# Lista 2

## Cálculo Vetorial

### Gradiente, Divergente e Rotacional

**1 —** Desenhe os seguintes campos vetoriais:

a) $-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

b) $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

c)

d)

**2 —** Calcule a matriz Jacobiana de $f(x, y) = (e^x \sin x, e^x \cos y)$.

**3 —** Desenhe as curvas de nível correspondentes aos respectivos valores $c = 0, 1, 4, 9$ para a função $f(x, y) = x^2 + y^2$. Determine $\nabla f(x_0, y_0)$, onde $(x_0, y_0)$ é um ponto da curva de nível 1 da função e relacione-o com o vetor tangente à curva de nível neste ponto.

**4 —** Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ dos seguintes campos escalares:

a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, com $(x, y) \neq (0, 0)$

b) $f(x, y) = \arctan(y/x)$, com $x \neq 0$.

**5 —** Calcule $\|\nabla f\|$ dos seguintes campos escalares:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$

b) $f(x, y) = e^x \cos y$

c) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^2 - z^5)$.

**6 —** Uma espaçonave está em apuros perto do lado ensolarado de Mercúrio. A temperatura do casco do navio quando ele está na localização $(x, y, z)$ será dada por

$$T(x, y, z) = e^{-x^2 - 2y^2 - 3z^2},$$

onde $x, y$ e $z$ são medido em metros. Ele está atualmente em $(1, 1, 1)$.

a) Em que direção deve mover a fim de diminuir a temperatura mais rapidamente?

b) Se a espaçonave viaja a $e^8$ metros por segundo, quão rápido será a diminuição da temperatura se ele prosseguir Essa direção?

c) Infelizmente, o metal do o casco se quebrará se arrefecido a uma taxa maior que $\sqrt{14}e^2$ graus por segundo. Descreva o conjunto de possíveis direções em que ele pode ir para diminuir a temperatura abaixo de essa taxa.

**7 —** Dado uma transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x} \times L(\mathbf{x}) \end{array}.$$

Mostre que $F$ é diferenciável e que

$$D_{\mathbf{x}}(F)(\mathbf{h}) = \mathbf{x} \times L(\mathbf{h}) + \mathbf{h} \times L(\mathbf{x}).$$

**8 —** Dado $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geqslant 1, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ a norma usual em $\mathbb{R}^n$, com $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$. Prove que

$$D_{\mathbf{x}}(f)(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{x}\|},$$

para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, mas que $\mathbf{f}$ não é diferenciável no $\mathbf{0}$.

**9 —** Seja $v(r,t) = t^n \exp(-\frac{r^2}{4t})$. Calcule $n$ para que o campo escalar $v$ satisfaça a equação

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}).$$

**10 —** Considere duas funções $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Prove que $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

**11 —** Calcule $\nabla \cdot F$ e $\nabla \times F$ para os seguintes campos vetoriais:

a) $F(x,y,z) = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$

b) $F(x,y,z) = cos(xz)\mathbf{j} - sin(xy)\mathbf{k}$

c) $F(x,y,z) = (1, x + yz, xy - \sqrt{z})$

**12 —** Considere o campo de força central

$$\overrightarrow{g}(x,y) = f(\|\overrightarrow{r}\|)\overrightarrow{r},$$

onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável e $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. Calcule rot$\overrightarrow{g}$.

**13 —** Considere o escoamento bidimensional

$$\overrightarrow{v}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}.$$

Desenhe tal campo, calcule rot$\overrightarrow{v}$, div$\overrightarrow{v}$ e interprete.

**14 —** Mostre que qualquer campo vetorial da forma $F(x,y,z) = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$, onde $f, g, h$ são funções diferenciáveis, é irrotacional.

**15 —** Mostre que qualquer campo vetorial da forma $F(x,y,z) = f(y,z)\mathbf{i} + g(x,z)\mathbf{j} + h(x,y)\mathbf{k}$, onde $f, g, h$ são funções diferenciáveis, é incompressível.

