Lista 3+1/2≈3,5

Soma Direta, Quocientes e Isomorfismos

1 — Prove que

a) $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$

b) $L_1 + (L_2 + L_3) = (L_1 + L_2) + L_3$

c) Existe um elemento neutro para a adição de subespaços?

2 — Prove que se $\mathfrak{B}$ é base para V e $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \bigsqcup \mathfrak{B}_2$ então $V = \text{span}(\mathfrak{B}_1) \oplus \text{span}(\mathfrak{B}_2)$

3 — Dado $W_1 \subset V$ prove que existe $W_2 \subset V$ tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

4 — Dado $L \subset V$, prove que se $\dim(L) = \dim(V) < \infty$. então $L = V$.

5 — Prove que a soma $L = L_1 + L_2 + \ldots . L_n$ é soma direta se e somente se a união das bases de L_i produz uma base para L.

6 — Dê duas demonstrações distintas para o teorema do Núcleo-Imagem. Compare as demonstrações.

7 — Dado um subespaço $L \subset V$ prove que existe M tal que $V = L \oplus M$. O subespaço M é chamado subespaço complementar a L.

8 — Dados $M, N \subset L$. Prove que a seguinte aplicação é um isomorfismo linear

$$(M + N)/N \to M/(M \cap N) : m + n + N \mapsto m + M \cap N$$

9 — Seja P_k o conjunto dos polinômios de grau menor igual que n.

a) Prove que o conjunto de todos os polinômios pares L_1, i.e, $p(x) = p(-x)$, e o conjunto de todos os polinômios impares, i.e, $p(x) = -p(-x)$ L_2 são subespaços vetoriais.

b) Prove que $P_k(x) = L_1 \oplus L_2$

c) Ache o subespaço complementar a $L_3 = \{p(x) \in P_k : p(1) = 0\}$

10 — Prove que para qualquer n

$$\dim(L_1 + L_2 + \ldots. + L_n) < \dim(L_1) + \dim(L_2) + \ldots. + \dim(L_n)$$

11 — Prove que para quaisquer subespaços L_1 e L_2

$$\dim(L_1) + \dim(L_2) = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$$

12 — Dado L um espaço n-dimensional sobre um corpo finito com q-elementos.

a) Calcule o número de subespaços k-dimensionais em L. Para $1 \leqslant k \leqslant n$

b) Calcule o número de pares de subespaços L_1 e L_2 com $\dim(L_1)$, $\dim(L_2)$ e $\dim(L_1 \cap L_2)$ fixos. Verifique que quando $q \to \infty$ o número de pares relativos em posição geral sobre o número total de pares com $\dim(L_1)$, $\dim(L_2)$ dados se aproxima a 1.

13 — Prove que $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{n-1}$.

14 — Seja V o espaço das funções reais contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, $V = C[a, b]$ e seja $W = \text{Const}[a, b]$ o espaço das funções constantes em [a,b]

a) Prove que $\text{Const}[a, b]$ é isomorfo a $\mathbb{R}$

b) Prove que V/W é isomorfo ao espaço vetorial das funções continuas em $[a, b]$ que se anulam em a.

15 — Dado $L = M \oplus N$. Então a aplicação canônica

$$M \to L/N : m \mapsto m + N$$

é um isomorfismo.

16 — Dados $S, T, U \subset V$. Mostre que se $U \subset S$, então

$$S \cap (T + U) = (S \cap T) + (S \cap U)$$

17 — Dado L um subespaço de V. O conjunto $v + S = \{v + s : s \in S\}$ é chamado subespaço afim de V.

a) Quando um subespaço afim de V é subespaço de V?

b) Mostre que dois subespaços afim $x + S$ e $y + S$ ou são iguais ou disjuntos.

18 — Dado $\tau \in \mathfrak{L}(V, W)$. Mostre que τ é isomorfismo se e somente se τ leva base em base.

19 — Dados dois espaços vetoriais V, W sobre $\mathbb{F}$. Definimos $V \boxplus W$ como o conjunto $\{(v, w) : v \in V \text{ e } w \in W\}$ munido das operações

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b).$$

Prove que $V \boxplus W$ é espaço vetorial. O espaço $V \boxplus W$ é chamado soma direta externa de V e W.

20 — Seja $V = A + B$ e seja a soma direta externa $E = A \boxplus B$. Defina a aplicação $\tau : A \boxplus B \to A + B$ como $\tau : (a, b) = a + b$. Prove que tal é linear. Qual o kernel de τ? Quando τ é um isomorfismo.

21 — Dado $\tau : V \to W$, a $\dim(\mathrm{im}(\tau))$ é chamado de posto de τ (o posto de τ é denotado $\mathrm{rk}(\tau)$). Prove que:

a) Se $\dim(V) < \infty$ e $\tau \in \mathfrak{L}(V, W)$ e $\mathrm{rk}(\tau^2) = \mathrm{rk}(\tau)$ então $\mathrm{im}(\tau) \cap \ker(\tau) = \{0\}$.

b) Dado $\tau \in \mathfrak{L}(U, V)$ e $\sigma \in \mathfrak{L}(V, W)$ então $\mathrm{rk}(\sigma\tau) \leqslant \min\{\mathrm{rk}(\sigma), \mathrm{rk}(\tau)\}$.

c) Se $\tau, \sigma \in \mathfrak{L}(V)$e τ é invertível então $\mathrm{rk}(\sigma\tau) = \mathrm{rk}(\tau\sigma) = \mathrm{rk}(\sigma)$.

d) Se $\tau, \sigma \in \mathfrak{L}(U, V)$ então $\mathrm{rk}(\tau + \sigma) \leqslant \mathrm{rk}(\tau) + \mathrm{rk}(\sigma)$.

22 — Dado $\tau \in \mathfrak{L}(V_1, W_1)$ e $\mathrm{rk}(\tau^2) = \mathrm{rk}(\tau)$ mostre que $\mathrm{im}(\tau) \cap \ker(\tau) = \{0\}$.

23 — Dado S um subespaço de V. e seja $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ uma base para S, como você construiria a partir dessa base uma base para V/S.

24 — Dado $\tau \in \mathfrak{L}(V)$ e S um subespaço de V. Defina a aplicação $\tau' : V/S \to V/S$ por

$$\tau'(v + S) = \tau v + S$$

Quando τ' está bem definida e é uma aplicação linear? Quais são $\mathrm{im}(\tau')$ e $\ker(\tau')$.