Lista* $\swarrow\!\hookleftarrow\rfloor$

Transformações Lineares$\approx$Morfismos $\oplus$Espaço*Dual

1 — Seja $P_k(x)$ o espaço dos polinômios de grau menor igual que k. Para as funções abaixo, determine quais são lineares e para as lineares determine sua matriz na base especificada:

a) Dado $p(x) \in P_k(x)$. Seja $\tau : P_k(x) \to P_k(x)$ dado por $\tau(p(x)) = p(-x)$. Base $\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^k\}$

b) Dado $p(x) \in P_k(x)$. Seja $\tau : P_k(x) \to P_k(x)$ dado por $\tau(p(x)) = p(-x)$. Base $\{1, x, x^2, \ldots, x^k\}$

c) Dado $p(x) \in P_k(x)$. Seja $\tau : P_k(x) \to P_k(x)$ dado por $\tau(p(x)) = p(x+1)$. Base $\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^k\}$

d) Dado $p(x) \in P_k(x)$. Seja $\tau : P_k(x) \to P_k(x)$ dado por $\tau(p(x)) = p(-x)$. Base $\{1, 1+x, 1+x^2, \ldots, 1+x^k\}$

e) Dado $p(x) \in P_k(x)$. Seja $\tau : P_k(x) \to P_k(x)$ dado por $\tau(p(x)) = p'(x)$. Base $\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^k\}$

f) Dado $p(x) \in P_k(x)$. Seja $\tau : P_k(x) \to P_k(x)$ dado por $\tau(p(x)) = p'(x)$. Base $\{1, 1+x, 1+x^2, \ldots, 1+x^k\}$

g) Dado $p(x) \in P_k(x)$. Seja $\tau : P_k(x) \to P_k(x)$ dado por $\tau(p(x)) = p^{(n)}(x)$. Base $\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^k\}$

h) Dado $p(x) \in P_k(x)$. Seja $\tau : P_k(x) \to P_k(x)$ dado por $\tau(p(x)) = xp(x)$. Base $\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^k\}$

i) Dado $p(x) \in P_k(x)$. Seja $\tau : P_k(x) \to P_k(x)$ dado por $\tau(p(x)) = p(x^2)$. Base $\{1, x-a, (x-a)^2, \ldots, (x-a)^k\}$

2 — Dado um espaço vetorial $V = L_1 \oplus L_2$. Prove que os seguintes operadores são lineares:

a) Dado $v \in V$ e seja a decomposição de v, $v = v_1 + v_2$, seja $\sigma : V \to V$ tal que $\sigma(v_1 + v_2) = v_1$. Esse operador é chamado projeção no espaço L_1.

b) Dado $v \in V$ e seja a decomposição de v, $v = v_1 + v_2$, seja $\tau : V \to V$ tal que $\tau(v_1 + v_2) = v_1 - v_2$. Esse operador é chamado reflexão no espaço L_1 paralelo a L_2.

3 — Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear e $V' \subset V, W' \subset W$ subespaços vetoriais. Mostre que $T(V')$ é subespaço de W e que $T^{-1}(W')$ é subespaço de V.

4 — Dados V, W espaços vetoriais:

a) Prove que $\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço vetorial.

b) Se $\dim V < \infty$ e $\dim W < \infty$ mostre que $\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$

c) Exiba uma base para $\mathcal{L}(V, W)$ quando $\dim V < \infty$ e $\dim W < \infty$.

5 — Seja $P_k(x)$ o espaço dos polinômios de grau menor que k e seja A_h o operador diferença

$$A_h(p(x)) := \frac{p(x+h) - p(x)}{h}$$

sendo h um número fixo não nulo. Ache o núcleo e a imagem desse operador.

6 — Dados V e W espaços vetoriais sobre um corpo F e seja U um isomorfismo de V em W. Prove que $T \to UTU^{-1}$ é um isomorfismo de $L(V, V)$ em $L(W, W)$.

7 — Dado V um espaço vetorial de dimensão finita e seja S e T transformações lineares em V. Quando existem bases $\mathfrak{B}_1$ e $\mathfrak{B}_2$ tal que $[S]_{\mathfrak{B}_1} = [T]_{\mathfrak{B}_2}$?

8 — **(Importante)** Dado V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ e seja $\mathfrak{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ uma base para V.

a) Prove que existe um único operador linear $T : V \to V$ tal que $T(\alpha_j) = \alpha_{j+1}$ e $T(\alpha_n) = 0$. Escreva a matriz de T nessa base.

b) Prove que $T^n = 0$, mas $T^{n-1} \neq 0$

c) Seja S um operador linear em V tal que $S^n = 0$ mas $S^{n-1} \neq 0$. Prove que existe uma base $\mathfrak{B}'$ tal que a matriz para S nessa base é a matriz descrita na parte a.

d) Prove que se M e N são matrizes $n \times n$ tal que $M^n = N^n = 0$ mas $M^{n-1} \neq 0 \neq N^{n-1}$, então M e N são similares.

