Lista 1 - Álgebra Linear

Espaços Vetoriais

1 — Para os conjuntos seguintes, determine se os conjuntos dados são espaços vetoriais reais, se a adição e a multiplicação forem as usuais. Para aqueles que não forem diga quais axiomas de espaços vetoriais não são satisfeitos.

a) O conjunto dos polinômios de grau menor igual a n

b) O conjunto de todas as funções reais tais que $f(0) = f(1)$

c) O conjunto das funções racionais

d) O conjunto das funções tais que $f(0) = 1 + f(1)$

e) O conjunto das funções reais crescentes.

f) O conjunto das funções reais pares.

g) O conjunto das funções reais ímpares.

h) O conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ tais que $\int_0^1 f(x)dx = 0$

i) O conjunto das funções contínuas em $[0, 1]$ tais que $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$

j) O conjunto dos vetores (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tais que $z = 0$

k) O conjunto dos vetores (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tais que $x = 0$ ou $y = 0$

l) O conjunto dos vetores (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ que são múltiplos de $(1, 2, 3)$

m) O conjunto dos vetores em $\mathbb{R}^3$ que são combinações dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

n) O conjunto das matrizes 2×2 cujo traço é zero

o) O conjunto das matrizes 2×2 cujo determinante é zero

p) O conjunto das matrizes 2×2 que são simétricas,i.e, $A = A^t$

q) O conjunto dos vetores (x, y, z) que satisfaz a equação linear $5x + 2y + 3z = 0$

r) O conjunto dos vetores (x, y, z) que satisfaz a equação linear $a_1x + a_2y + a_3z = 0$

s) O conjunto dos vetores (x, y, z) que satisfazem as equações lineares $5x + 2y = 0$ e $z = 0$

t) O conjunto de pares de números reais em $\mathbb{R}^2$ da forma $(0, y)$.

u) O conjunto de todas as matrizes 2×2 da forma

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix}$$

v) O conjunto das matrizes 3x3 triangulares superiores, i.e, o conjunto das matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

w) O conjunto das matrizes 3x3 triangulares estritamente superiores, i.e, o conjunto das matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x) $V = \mathbb{R}^3$ com as operações

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \text{ e } \lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, x_2, x_3).$$

2 — Seja V um espaço vetorial. Use os axiomas de espaço vetorial para provar que se $v \in V$ e $n \in \mathbb{N}$ então

$$nv = \underbrace{v + \ldots + v}_{n \text{ parcelas}}.$$

3 — Seja V um espaço vetorial. Sejam $u, v \in V$ não nulos. Prove que v é múltiplo de u se e somente se, u é múltiplo de v.

4 — Em $\mathbb{R}^2$ mantenhamos a definição de produto αv de um número por um vetor mas modifiquemos, de três maneiras diferentes, a definição de soma $u + v$ de vetores $u = (x, y)$ e $v = (x', y')$. Em cada tentativa, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam válidos e quais são violados:

a) $u + v = (x + y', x' + y)$,

b) $u + v = (xx', yy')$,

c) $u + v = (3x + 3x', 5x + 5x')$.

5 — Defina a média $u \star v$ entre dois vetores u, v no espaço vetorial V pondo $u \star v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$. Prove que $(u \star v) \star w = u \star (v \star w)$ se e somente se, $u = w$.

6 — Dados os espaços vetoriais V_1, V_2, considere o conjunto $V = V_1 \times V_2$ (produto cartesiano de V_1 por V_2), cujos elementos são os pares ordenados $v = (v_1, v_2)$, com $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Defina operações que tornem V um espaço vetorial. Verifique a validade de cada um dos axiomas.

7 — Dado $C[-1, 1]$ o espaço das funções contínuas em $[-1, 1]$. Quais dos seguintes funcionais sã o lineares

a) $f \to \int_{-1}^{1} f(x)dx$

b) $f \to \int_{-1}^{1} f^2(x)dx$

c) $f \to f(0)$ (delta de Dirac)

d) $f \to \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ com $g(x)$ uma função contínua fixa.

8 — Dado K^∞ o conjunto de todas as sequências com $a_i \epsilon K$ com adição o coordenada a coordenada e multiplicação o por escalares coordenada a coordenada. Quais dos seguintes conjuntos sã o subespaços:

a) O conjunto das sequências com apenas um número finito de coordenadas diferentes de zero.

b) Nenhuma coordenada igual a 1
Nos próximos itens $K = \mathbb{R}$

c) O conjunto das séries de Cauchy, ou seja, as sequencias tais que dado $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que
$|x_n - x_m| < \epsilon$ para $n, m > N$.

d) As sequências tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

e) As sequências limitadas.

9 — Dado K um corpo finito com q elementos. Quantos elementos possui o espaço vetorial K^n. Quantas soluções possui a equação $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$=0?

10 — Seja $P_n(x)$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes num corpo F de grau menor igual a n. Mostre que:

a) $1, x, ...x^n$ é uma base para L. As coordenadas do polinômio nessa base sã o os seus coeficientes.

b) $1, x-a, (x-a)^2, ...(x-a)^n$ uma base de L. Se char$(K) = p > n$ então as coordenadas do polinômio nessa base sã o $\{f(a), f'(a), \frac{f''(a)}{2}, ... \frac{f^n(a)}{n!}\}$

11 — Dado V um espaço vetorial sobre F. Prove que:

a) $0v = 0$ para todo $v \in V$. Descreva os diferentes significados de 0 nessa equação.

b) Se rv $= 0$então ou $r = 0$ ou $v = 0$.

c) Se rv $= v$ então ou $v = 0$ ou $r = 1$.

12 — Prove que a intersecção de subespaços vetoriais é um subespaço vetorial.

13 —

a) Prove que os únicos subespaços de $\mathbb{R}$, sã o o próprio $\mathbb{R}$ e o subespaço nulo

b) Prove que todos os subespaços de $\mathbb{R}^2$ sã o o próprio $\mathbb{R}^{\nvDash}$, o subespaço nulo ou o subespaço consistindo de um múltiplo de um vetor fixo em $\mathbb{R}^{\nvDash}$.

c) Quais sã o todos os subespaços de $\mathbb{R}^{\nvDash^3}$?

14 — Dados W_1 e W_2 dois subespaços de um espaço vetorial V tal que a união deles seja subespaço. Prove que $W_1 \subset W_2$ ou que $W_2 \subset W_1$.

15 —

a) Dado S um subconjunto de um espaço vetorial V defina o subespaço gerado por S: $\text{span}(S) = \langle S \rangle$.

b) Prove que os vetores v_1, v_2 são L.I. se e somente se $\langle v_1 \rangle \bigcap \langle v_2 \rangle = 0$.

c) Prove que $\langle v_1 \rangle \bigcap \langle v_2 \rangle \bigcap \langle v_3 \rangle = 0$ não implica que os vetores v_1, v_2, v_3 sejam L.I..

d) Dado $S = \{s_1, \ldots, s_n\} \subset V$. Prove que S é L.I. se e somente se $\text{span}(S \backslash s_i) \neq \text{span}(S)$ para todo $s_i \epsilon S$.

e) Prove que se $A, B \subset V$. Então $\text{span}(A) + \text{span}(B) = \text{span}(A \bigcup B)$.

f) Prove que se $\mathfrak{B}$ é base para V e $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \bigsqcup \mathfrak{B}_2$ então $V = \text{span}(\mathfrak{B}_1) \oplus \text{span}(\mathfrak{B}_2)$.