Lista 1

Cálculo Vetorial

Vetores, Mudança de Base e Coordenadas

Vetores

1 — Dados $A, B \in \mathbb{R}^n$, prove que

$$\|A+B\|^2 - \|A-B\|^2 = 4A{\bullet}B$$

e logo $A{\bullet}B = 0$ se e somente se $\|A+B\| = \|A-B\|$. Interprete esse resultado geometricamente.

2 — Se θ é o ângulo entre os vetores $A, B \in \mathbb{R}^n$, prove que

$$\|A-B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\|A\|\|B\|\cos\theta$$

3 — Dados os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e constantes reais a e b, mostre que:

a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$

b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

c) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

d) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

e) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|)^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$

f) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$

g) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 2\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

h) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

i) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

j) Identidade de Jacobi: $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = 0$

4 — Seja $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ uma base ortonormal orientada segundo a regra da mão direita. Considere os vetores

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + 3\mathbf{i}_3\,,\ \mathbf{b} = 4\mathbf{i}_1 + 5\mathbf{i}_2\,,\ \mathbf{c} = 3\mathbf{i}_1 + 2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\,.$$

a) Verifique que formam uma base.

b) Qual o volume do paralelepípedo gerado por **a**, **b** e **c**?

5 — O torque $\boldsymbol{\tau}$ de uma força **F** com respeito a um ponto O é dado pela expressão

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

em que **r** é o vetor de posição do início do vetor **F** em relação a O. A projeção de $\boldsymbol{\tau}$ em um eixo **u** passando por O, i.e., a quantidade

$$\tau_{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{u}$$

em que **u** é um vetor unitário na direção do eixo **u**, é chamada de torque de **F** com relação ao eixo **u**. Prove que $\tau_{\mathbf{u}}$é independente da posição de O em **u**.

6 — Determine o produto vetorial entre dois vetores num sistema de coordenadas oblíquo.

7 — Use o resultado acima para demonstrar a validade de $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}$ num sistema de coordenadas oblíquo.

Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

8 — Nos itens a seguir escreva a equação dada em coordenadas cilíndricas e esféricas.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 = 2y$

c) $x^2 + y^2 + 9z^2 = 36$

9 — Descreva a interseção das superfícies cujas equações em coordenadas esféricas são $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$.

10 — Mostre que para $a \neq 0$, a equação $\rho = 2a \sin\phi \cos\theta$ em coordenadas esféricas descreve uma esfera centrada em $(a, 0, 0)$ com raio $|a|$.

11 — Dados P_1 e P_2 pontos cujas coordenadas esféricas sejam $(\rho_1, \theta_1, \phi_1)$ e $(\rho_2, \theta_2, \phi_2)$, respectivamente. Seja $\mathbf{v}_1$ o vetor ligando a origem a P_1, e seja $\mathbf{v}_2$ o vetor ligando a origem a P_2. Mostre que o ângulo γ entre $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, satisfaz:

$$\cos\gamma = \cos\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2 \cos(\theta_2 - \theta_1).$$

12 — Mostre que a distância d entre os pontos P_1 e P_2 com coordenadas cilíndricas (r_1, θ_1, z_1) e (r_2, θ_2, z_2), respectivamente, é dada por

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Notação de Einstein

13 — Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vetores em $\mathbb{R}^3$. Mostre que

$$\ulcorner x_i y_i z_j \lrcorner = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}.$$

14 — Mostre que o produto vetorial pode ser escrito como:

$$\ulcorner [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \lrcorner \tag{1}$$

Onde

$$\ulcorner \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i,j,k) \text{ é } (1,2,3), (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2) \\ -1 & \text{se } (i,j,k) \text{ é } (3,2,1), (1,3,2) \text{ ou } (2,1,3) \\ 0 & \text{se } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i \end{cases} \lrcorner$$

15 — Mostre que

$$\ulcorner \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \det \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \lrcorner$$

Respostas dos Exercícios

5 Dica: Use que $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}$ e calcule vetorialmente.

6 Dado uma base $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. Essa base pode ser expressa em termo da base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ como

$$\mathbf{f}_1 = \sum f_{1j}\mathbf{e}_j \tag{2}$$

$$\mathbf{f}_2 = \sum f_{2j}\mathbf{e}_j \tag{3}$$

$$\mathbf{f}_3 = \sum f_{3j}\mathbf{e}_j \tag{4}$$

Na base obliqua dois vetores $\mathbf{z}, \mathbf{w}$ podem ser escritos

$$\mathbf{z} = \sum z_i \mathbf{f}_i = \sum z_i \sum f_i j \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{w} = \sum w_i \mathbf{f}_i = \sum w_i \sum f_i j \mathbf{e}_j$$

Calcule $z \times w$ em termos de em termo da base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Expresse esses vetores na base $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, usando a mudança de base inversa:

$$\mathbf{e}_1 = \sum f^{1j}\mathbf{f}_j \tag{5}$$

$$\mathbf{e}_2 = \sum f^{2j}\mathbf{e}_j \tag{6}$$

$$\mathbf{e}_3 = \sum f^{3j}\mathbf{3}_j \tag{7}$$