**16 —** Calcule o Laplaciano das seguintes funções:

a) $f(x,y) = \arctan(y/x)$, com $y > 0$

b) $f(x,y) = xy$

c) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

d) $f(x,y) = \frac{1}{4}e^{x^2-y^2}$

**17 —** Seja $\phi(x,y) = f(x^2+y^2)$, onde $f(u)$ é uma função de uma variável real derivável até 2ª ordem. Suponha que $\nabla^2\phi = 0$.

a) Mostre que $uf''(u) = -f'(u), \ \ u > 0$.

b) Determine uma $f$ não-constante para que se tenha $\nabla^2\phi = 0$.

**18 —** Mostre que os operadores divergente e rotacional são lineares, ou seja, dados $u, v \in \mathbb{R}^3$ e constantes $a, b \in \mathbb{R}$, então:

a) $\nabla \cdot (au + bv) = a\nabla \cdot u + b\nabla \cdot v$

b) $\nabla \times (au + bv) = a\nabla \times u + b\nabla \times v$.

**19 —** Mostre que $\nabla \times (f\mathbf{u}) = f\nabla \times \mathbf{u} + (\nabla f) \times \mathbf{u}$

**20 —** Mostre que $\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot (\nabla \times u) - u\mathring{u} \cdot (\nabla \times v)$

**21 —** Se $f, g$ forem campos escalares e $F, G$ forem campos vetoriais, defina as operações $fF, F \cdot G$ e $F \times G$ por:

$$(fF)(x,y,z) = f(x,y,z)F(x,y,z)$$
$$(F \cdot G)(x,y,z) = F(x,y,z) \cdot G(x,y,z)$$
$$(F \times G)(x,y,z) = F(x,y,z) \times G(x,y,z).$$

Suponha que existam as derivadas parciais das funções envolvidas e são contínuas. Mostre que:

a) $div((\mathbf{F}) + G) = \text{div}\, F + \text{div}\, G$

b) $\text{rot}(F + G) = \text{rot}\, F + \text{rot}\, G$

c) $\text{rot}(fF) = f\, \text{rot}\, F + (\nabla f) \times F$

d) $\text{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

e) $\nabla \times (u \times v) = u(\nabla \cdot v) - v(\nabla \cdot u) + (v \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)v$, onde $u, v \in \mathbb{R}^3$

f) se $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ então $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}F) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}F) - \nabla^2 F$, onde $\nabla^2 F = (\triangle P, \triangle Q, \triangle R)$.

**22 —** Um campo vetorial é dito solenoidal se seu divergente for nulo. Mostre que se $u$ é irrotacional, sendo $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, então $u \times r$ é solenoidal.

**23 —** Mostre que se $u$ é um vetor constante então $\nabla \times (u \times r) = 2u$, sendo $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

**24 —** Mostre que se $u$ e $v$ são irrotacionais então $u \times v$ é solenoidal.

**25 —** A velocidade de um fluido bidimensional é dada por $v = v(x, y) = u(x, y)\overrightarrow{i} - v(x, y)\overrightarrow{j}$. Supondo que o fluido seja incompressível e irrotacional, prove que valem as condições de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

**26 —** Mostre que se $\phi$ é um campo escalar diferenciável então $\nabla \times (\phi \nabla \phi) = 0$.

# Respostas dos Exercícios

**7** Temos

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}+\mathbf{h})-F(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x}+\mathbf{h})\times L(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{x}\times L(\mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{x}+\mathbf{h})\times (L(\mathbf{x})+L(\mathbf{h}))-\mathbf{x}\times L(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x}\times L(\mathbf{h})+\mathbf{h}\times L(\mathbf{x})+\mathbf{h}\times L(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

Agora provaremos que $||\mathbf{h}\times L(\mathbf{h})|| = \mathbf{o}\left(||\mathbf{h}||\right)$ as $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$. Para terminar basta ver que $L(\mathbf{h})\to 0$. Esse fato pode ser utilizado, mas por completude o demonstraremos:

