Lista 5

Cálculo Vetorial

Green, Gauss Stokes: Aplicações

1 — Calcule a área da superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, situada no interior do cilindro $x^2 + y^2 = ay$, com $a > O$

2 — Calcular a área da porção do paraboloide $x^2 + z^2 = 2ay$ cortada pela plano $y = a$.

3 — Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) seja $u(x, y, z)$. O fluxo de calor é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K\nabla u,$$

sendo K é uma constante denominada condutividade. A taxa de transmissão de calor através da superfície S no corpo é dada por

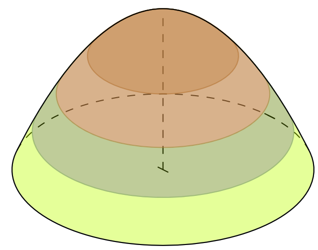
$$\iint_S \mathbf{F}\dot{d}S = -K \iint_S \nabla \mathbf{u}\dot{d}S$$

Supondo que a temperatura u em uma bola metálica de raio R é proporcional ao quadrado da distância ao centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera S de raio $a < R$ e mesmo centro que a bola.

4 — Considere S uma superfície orientada de bordo C e sejam $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $\mathbf{u}$ um vetor constante. Considere o campo $\mathbf{F} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}$. Mostre que

$$\int_C \mathbf{F} d\ell = 2 \iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

5 — Considere a superfície S descrita pelo parabalóide $z = 16 - x^2 - y^2$ para $z \geqslant 0$, como mostrado na figura abaixo.



Considere a seguinte orientação: deixe $\hat{n}$ denotar o vetor normal unitário para S com componente z positiva. A intersecção da superfície S com o plano z será uma curva C.
Verifique o Teorema de Stokes para a superfície S descrita acima e o campo vetorial $\mathbf{F} = (3y, 4z, -6x)$.

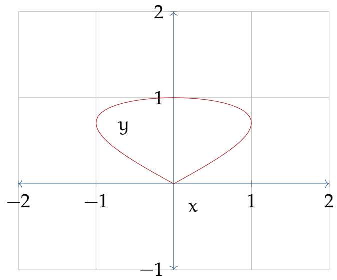
6 — Para uma região R limitada por uma curva simples C, Mostre que a área A de R é dada por

$$A = -\oint_C y\,dx = \oint_C x\,dy = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx\,,$$

onde C é orientada de modo que a região R fique sempre a esquerda.) (*Dica Use o teorema de Green e o fato que* $A = \iint_R 1\,dA$.)

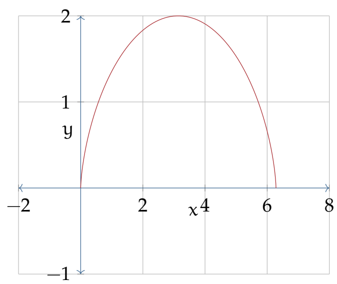
7 — Use o exercício anterior para calcular a área:

a) da região D limitada pela curva γ parametrizada por $\gamma(t) = \operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ para $0 \leqslant t \leqslant \pi$.



b) área da região delimitada pelo eixo x e o arco de ciclóide:

$$x = t - \text{sen}(t), \quad y = 1 - \cos(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$



8 — Se $\vec{F}$ é uma força dada por $\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})$, determine:

a) $\nabla \cdot \vec{F}$;

b) $\nabla \times \vec{F}$;

c) um potencial escalar $\phi(x, y, z)$ tal que $\vec{F} = -\nabla\phi$;

d) para qual valor de n o potencial escalar diverge em ambos na origem e no infinito?

9 — A origem do sistema de coordenadas cartesianas está no centro da Terra. Suponha que a Lua esteja sobre o eixo z a uma distância R da Terra (centro-a-centro). A força de maré exercida pela Lua sobre uma partícula na superfície da Terra (ponto (x, y, z)) é dada por

$$\vec{F} = GMm\left(-\frac{x}{R^3}, -\frac{y}{R^3}, \frac{2z}{R^3}\right)$$

Encontre o potencial escalar para esta força de maré.