9 — Seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear. Mostre que $T^2 = 0$ se e somente se $T(V) \subset \ker(T)$.

10 —

a) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Im}(T) = \langle (1, 0, -1), (1, 2, 2) \rangle$.

b) Encontre $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = \langle (1, 0, -1) \rangle$.

11 — Dado V o espaço vetorial dos polinômios reais de grau menor igual que 2

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

Defina três funcionais lineares em V por:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx$$
$$f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx$$
$$f_3(p) = \int_0^{-1} p(x)\,dx$$

Mostre que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é base para V^* exibindo uma base para V que é dual a essa base.

12 — Dadas A e B duas matrizes complexas, Mostre que é impossível termos $AB - BA = I$.

13 — Dado M um subconjunto de V. O aniquilador M^0 de M é definido como

$$M^0 = \{f \in V^* | f(m) = 0, \forall m \in M\}$$

Prove que:

a) Se $M \subset N$ então $N^0 \subset M^0$.

b) Se $\dim(V) < \infty$ então a aplicação natural

$$\tau : \text{span}(M) \to (M^0)^0$$

é um isomorfismo.

c) Dado S subespaço de V. Prove que $(V/S)^* \approx S^0$.

14 — Seja W o conjunto de todos os vetores $(x_1, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{F}^n$ tais que $x_1 + \ldots + x_n = 0$

a) Prove que W^0 consiste dos funcionais do tipo

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c \sum_{j=1}^{n} x_j$$

b) Mostre que o espaço dual W^* de W pode ser identificado com os funcionais lineares

$$f(x_1, \ldots . x_n) = c_1 x_1 + \ldots . + c_n x_n$$

que satisfazem $c_1 + \ldots + c_n = 0$

15 — Determine a nulidade e o posto das seguintes transformações lineares e construa uma base para o núcleo e a imagem das seguintes transformações lineares:

a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Ax = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

b) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Ax = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$

c) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Ax = (-x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$

16 — Ache a imagem e o núcleo do operador de projeção.

17 — Dado V um espaço vetorial de dimensão finita, prove que V e V^* são isomorfos.

18 — Prove que se S e T são subespaços de V. Então $(S \oplus T)^* \approx S^* \boxplus T^*$.

19 — Se V e W são subespaços de um espaço vetorial de dimensão finita, então $(V \cap W)^0 = V^0 + W^0$

20 — Dado V um espaço vetorial tal que $\dim V = n$. Prove que se $m < n$ e $f_1, \ldots, f_m$ são funcionais lineares em V. Então existe um vetor não nulo $x \in V$ tal que $f_i(x) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. O que esse resultado implica para a solução de sistemas lineares?

21 — Prove detalhadamente que dado $\tau \in \mathfrak{L}(V)$, então temos:

$$\frac{V}{\ker(\tau)} \approx \operatorname{im}(\tau)$$

22 — Seja $A = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$ o conjunto das letras

a) Prove que o conjunto das funções complexas $\mathbb{C}(A) = \{f : f : A \to \mathbb{C}\}$ é espaço vetorial sobre os complexos.

b) Ache uma base para esse espaço, visto como espaço vetorial sobre os complexos. Qual a dimensão desse espaço sobre os complexos?

c) Prove que o subconjunto das funções $D \subset \mathbb{C}(A)$ que se anulam nas letras $\{d, a, n, i, e, l\}$ formam um espaço vetorial. Ache uma base para esse espaço.

d) Dado σ uma função $\sigma : A \to A$. Seja $\tilde{\sigma} : \mathbb{C}(A) \to \mathbb{C}(A)$ definida por $\tilde{\sigma}(f(x) = f(\sigma(x)$. Prove que $\tilde{\sigma}$ é uma transformação linear.

e) Prove que se $\sigma : A \to A$ é bijetiva então $\tilde{\sigma}$ é um isomorfismo de $\mathbb{C}(A) \to \mathbb{C}(A)$

f) Seja Σ o conjunto de todas as transformações lineares provenientes de uma função $\sigma : A \to A$ ou seja.

$$\Sigma = \{T \in \mathfrak{L}(\mathbb{C}(A) : T(f(x) = f(\sigma(x)) : \forall x \in A, \text{ para alguma } \sigma\}$$

Qual a dimensão de Σ?