Para isso deixe

$$\mathbf{h} = \sum_{k=1}^{n} h_k \mathbf{e}_k,$$

onde os vetores $\mathbf{e}_k$ formam a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então

$$L(\mathbf{h}) = \sum_{k=1}^{n} h_k L(\mathbf{e}_k),$$

e logo pela desigualdade triangular e pela desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz,

$$\begin{aligned} ||L(\mathbf{h})|| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |h_k| ||L(\mathbf{e}_k)|| \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |h_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} ||L(\mathbf{e}_k)||^2\right)^{1/2} \\ &= ||\mathbf{h}||(\sum_{k=1}^{n} ||L(\mathbf{e}_k)||^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz,

$$||\mathbf{h}\times L(\mathbf{h})|| \leqslant ||\mathbf{h}|| ||L(\mathbf{h})| \leqslant ||\mathbf{h}||^2 |||L(\mathbf{e}_k)||^2)^{1/2} = \mathbf{o}\left(||\mathbf{h}||\right),$$

como queriamos.

**8** Assuma que $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$. Usaremos o fato que $(1+t)^{1/2} = 1+\frac{t}{2}+\mathbf{o}\left(t\right)$ as $t\to 0$.Assim temos

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= ||\mathbf{x}+\mathbf{h}||-||\mathbf{x}|| \\ &= \sqrt{(\mathbf{x}+\mathbf{h})\bullet(\mathbf{x}+\mathbf{h})}-||\mathbf{x}|| \\ &= \sqrt{||\mathbf{x}||^2+2\mathbf{x}\bullet\mathbf{h}+||\mathbf{h}||^2}-||\mathbf{x}|| \\ &= \frac{2\mathbf{x}\bullet\mathbf{h}+||\mathbf{h}||^2}{\sqrt{||\mathbf{x}||^2+2\mathbf{x}\bullet\mathbf{h}+||\mathbf{h}||^2}+||\mathbf{x}||}. \end{aligned}$$

As $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$,

$$\sqrt{||\mathbf{x}||^2+2\mathbf{x}\bullet\mathbf{h}+||\mathbf{h}||^2}+||\mathbf{x}|| \to 2||\mathbf{x}||.$$

Como $||\mathbf{h}||^2 = \mathbf{o}\left(||\mathbf{h}||\right)$ e $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$, temos

$$\frac{2\mathbf{x}\bullet\mathbf{h}+||\mathbf{h}||^2}{\sqrt{||\mathbf{x}||^2+2\mathbf{x}\bullet\mathbf{h}+||\mathbf{h}||^2}+||\mathbf{x}||} \to \frac{\mathbf{x}\bullet\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}+\mathbf{o}\left(||\mathbf{h}||\right),$$

provando a primeira afirmação

Para demonstrar a segunda afirmação, assuma que existe uma transformação linear $D_{\mathbf{0}}(f) = L$, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Tal que

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{0}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{0}) - L(\mathbf{h})\| = \mathbf{o}\left(\|\mathbf{h}\|\right),$$

as $\|\mathbf{h}\| \to 0$. Claramente $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, e assim, $D_{\mathbf{0}}(L)(\mathbf{0}) = L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Este fato implica que $\dfrac{L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \to D_{\mathbf{0}}(L)(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, as $\|\mathbf{h}\| \to 0$. Como $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \|0\| = 0$, $\mathbf{f}(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|$ isto implicaria em

$$\left|\left|\|\mathbf{h}\| - L(\mathbf{h})\right|\right| = \mathbf{o}\left(\|\mathbf{h}\|\right),$$

ou

$$\left|\left|1 - \frac{L(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}\right|\right| = \mathbf{o}\left(1\right).$$

Mas o lado esquerdo da expressão anterior $\to 1$ seria $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, e o lado direito $\to 0$ seria $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. O que é uma contradição, e logo a derivada não existe.