1}^{6}(1)\\ &= \left(2\sum_{i=1}^{6}i\right)-6\\ &= 2\frac{6(6+1)}{2}-6\\ &= 42-6=36\end{aligned}$$

■

Exemplo 4. *Calcule* $\sum_{i=1}^{100}(3-2i)^2$ ◁

Solução

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100}(3-2i)^2 &= \sum_{i=1}^{100}9-12i+4i^2\\ &= \sum_{i=1}^{100}9-\sum_{i=1}^{100}12i+\sum_{i=1}^{100}4i^2\\ &= \sum_{i=1}^{100}9-12\sum_{i=1}^{100}i+4\sum_{i=1}^{100}i^2\\ &= 9\,(100)-12\left(\frac{100\,(101)}{2}\right)+4\left(\frac{100\,(101)\,(201)}{6}\right)\\ &= 1293700\end{aligned}$$

■

A.5 Teorema 0.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1=1 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{1}{2} \tag{A.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{3} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{1}{4} \tag{A.2}$$

Capítulo B

Tabela de Derivadas

Regras de Derivação

- $(cf(x))' = cf'(x)$
- Derivada da Soma

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

- Derivada do Produto

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Derivada do Quociente

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

- Regra da Cadeia

$$(f(g(x))' = (f'(g(x))g'(x)$$

Funções Simples

- $\dfrac{d}{dx}c = 0$
- $\dfrac{d}{dx}x = 1$
- $\dfrac{d}{dx}cx = c$
- $\dfrac{d}{dx}x^c = cx^{c-1}$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^c}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(x^{-c}\right) = -\dfrac{c}{x^{c+1}}$
- $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x} = \dfrac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},$

Funções Exponenciais e Logarítmicas

- ☐ $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}\ln(x) = \dfrac{1}{x}$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln(a)$

Funções Trigonométricas

- ☐ $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x,$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}\sec x = \operatorname{tg} x \sec x$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cossec}^2 x$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cossec} x = -\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$

Funções Trigonométricas Inversas

- ☐ $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}\arccos x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{1+x^2}$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccotg} x = \dfrac{-1}{1+x^2}$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccossec} x = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Funções Hiperbólicas

- ☐ $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- ☐ $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tgh} x = \operatorname{sech}^2 x$

- $\dfrac{d}{dx}$ sech $x = -$ tgh x sech x
- $\dfrac{d}{dx}$ cotgh $x = -$ cossech$^2\, x$

Funções Hiperbólicas Inversas

- $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{csch}\ x = -\ \mathrm{coth}\ x\ \mathrm{cossech}\ x$
- $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{arcsenh}\ x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{arccosh}\ x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{arctgh}\ x = \dfrac{1}{1-x^2}$
- $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{arcsech}\ x = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
- $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{arccoth}\ x = \dfrac{1}{1-x^2}$
- $\dfrac{d}{dx}\,\mathrm{arccossech}\ x = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$

C

Capítulo

Tabela de Integrais

Regras de Integração

- $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$
- $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

Funções Racionais

- $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ para $n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\displaystyle\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + c$
- $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(x/a) + c$
- $\displaystyle\int \frac{du}{1-u^2} = \begin{cases} \operatorname{arctgh} u + c, & \text{se } |u|<1 \\ \operatorname{arccotgh} u + c, & \text{se } |u|>1 \end{cases} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c$

Funções Logarítmicas

- $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$
- $\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \dfrac{x}{\ln a} + c$

Funções Irracionais

- $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen} u + c$
- $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arcsec}\ u + c$

- ☐ $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \text{arcsenh}\, u + c$
$= \ln|u + \sqrt{u^2+1}| + c$
- ☐ $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arccosh}\, u + c$
$= \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + c$
- ☐ $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} = -\text{arcsech}\, |u| + c$
- ☐ $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\text{arccosech}\, |u| + c$
- ☐ $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \text{arcsen}\, \frac{x}{a} + c$
- ☐ $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arccos \frac{x}{a} + c$

Funções Trigonométricas

- ☐ $\int \cos x\, dx = \text{sen}\, x + c$
- ☐ $\int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x + c$
- ☐ $\int \text{tg}\, x\, dx = \ln|\sec x| + c$
- ☐ $\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$
- ☐ $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \text{tg}\, x| + c$
- ☐ $\int \cot x\, dx = \ln|\text{sen}\, x| + c$
- ☐ $\int \sec x\, \text{tg}\, x\, dx = \sec x + c$
- ☐ $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$
- ☐ $\int \sec^2 x\, dx = \text{tg}\, x + c$
- ☐ $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$
- ☐ $\int \text{sen}^2\, x\, dx = \dfrac{1}{2}(x - \text{sen}\, x \cos x) + c$
- ☐ $\int \cos^2 x\, dx = \dfrac{1}{2}(x + \text{sen}\, x \cos x) + c$

