Lista 4

Cálculo Vetorial

Integrais de Superfícies e os Teoremas de Gauss e de Stokes

1 — Descreva as parametrizações e calcule o vetor normal associado a essas parametrizações para as seguintes superfícies

a) Esfera

b) Toro

c) Gráfico da função $f(x,y) = x^2 + 1$ sobre o triângulo de vértices $(0,0), (1,0)$ e $(0,4)$

d) Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

e) Cilindro circular $x^2 + y^2 = r^2$ com $a \leqslant z \leqslant b$.

2 — Calcule a área das seguintes superfícies usando integral de superfície

a) Esfera .

b) Toro

c) Cilindro circular $x^2 + y^2 = r^2$ com $a \leqslant z \leqslant b$.

3 — Calcule o fluxo do campo vetorial

a) $F(x,y,z) = (xz, yz, -z^2)$ para fora da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = 1 + x^2 + y^2,$$
$$2 \leqslant z \leqslant 3\}.$$

b) $F(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$ e S é a parte do cone

$$\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\mathbf{i} + u\sin v\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}$$

com $0 \leqslant u \leqslant \sin v$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$ com o vetor normal apontado para cima.

4 — Calcule o fluxo do campo de vetores

$$F(x,y,z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x,y,z)$$

através do sólido R limitado pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

5 — Utilize o Teorema da Divergência para calcular as integrais de superfície $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ do campo de vetor $\mathbf{f}(x,y,z)$ ao longo da superfície S.

a) $\mathbf{f}(x,y,z) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$

b) $\mathbf{f}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, S : Bordo de um cubo sólido $S = \{(x,y,z) : 0 \leqslant x, y, z \leqslant 1\}$

c) $\mathbf{f}(x,y,z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

d) $\mathbf{f}(x,y,z) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

6 — Um campo escalar ϕ satisfaz $\|\nabla\phi\|^2 = 4\phi$ e $\nabla \cdot (\phi\nabla\phi) = 10\phi$. Calcule $\iint_S \frac{\partial\phi}{\partial n} dS$, onde S é a esfera unitária e n é a normal à esfera.

7 — Seja

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

onde q é uma constante não-nula.

a) Calcule $\nabla \cdot \overrightarrow{E}$;

b) Calcule o fluxo de $\overrightarrow{E}$ através da superfície esférica $x^2+y^2+z^2=1$, com normal $\overrightarrow{n}$ apontando para fora da esfera;

c) Calcule o fluxo de $\overrightarrow{E}$ através da superfície esférica $x^2+y^2+(z-2)^2=1$, com normal $\overrightarrow{n}$ apontando para fora da esfera.

8 — Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^3$ e seja $\overrightarrow{u}$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ em Ω. Suponha que

$$\iint_\sigma \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = 0,$$

para toda superfície esférica σ, com normal exterior $\overrightarrow{n}$, contida em Ω. Prove que $\overrightarrow{u}$ é solenoidal em Ω.

9 — Seja $\overrightarrow{F} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$ de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$. Seja σ a fronteira do conjunto

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2-1 \leqslant z \leqslant 1-x^2-y^2\},$$

com normal $\overrightarrow{n}$ apontando para fora de K. Mostre que $\iint_\sigma \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = 0$.

10 — Mostre que o Teorema de Green é um caso especial do Teorema de Stokes.

11 — Seja $\overrightarrow{F}$ um campo de classe $\mathcal{C}^1$ num aberto contendo a fronteira do cubo $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$. Seja $\overrightarrow{n}$ a normal apontando para fora do cubo. Mostre que $\iint_\sigma \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS = 0$.

12 — Seja S a superfície do cubo unitário $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, e seja $\mathbf{n}$ o vetor unitário normal exterior a S. Se $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, use o teorema do divergente para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$. Verifique o resultado calculando a integral de superfície diretamente.

13 — Use o Teorema de Stokes para mostrar as igualdades:

a) $\int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = 0$, onde C é a curva de intersecção do cilindro $x^2+y^2=2y$ com o plano $y=z$;

b) $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \pi a^2\sqrt{3}$, onde C é a curva de intersecção da esfera de equação $x^2+y^2+z^2=a^2$ com o plano $x+y+z=0$.

c) $\int_C -y^2dx + x\,dy + z^2dz = \pi$, onde C é a curva de intersecção do plano $y+z=2$ e do cilindro $x^2+y^2=1$.

14 — Mostre que o fluxo do campo vetorial $\overrightarrow{F} = (xy, y^2+e^{xz^2}, sen(xy))$, sobre a superfície S dada pela fronteira da região delimitada pelo cilindro parabólico $z=1-x^2$ e pelos planos $z=0, y=0$ e $y+z=2$, em relação à normal exterior, é igual a $\dfrac{184}{35}$.

15 — Seja n a normal unitária exterior à superfície fechadas S que contem o volume V, do tipo descrito no teorema de Gauss. Seja f uma função harmônica, $\nabla^2 f = 0$, com segundas derivadas contínuas. Mostre que

$$\iint\limits_S f\frac{\partial f}{\partial n} dS = \iiint\limits_V \|\nabla f\|^2\, dx\,dy\,dz.$$

Respostas dos Exercícios

6 Observe que:

$$\iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \iint_S \nabla\phi \cdot n dS = \iiint_V \nabla(\nabla\phi) dV$$

e que

$$\nabla(\phi\nabla\phi) = (\nabla\phi)^2 + \phi\nabla^2\phi$$

8 Dica: Use o Teorema de Gauss.
e o seguinte resultado para integrais triplas:
se f é uma função contínua e $\iiint_U f dV = 0$ para todo U então f nula.

13 **b.)** Dica: Integre no disco.
Observe que $\nabla \times (y, z, x) = (-1, -1, -1)$ e que o vetor normal ao disco é $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$
Logo queremos integrar $\sqrt{3}$ ao longo do disco. Observe que o disco tem raio a. Assim
$\int_C y dx + z dy + x dz = \int_D \sqrt{3} dx dy = \pi a^2 \sqrt{3}$