10 — Seja $\vec{B}$ o campo vetorial dado por $\vec{B} = \nabla u \times \nabla v$, onde u e v são funções escalares.

a) mostre que $\vec{B}$ é solenoidal;

b) mostre que $\vec{A} = \frac{1}{2}(u\nabla v - v\nabla u)$ é um potencial vetor para $\vec{B}$.

11 — Considere as seguintes equações de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \text{onde } \vec{E} \text{ é o campo elétrico.}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \text{onde } \vec{B} \text{ é a indução magnética.}$$

a) Por que existe um potencial vetor eletromagnético $\vec{A}$ para $\vec{B}$, isto é, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$?

b) Mostre que $\vec{A}$ não é único. Sugestão: considere $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$, onde ψ é uma função escalar.

c) Mostre que $\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Mostre que isto implica que existe uma função escalar ϕ tal que $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi$.

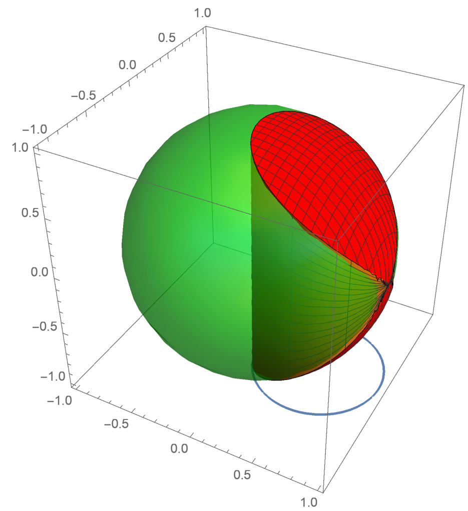
d) Sejam $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$ e $\phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$. Mostre que $\vec{E}' = \vec{E}$.
Conclusão: $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ficam invariantes pelas transformações de Gauge (ou calibre) $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi$ e $\phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$.

12 — Use as equações de Maxwell no vácuo e na ausência de fontes, para mostrar que os campos **E** e **B** satisfazem a equação de onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t}\right)\mathbf{E} = 0\,, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t}\right)\mathbf{B} = 0\,,$$

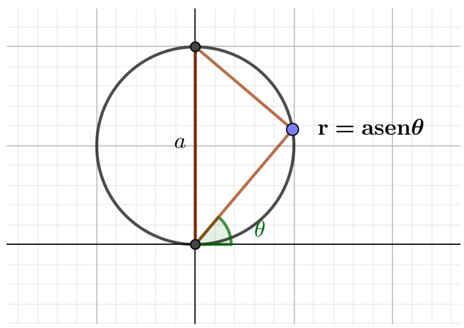
isto é, mostre que campos eletromagnéticos se propagam com velocidade c no vácuo.

Respostas dos Exercícios



1

O cilindro delimita um círculo no plano



que pode ser descrito como $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant r \leqslant a \operatorname{sen} \theta$ em coordenadas polares
O vetor normal fundamental é dado por $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$
e logo

$$A = 2 \iint \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

Convertendo para coordenadas polares temos

$$\begin{aligned}
A &= 2 \int_0^{\pi} \int_0^{a\operatorname{sen}(\theta)} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} drd\theta && (1) \\
&= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a\cos\theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} \cdot r \cdot drd\theta && (2) \\
&= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[-a\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^{a\cos\theta} d\theta && (3) \\
&= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -a^2 \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} - \left(-a^2 \right) d\theta && (4) \\
&= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2 - a^2 |\operatorname{sen}\theta| d\theta && (5)
\end{aligned}$$

e assim

$$A = 4\int_0^{\pi/2} a^2 - a^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \tag{6}$$

$$= 4a^2 \left[1 - \operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi/2} \tag{7}$$

$$= a^2 \left(2\pi - 4\right) \tag{8}$$

7 **a.)** $4/3$
b.) 3π

11 **a.)** use o Teorema de Helmholtz. Observe que queremos apenas a existência.
c.) use o Teorema de Helmholtz. Observe que queremos apenas a existência.