Funções Hiperbólicas

- ☐ $\int \text{senh}\, x\, dx = \cosh x + c$
- ☐ $\int \cosh x\, dx = \text{senh}\, x + c$
- ☐ $\int \text{tgh}\, x\, dx = \ln(\cosh x) + c$
- ☐ $\int \text{csch}\, x\, dx = \ln\left|\text{tgh}\, \frac{x}{2}\right| + c$
- ☐ $\int \text{sech}\, x\, dx = \text{arctg}(\text{senh}\, x) + c$
- ☐ $\int \coth x\, dx = \ln|\,\text{senh}\, x| + c$

Capítulo D

Identidades Trigonométricas

1 $\operatorname{sen}(90^o - \theta) = \cos\theta$

2 $\cos(90^o - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

3 $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$

4 $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

5 $\sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = 1$

6 $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

7 $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

8 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

9 $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

10 $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

11 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \pm \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

12 $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

13 $\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\dfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)$

14 $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\dfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$

15 $\cos\alpha - \cos\beta = 2\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$

s

Referências

APOSTOL, Tom M. **Calculus, Volume I**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.

CABRAL, Marco Aurélio Palumbo. **Curso de Cálculo de Uma Variável**. [S.l.: s.n.], 2013.

COURANT, Richard. **Differential and Integral Calculus**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2011. v. 2.

DAWKINS, Paul. **Paul's Online Math Notes**. Disponível em: <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcI/CalcI.aspx>. Acesso em: 2 dez. 2015.

DEMIDOVITCH, Boris. **Problemas e Exercícios de Análise Matemática**. [S.l.: s.n.], 1977.

DENCE, Thomas P; DENCE, Joseph B. **Advanced Calculus: A Transition to Analysis**. [S.l.]: Academic Press, 2009.

EDWARDS, Charles Henry; PENNEY, David E. **Calculus and Analytic Geometry**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1982.

FITZPATRICK, Patrick. **Advanced Calculus**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2006. v. 5.

GUICHARD, David; KOBLITZ, Neal; KEISLER, H Jerome. **Calculus: Early Transcendentals**. [S.l.]: Whitman College, 2014.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2001.

HARTMAN, Gregory. **APEX Calculus I**. [S.l.: s.n.], 2015.

KALLAM, Linda G; KALLAM, Michael. An Investigation into a Problem-Solving Strategy for Indefinite Integration and Its Effect on Test Scores of General Calculus Students. ERIC, 1996.

KLINE, Morris. **Calculus: An Intuitive and Physical Approach**. [S.l.]: Courier Corporation, 1998.

KRANTZ, Steven G. **The Integral: a Crux for Analysis**. [S.l.]: Morgan & Claypool Publishers, 2011. v. 4, p. 1–105.

LEITHOLD, Louis. **The Calculus with Analytic Geometry**. [S.l.]: Harper & Row, 1972. v. 1.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real Volume 1**. [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

MALTA, Iaci; PESCO, Sinésio; LOPES, Hélio. **Cálculo a Uma Variável**. [S.l.: s.n.], 2002.

MERCER, Peter R. **More Calculus of a Single Variable**. [S.l.]: Springer, 2014.

OLIVEIRA, Oswaldo de et al. The Implicit and Inverse Function Theorems: Easy Proofs. **Real Analysis Exchange**, Michigan State University Press, v. 39, n. 1, p. 207–218, 2013.

PUGH, Charles Chapman; PUGH, CC. **Real mathematical analysis**. [S.l.]: Springer, 2002. v. 2011.

RUDIN, Walter et al. **Principles of mathematical analysis**. [S.l.]: McGraw-hill New York, 1964. v. 3.

SCHOENFELD, Alan H. **Presenting a Strategy for Indefinite Integration**. [S.l.]: JSTOR, 1978. p. 673–678.

SIMMONS, George F. **Calculus with Analytic Geometry**. [S.l.: s.n.], 1985. v. 10, p. 12.

SPIVAK, Michael. **Calculus**. [S.l.: s.n.], 1984.

________. **The Hitchhiker's Guide to Calculus**. [S.l.]: Mathematical Assn of America, 1995.

STEWART, James. **Calculus: Early Transcendentals**. [S.l.]: Cengage Learning, 2015.

SWOKOWSKI, Earl William. **Calculus with Analytic Geometry**. [S.l.]: Taylor & Francis, 1979.

TAN, Soo. **Calculus: Early Transcendentals**. [S.l.]: Cengage Learning, 2010.

TAO, Terence. **Analysis**. [S.l.]: Springer, 2006. v. 1.

WIKIPEDIA. **Wikipedia, The Free Encyclopedia**. [Online; accessed 22-July-2020]. 2021. Disponível em: <%5Curl%7Bhttp://en.wikipedia.org%7D>.

ZORICH, Vladimir Antonovich. **Mathematical analysis II**. [S.l.]: Springer, 2004. v. 65.

Índice Remissivo