Universidade Federal do ABC

Lista 8
Cálculo Vetorial

Campos Tensoriais

1 — Determine se as seguintes grandezas são tensores. Diga se são covariantes ou contravariantes e de o seu posto

a) dx^k

b) $\dfrac{\partial\phi(x^1,\dots x^n)}{\partial x^k}$

2 — Um tensor covariante tem componentes $xy, 2y - z^2, xz$ em coordenadas retangulares. Encontre suas componentes em coordenadas esféricas.

3 — Considere as transformações entre dois sistemas de coordenadas retangulares K e K':

$$\begin{aligned} x'_k &= A_{k'l}x_l + x_{0k} \\ x_k &= A_{l'k}x'_l + x'_{0k} \end{aligned}$$

em que $A_{k'l} = \mathbf{i}'_k \cdot \mathbf{i}_l$, demonstre as relações de ortogonalidade

$$A_{k'l}A_{k'm} = \delta_{lm}\,,\ A_{k'm}A_{l'm} = \delta'_{kl}$$

4 — Num certo sistema de unidades, a tensão eletromagnética M_{ij} é dada por

$$M_{ij} = E_iE_j + B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(E_kE_k + B_kB_k),$$

onde os campos elétrico e magnético, E e B, são tensores de primeira ordem. Mostre que M_{ij} é um tensor de segunda ordem.

5 — Mostre que a aceleração de uma partícula de posição (x_1, x_2, x_3) é representada pelas componentes de um tensor de primeira ordem no espaço. Este tensor é isotrópico?

6 — A todo tensor anti-simétrico A_{ij} de segunda ordem em três dimensões podemos associar um pseudotensor p_i dado por

$$p_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}A_{lm}.$$

Chamamos p_k de o **dual** a A_{jk}. Mostre que se $p_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}A_{lm}$ então $A_{ij} = \varepsilon_{ijk}p_k$.
Sugestão: Contraia ε_{ijk} com p_k e use a identidade $\varepsilon - \delta$.

7 —

a) Escreva as formas indiciais dos Teoremas de Green (Stokes no plano), Gauss (divergência) e Stokes.

b) Escreva também a forma indicial da Primeira Identidade de Green.

8 — Calcule os 6 símbolos de Christoffel para o sistema de coordenadas definido por

$$x = 2e^{u-v}, y = -e^{3u+2v}.$$

9 — Considere o tensor cartesiano de segunda ordem cujas componentes são dadas $T_{ij} = \delta_{ij} - 3x_ix_j$. Mostre que este tensor é simétrico e avalie as seguintes integrais sobre a esfera unitária:

a) $\int T_{ij}\, dS$

b) $\int T_{ik} T_{kj}\, dS$.

10 — Considere a transformação de coordenadas

$$\begin{cases} x'_1 &= \cos\theta x_1 - \sin\theta x_2 \\ x'_2 &= \sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x'_k = A_{k'l} x_l\,,\ \ l = 1,2$$

Mostre que:

a) os coeficientes $A_{k'l}$ da transformação de coordenadas satisfazem as relações de ortogonalidade da questão 4 para $i, k, l, m = 1, 2$.

b) as grandezas T_{ij} dadas por

$$\left[T_{ij}\right] = \begin{pmatrix} (x_2)^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & (x_1)^2 \end{pmatrix}$$

se transformam como as componentes de um tensor cartesiano de segunda ordem pelas transformações do item (a).

11 — Encontre as componentes da velocidade $\mathbf{v}$ e da aceleração $\mathbf{a}$ de uma partícula com respeito a uma base local ortonormal $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ de um sistema de coordenadas curvilíneas q^1, q^2, q^3.

12 — Sejam A_{ikl} as componentes de um tensor de terceira ordem. Mostre que a contração $A_{k\ l}^{\ k} = g^{ik} A_{ikl}$ formam as componentes de um vetor.

13 — Seja $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, ou em componentes,

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k. \tag{1}$$

Considere uma mudança de base dada por uma matriz A.

a) Mostre que $\varepsilon_{pqr} \det(\mathsf{A}) = \varepsilon_{ijk} \mathsf{A}_i^p \mathsf{A}_j^q \mathsf{A}_k^r$

b) Mostre que $\varepsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k$ muda de coordenadas como $\tilde{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \det(\mathsf{A})$

c) Defina $c = a \times b$. Mostre que $\tilde{c}_i = (\det \mathsf{A})\, \mathsf{A}_{ik} c_k$.

d) Conclua que o símbolo de Levi-Civita ε_{ijk} é um pseudo-tensor cartesiano constante de ordem 3.

14 — Determine os símbolos de Christoffel Γ^1_{11} e Γ^1_{22} para as coordenadas coordenadas cilíndricas elípticas equações

$$x = a\cosh u \cos v, \quad y = a \sinh u \sin v, \quad z = z$$

$(u \geqslant 0, 0 \leqslant v < 2\pi, a > 0$ constante $)$.

