Lista 3

Cálculo Vetorial

Integrais de Linha e o Teorema de Green

Parametrizações

1 — Encontre uma parametrização apropriada para a curva suave por partes em $\mathbb{R}^3$.

a) intersecção do plano $z = 3$ com o cilindro elíptico
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

b) A interseção das superfícies $y = x$ e $z = x^3$, do ponto (-3, -3, 9) a (2, 2, 4).

c) O triângulo formado viajando do ponto (1, 2, 3) para (0, -2, 1), para (6, 4, 2) e de volta para (1, 2, 3).

Parte Técnica: para treinar cálculos de integral de linha

2 — Calcule as seguintes integrais de linha ao longo dos respectivos caminhos indicados:

a) $F(x, y) = (x^2 - 2xy)\mathbf{i} + (y^2 - 2xy)\mathbf{j}$, entre os pontos $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ ao longo da parábola $y = x^2$;

b) $F(x, y) = (y^2 - z^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, ao longo da trajetória $\gamma(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$;

c) $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (xz - y)\mathbf{k}$, ao longo do segmento de reta que liga $(0, 0, 0)$ e $(1, 2, 4)$;

d) $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (xz - y)\mathbf{k}$, ao longo da trajetória $\gamma(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^2\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$.

e) Um campo de forças F é dado por $F(x, y) = cxy\mathbf{i} + x^6y^2\mathbf{j}$, onde c é uma constante positiva. Essa força age em uma partícula que se move do ponto (0,0) à reta $x = 1$, ao longo de uma curva $y(x) = ax^b$, onde $a > 0$ e $b > 0$. Encontre o valor de a como função de c, para que o trabalho realizado pela força F seja independente de b.

3 — Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, onde C é o quadrado de vértices (1,0), (0,1), (-1, 0) e (0,-1), percorrido no sentido anti-horário.

4 — Calcule $\displaystyle\int_\gamma dx + y\,dy + dz$, onde γ é a intersecção do plano $y = x$ com a superfície $z = x^2 + y^2$, $z \leqslant 2$, sendo o sentido de percurso do ponto $(-1, -1, 2)$ para o ponto $(1, 1, 2)$.

5 — Determine se os seguintes campos são conservativos. No caso afirmativo, determine uma função potencial.

a) $F(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

b) $F(x, y, z) = ye^{-x}\mathbf{i} + e^{-x}\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$.

Teorema de Green

6 — Use o teorema de Green para calcular a área da região limitada pelo eixo x e pelo arco da ciclóide:

$$x = t - \sin(t), \quad y = 1 - \cos(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

7 — Use o Teorema de Green para avaliar as integrais de linha ao longo das curvas dadas orientadas positivamente.

a) $\oint_\gamma x^2y^2 dx + 4xy^3 dy$; γ é o triângulo com vértices (0,0), (1,3) e (0,3).

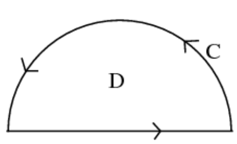
b) $\oint_\gamma (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos(y^2))dy$; γ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$.

8 — Verifique o teorema de Green para a região D delimitada pelas retas $x = 2$, $y = 0$, $y = 2x$ e as funções $f(x, y) = (2x^2)y$, $g(x, y) = 2x^3$.

9 — Calcule

$$\oint_C y^2 \; dx + 3xy \; dy$$

onde C é o fronteira orientada no sentido anti-horário da metade superior do disco unitário, utilizando o Teorema de Green.



de duas maneiras diferentes.

a) diretamente

b) usando o teorema de Green

10 — Dado $P \subseteq \mathbb{R}^2$ um polígono não necessariamente convexo,cujos vértices ordenados no sentido horário são, $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$. Então

$$\text{area}\,(P) = \frac{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_Ny_1 - x_1y_N)}{2}.$$

(Ps: Procure a explicação do nome dessa fórmula)

Parte Conceitual

11 — Mostre que existem naturais m e n para os quais a forma diferencial

$$3x^{m+1}y^{n+1}dx + 2x^{m+2}y^n dy$$

é exata.

12 — Considere a forma diferencial $u(x, y)P(x, y)dx + u(x, y)Q(x, y)dy$, onde P, Q e u são supostas de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Prove que uma condição necessária para que a forma diferencial seja exata em Ω é que

$$\frac{\partial u}{\partial y}P - \frac{\partial u}{\partial x}Q = u\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) \text{ em } \Omega.$$

13 — Determine $u(x, y)$ que só depende de x tal que $(x^3 + x + y)u(x, y)dx - xu(x, y)dy$ seja exata.

14 — Suponha $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ num aberto $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Prove que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ é irrotacional se, e somente se,

$$\oint_\gamma P dx + Q dy = 0,$$

para toda curva γ, fechada, simples, orientada positivamente e fronteira de um compacto $K \in \Omega$ de $\mathbb{R}^2$.

15 — Prove que se $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ for constante sobre $\operatorname{Im}\gamma$ então o fluxo de $\mathbf{F}$ através de γ é o produto de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ pelo comprimento de γ, onde $\mathbf{n}$ é a normal a γ.

16 — Seja $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha}\mathbf{i} + \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^\alpha}\mathbf{j}$. Determine α para que $\mathbf{F}$ seja solenoidal.

