Lista 2

Funcionais Lineares, Axioma da Escolha, Base e Dimensão

1 — Mostre que os números naturais ($\mathbb{N}$) podem ser vistos como um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. (Dica: use o fato que existe uma bijeção de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Q}$.

2 — Para os espaços abaixo, determine se são finito dimensionais e se sim determine a dimensão e uma base para o espaço:

a) Os números naturais visto como espaço vetorial sobre os racionais.
b) O conjunto de todas as sequências reais.
c) O conjunto das sequências reais que satisfazem $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ para $k \geqslant 3$
d) Os números complexos $\mathbb{C}$ visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e visto como um corpo sobre $\mathbb{R}$.
e) $\mathbb{C}^n$ visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e visto como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
f) O conjunto das matrizes $m \times n$ sobre K, $M_{n\times m}(K)$.
g) O conjunto das sequências que com apenas um número finito de termos não nulos.

3 — Dado um corpo F. Um subcorpo K é um subconjunto de F que é corpo quando restringimos as operações de F a K.

a) Mostre que F é espaço vetorial sobre K.
b) Suponha que L é um subespaço $m-$dimensional sobre F. Suponha que F é um espaço n dimensional sobre K. Qual a dimensão de L sobre K?
.

4 — Calcule a dimensão dos seguintes espaços e determine uma base:

a) O espaço dos polinômios de grau menor que p em n variáveis
b) O conjunto dos polinômios homogêneos de grau menor que p em n variáveis.
c) O conjunto das funções em $F(S)$, $|S| < \infty$ que se anulam em todos os pontos de um subconjunto $S_0 \subset S$.
d) O conjunto das sequências que com apenas um número finito de termos não nulos.

5 — Dado Um conjunto linearmente independente de vetores E de um espaço vetorial V, prove que existe uma base E' de V contendo E. (Axioma da escolha)

6 — Dado $W_1 \subset V$ e seja $\mathfrak{B}_1$ uma base para W_1 prove que existe uma base $\mathfrak{B}$ para V tal que $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$.

7 — Dado L um espaço vetorial n-dimensional e $M \subset L$ um subespaço m-dimensional. Prove que existem um número finito de funcionais $f_1, \ldots, f_{n-m} \epsilon L^*$ tal que $M = \{l | f_1(l) = \ldots . f_{n-m}(l) = 0\}$.

8 — Prove que se L é um subespaço de V e $\dim(L) = \dim(V) < \infty$, então $L = V$.

9 — Prove que o axioma de comutatividade da soma pode ser deduzido dos outros axiomas.

10 — Prove que em qualquer conjunto de vetores S existe um subconjunto S' linearmente independente tal que $\mathrm{span}(S) = \mathrm{span}(S')$. (Axioma da escolha)

11 — Pode um funcional linear sobre os complexos assumir apenas valores reais?

12 — Defina um funcional α em $\mathbb{C}^3$tal que $a((1, 1, 1) = 0$ e $\alpha(1, i, 3)$=0.

13 — Dado α um funcional linear não-nulo num espaço vetorial V de dimensão n. Prove que $C = \{x : \alpha(x) = 0\}$ é um espaço vetorial. Qual a dimensão de C?

14 — Dado V espaço vetorial sobre os complexos e seja $\alpha, \beta, \gamma \in V$ linearmente independentes. Prove que $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$ e $\alpha+\gamma$ são linearmente independentes. Lembrando que uma bandeira é uma sequência estritamente crescente de subespaços encaixantes $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n \ldots$, e que uma bandeira é dita maximal em V se $L_0 = \{0\}$, $\bigcup L_i = V$ e se nenhum subespaço M puder ser inserido entre L_i e L_{i+1}, ou seja se $L_i \subset M \subset L_{i+1}$ então $M = L_i$ ou $M = L_{i+1}$:

a) Prove que se $0 = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n = W_1$ uma bandeira maximal para W_1 e 0 e $0 = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \ldots \subsetneq L_m = W_2$ uma bandeira maximal para W_2 mostre que

$$0 \subsetneq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \ldots \subsetneq V_n \subsetneq V_n \oplus L_1 \subsetneq V_n \oplus L_2 \ldots \subsetneq V_n \oplus L_m = W_1 \oplus W_2 = V$$

é bandeira maximal para V. Conclua que dimensão da soma direta de espaços vetoriais de dimensão finita tem dimensão finita igual a soma das dimensões.

b) Seja $0 \subsetneq F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \ldots \subsetneq F_n \subsetneq \ldots \subset V$ uma bandeira (não necessariamente finita) maximal para V. Prove sem usar lema de Zorn que V possui base.

15 — Calcule todos os funcionais lineares de $\mathbb{Z}^3$. Qual a dimensão do espaço dos funcionais lineares sobre $\mathbb{Z}^3$?$^{\nVDash}$

16 — Seja $\mathsf{T} \in \mathfrak{L}(\mathsf{V})$, e seja $\mathsf{L} \subset \mathsf{V}$ o subespaço de V tal que $\mathsf{L} = \{\nu : f(\mathsf{T}(\nu) = 0, \forall f \in \mathsf{V}^*\}$. Prove que $\mathsf{L} = \ker(\mathsf{T})$.

17 — Seja T a função de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$\mathsf{T}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

a) Verifique que T é uma transformação linear

b) Determine a imagem de T

c) Determine o posto de T

18 — Dado $M_{n\times n}(K)$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre K e seja B uma matriz fixa em $M_{n\times n}(\mathsf{K})$. Se $\mathsf{T}(A) = AB - BA$, prove que $T(A)$ é uma transformação linear de $M_{n\times n}(K)$ em $M_{n\times n}(K)$. Determine a imagem e o posto de T.

* **19** — Mostre que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{Q}$.