15 — Escreva a derivada covariante em coordenadas cilíndricas.

16 — Encontre a lei de transformação do símbolo de Christoffel $\Gamma^i_{\ \kappa j}(x)$ por mudanças de coordenadas $x \mapsto x'(x)$.

17 — Mostre que $\nabla_k g_{ij} = 0$, em que g_{ij} são as componentes do tensor métrico.

18 — Prove que se F_{ik} é um tensor antissimétrico então

$$T_{ijk} = \partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij}$$

é um tensor.

19 — Calcule o tensor de inercia de um paralelepípedo de densidade uniforme, massa M e lados a, b, c

a) em torno de seu ponto central

b) em torno de um de seus vértices.

Respostas dos Exercícios

13 a.) Lembre que

$$\det(\mathsf{A}) = \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\mathsf{A}_{ip}\mathsf{A}_{jq}\mathsf{A}_{kr}$$

multiplique ambos os lados por ε_{pqr} e lembre se que

$$\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{pqr} = 6$$

b.)
Defina

$$\varepsilon_{ijk} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k$$

Mudando de coordenadas teremos $\tilde{\varepsilon}_{pqr} = \varepsilon_{ijk}\mathsf{A}_i^p\mathsf{A}_j^q\mathsf{A}_k^r$. Conclua assim que $\tilde{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk}\det(\mathsf{A})$
c.)
Seja

$$a_j = \mathsf{A}^{-1}_{jm}\tilde{a}_m \qquad b_k = \mathsf{A}^{-1}_{kn}\tilde{b}_n$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{b}})_i &= \tilde{\varepsilon}_{ijk}\tilde{a}_j\tilde{b}_k && (2)\\
&= \det(\mathsf{A})\ \ \varepsilon_{pqr}\ \ \mathsf{A}_{pi}\ \ \mathsf{A}_{qj}(\mathsf{A}^{-1})_{jm}\ \ \mathsf{A}_{rk}(\mathsf{A}^{-1})_{kn}\ \ a_m\ \ b_n && (3)\\
&= \det(\mathsf{A})\ \ \varepsilon_{pqr}\ \ \mathsf{A}_{pi}\ \ \delta_{qm}\ \ \delta_{rn}\ \ a_m\ \ b_n && (4)\\
&= \det(\mathsf{A})\ \ \mathsf{A}_{pi}\ \ \varepsilon_{pqr}a_q b_r && (5)\\
&= \det(\mathsf{A})\ \ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_p\mathsf{A}_{pi} && (6)
\end{aligned}$$

14

$$\begin{aligned}
x &= a\cosh u \cos v && (7)\\
y &= a\sinh u \sin v && (8)\\
z &= z && (9)
\end{aligned}$$

Os fatores de escala são

$$\begin{aligned}
h_u &= h_v = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} && (10)\\
h_z &= 1 && (11)
\end{aligned}$$

Logo

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} & 0 & 0 \\ 0 & a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando que

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(g_{\delta\gamma,\beta} + g_{\beta\delta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\delta}\right)$$

Calcularemos por exemplo

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{1\delta} \left(g_{\delta 1,1} + g_{1\delta,1} - g_{11,\delta} \right)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11} \left(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(g_{21,1} + g_{12,1} - g_{11,2} \right) + \frac{1}{2} g^{13} \left(g_{31,1} + g_{13,1} - g_{11,3} \right)$$

Os termos não diagonais são nulos e assim

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11} g_{11,1}$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}} \partial_u a \sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$$

$$\frac{\cosh(u)\ \sinh(u)}{\sin(v)^2 + \sinh(u)^2}$$

16 Usaremos a notação

$$f_{,i} = \partial_i f \tag{12}$$

O inverso do tensor métrico muda de coordenadas:

$$\tilde{g}^{\mu\lambda} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\delta} g^{\alpha\delta}$$

Calculando as derivadas parciais do tensor métrico temos

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\lambda\kappa,\nu} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} \left(\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\kappa} g_{\delta\gamma} \right) \\ &= \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\kappa} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\delta\gamma,\beta} + g_{\delta\gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu} \left(\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\kappa} \right) \end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{\nu\lambda,\kappa} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\lambda} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\kappa} g_{\beta\delta,\gamma} + g_{\beta\delta} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\kappa} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\lambda} \right)$$

$$\tilde{g}_{\nu\kappa,\lambda} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\kappa} \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^\lambda} g_{\beta\gamma,\delta} + g_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\lambda} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\kappa} \right)$$

Substituindo em

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\kappa} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\tilde{g}_{\lambda\kappa,\nu} + \tilde{g}_{\nu\lambda,\kappa} - \tilde{g}_{\nu\kappa,\lambda} \right)$$

e usando que

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(g_{\delta\gamma,\beta} + g_{\beta\delta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\delta} \right)$$

teremos

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\kappa} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \left[\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\kappa} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\kappa} \right]$$