17 — Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ duas funções a valores reais, de classe $\mathcal{C}^2$, no aberto Ω de $\mathbb{R}^2$. Seja $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ uma curva regular, fechada, simples, orientada no sentido anti-horário, fronteira de um compacto K, com interior não vazio e contido em Ω. Seja $\mathbf{n}$ a normal exterior a K. Prove que:

a) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_K \Delta g \; dxdy$ $\left(\dfrac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\right.$ é a derivada direcional de g na direção $\mathbf{n}$ e Δg é o laplaciano de $\left.g\right)$.

b) $\displaystyle\oint_\gamma f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_K (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \; dxdy$ (**Primeira identidade de Green**).

c) $\displaystyle\oint_\gamma f\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} ds = \iint_K (f\Delta f + \|\nabla f\|^2) \; dxdy$

d) $\displaystyle\oint_\gamma \left(f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\right) ds = \iint_K (f\Delta g - g\Delta f) \; dxdy$ (**Segunda identidade de Green**).

18 — Seja $v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ no aberto Ω e sejam γ e K como no exercício anterior. Prove que se $\Delta v = 0$ no interior de K e $v(\gamma(t)) = 0$ em [a,b], então $v(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in K$.

Aplicações dos conceitos de integral de linha

19 — Experimentos mostram que uma corrente estacionária I em um fio comprido produz um campo magnético $\mathbf{B}$ que é tangente a qualquer circunferência contida num plano perpendicular ao fio e cujo centro pertence ao eixo do fio. A Lei de Ampère relaciona a corrente elétrica aos seus efeitos magnéticos e afirma que

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 I,$$

onde I é a corrente total que passa através de qualquer superfície limitada por uma curva fechada C e μ_0 é uma constante chamada de permeabilidade de espaço livre. Tomando C como uma circunferência com raio r, mostre que a magnitude $B = \|\mathbf{B}\|$ do campo magnético a uma distância r do centro do fio é

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

20 —

a) Suponha que $\mathbf{F}$ represente o campo força inverso quadrado, isto é,
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$
para alguma constante c, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Encontre o trabalho feito pela força $\mathbf{F}$ para mover um objeto de um ponto P_1 ao longo de um caminho até um ponto P_2, em termo das distâncias d_1 e d_2 destes pontos à origem.

b) Um exemplo de um campo força inverso quadrado é o campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$. Encontre o trabalho feito pelo campo gravitacional quando a Terra se move do afélio (em uma distância máxima de $1,52.10^8$ Km do Sol) para o periélio (em uma distância mínima de $1,47.10^8$ Km do Sol). Use os valores $m = 5,97.10^{24}$ Kg, $M = 1,99.10^{30}$ Kg e $G = 6,67.10^{-11}$ N.m^2/Kg^2.

21 — A integral de linha de um campo escalar F sobre um caminho γ em relação ao comprimento de arco é definida por:

$$\int_\gamma F(X)ds = \int_a^b F(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt.$$

Calcule a integral de linha em relação ao comprimento de arco $\displaystyle\int_\gamma 2x ds$, onde γ é o caminho formado pelo arco C_1 da parábola $y = x^2$ de (0,0) a (1,1), seguido de um segmento de reta C_2 de (1,1) a (2,2).

22 — Um fio delgado no espaço pode ser pensado como a imagem de uma curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se $\delta(x,y,z)$ é a densidade linear (massa por unidade de comprimento) do fio no ponto (x,y,z), a massa do fio é definida pela integral de linha da densidade em relação ao comprimento de arco $M =$

$\int_\gamma \delta(x, y, z)\, ds$. Calcule a massa de um fio dado pela imagem da curva $\gamma(t) = (t, t, t)$, $t \in [0, 2]$, de densidade linear $\delta(x, y, z) = xyz$.

Respostas dos Exercícios

10 Deixe Ω ser a área do polígono. Temos então que

$$A = \iint_{\Omega} dx\ dy.$$

Usando o teorema de Green para área temos

$$\iint_{\Omega} dxdy = \int_{\partial\Omega} \frac{x\,dy}{2} - \frac{y\,dx}{2}.$$

Podemos escrever $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} L(i)$, onde $L(i)$é o segmento de reta (x_i, y_i) to (x_{i+1}, y_{i+1}). Usando essa notação podemos escrever

$$\int_{\partial\Omega} \frac{x\,dy}{2} - \frac{y\,dx}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{L(i)} x\,dy - y\,dx.$$

Parametrizando os segmentos de reta temos

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{1} (x_i + (x_{i+1} - x_i)t)(y_{i+1} - y_i) - (y_i + (y_{i+1} - y_i)t)(x_{i+1} - x_i)\,dt.$$

Logo

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}[(x_i + x_{i+1})(y_{i+1} - y_i) - (y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)].$$

Finalmente simplificando obtemos o resultado

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i).$$

17 a.) Uma curva fechada divide o plano em dois pedaços. Um limitado e um ilimitado. Se você considerar o pedaço interior unido com a curva, temos um conjunto fechado e limitado. Um conjunto fechado e limitado é denominado compacto.

Suponha que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, então $\gamma' = (x', y')$. Dessa forma $n = (-y', x')$ e $\hat{n} = \frac{n}{\|n\|}$

Observe ainda que

$$ds = \left\|\gamma'\right\|\ dt = \|n\|\ dt$$

Finalmente observe que

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} = \nabla g \cdot \hat{n} = (-\partial_1 g y' + \partial_2 g x')\frac{1}{\|n\|}$$

e assim

$$\oint_{\gamma} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}}\ ds = \oint_{\gamma} -\partial_1 g y' + \partial_2 g x'\ dt$$

$$\oint_{\gamma} -\partial_1 g dy + \partial_2 g dx$$

O resultado segue direto do Teorema de Green.