Lista 7

Cálculo Vetorial

Tensores

Tensores Abstratos

1 — Prove que o conjunto dos covetores formam um espaço vetorial.

2 — Prove a dimensão do espaço dos covetores é n.

3 — Escreva uma aplicação trilinear $T : V \times V \times V \to \mathbb{R}$ em termos de suas componentes numa base.

4 — Qual a dimensão do espaço das aplicações trilineares?

5 — Ache um tensor de ordem 2 em $\mathbb{R}^3$ que não possa ser escrito como $u \otimes v$, com $u, v \in \mathbb{R}^3$.

6 — Dado a matriz G que representa uma forma bilinear na base E e dado M a matriz mudança de base de E para F, encontre a matriz que representa essa forma bilinear na base F.

7 — Se $B^{ijk} = -B^{jki}$, mostre que $B^{ijk} = 0$. Use esse fato para mostrar que qualquer tensor do tipo $(3, 0)$ que é simétrico para o primeiro par de índices e anti-simétrico no último par de índices se anula.

Tensores em Coordenadas

8 — Simplifique as expressões:

a) δ_{ii};
b) $\delta_{ij}\delta_{ij}$;
c) $\epsilon_{ijk}\delta_{kn}$;
d) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$.

9 — Use a identidade $\epsilon - \delta$ para simplificar:

a) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{jik}$;
b) $\epsilon_{ijk}\epsilon_{jki}$.

10 — Use métodos de tensores para mostrar as seguintes identidades vetoriais:

a) $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$;
b) $\nabla \times (\phi u) = \phi \nabla \times u + (\nabla \phi) \times u$;
c) $\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot (\nabla \times v)$
d) $\nabla \times (u \times v) = (v \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)v + u\nabla \cdot v - v\nabla \cdot u$.

11 — Escreva as seguintes identidades em notação indicial

a) $\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}$
b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
c) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$
d) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$

12 — Use notação indicial para provar que:

a) $\nabla \times \nabla \phi = 0$;

b) $\nabla \cdot \nabla \times \overrightarrow{F} = 0$.

13 — Use notação indicial para representar as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \qquad \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2.$$

14 — Dados dois tensores A_r^{pq} e B_r^{pq} prove que sua soma e subtração são tensores do mesmo tipo.

15 — Dados dois tensores A_r^{pq} e B_t^s prove que $C_{rt}^{pqs} = A_r^{pq}B_t^s$ é um tensor.

16 — Prove que a contração de A_r^p é um escalar.

17 — Prove que se um tensor é simétrico com respeito as coordenadas p e q num sistema de coordenadas, ele será simétrico com respeito as coordenadas p e q em qualquer sistema de coordenadas.

18 — Prove que todo tensor pode ser escrito como soma de um tensor simétrico e um antissimétrico com respeito as coordenadas p e q.

19 — Verifique as identidades:

a) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$

b) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$

c) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$