Lista 5

Polinômios[x] e Módulos

1 — Dado F um subcorpo dos complexos e A a seguinte matriz 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para cada um dos seguintes polinômios calcule $f(A)$

a) $f(x) = x^2 - x + 2$

b) $f(x) = x^2 - 1$

c) $f(x) = x^2 - 5x + 7$

2 — Seja A uma matriz diagonal sobre um corpo F, ou seja, uma matriz tal que $A_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Seja f o polinômio em F definido por.

$$f = (x - A_{11}) \cdots (x - A_{nn}).$$

Qual é a matriz $f(A)$?

3 — Seja $\mathbb{Q}$ o corpo dos racionais. Determine qual dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{Q}[x]$ são ideais. Quando o conjunto for um ideal, ache seu gerador mônico.

a) O conjunto dos polinômios de grau impar.

b) O conjunto dos polinômios de grau maior igual que 5.

c) O conjunto dos polinômios tal que $f(0) = 0$.

d) O conjunto dos polinômios tal que $f(2) = f(4) = 0$.

e) A imagem do operador linear T definido por:

$$T\left(\sum_{i=0}^{n} c_i x^1\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_1}{i+1} x^{i+1}$$

4 — Ache o máximo divisor comum dos seguintes polinômios:

a) $2x^5 - x^3 - 3x^2 - 6x$+4 e $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$

b) $3x^4 + 8x^2 - 3$ e $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

c) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ e $x^3 + 6x^2 + 7x + 1$

5 —

a) Dado A uma matriz $n \times n$ sobre um corpo F. Mostre que o conjunto de todos os polinômios $f \in F$ tal que $f(A)$ é um ideal.

b) Seja F o corpo dos complexos. Dado $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ache o gerador mônico do ideal de todos os polinômios tal que $f(A) = 0$.

6 — Assumindo o teorema fundamental da álgebra prove que se f e g são polinômios sobre os complexos, então mdc$(f, g) = 1$ se e somente se f e g não possuem raízes em comum.

7 — Seja f um polinômio mônico sobre os complexos. Prove que um polinômio tem todas as raízes distintas se e somente se f e f' são relativamente primos.

8 — Dado $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um subconjunto de um módulo M. Prove que $N = \ll S \gg$ é o menor submódulo de M contendo S. (Você primeiro deve definir precisamente o que significa menor submódulo de M contendo S).

9 —

a) Ache expressões para o polinômio característico de uma matriz de ordem 1,2 e 3

b) Prove que o polinômio característico de uma matriz de ordem n pode ser escrita como:

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-a} + \cdots a_0$$

sendo o coeficiente a_k igual a soma dos menores principais de ordem $n - k$ da matriz multiplicados por $(-1)^{n-k}$

10 — Prove que o polinômio característico da transposta de uma matriz A^T coincide com o polinômio característico de A.

11 — Prove que a soma e a intersecção de subespaços $\tau-$invariantes é invariante pelo operador τ.

12 — Prove que se um operador A é não degenerado então A e A^{-1} possuem os mesmos subespaços invariantes.

13 — Mostre que qualquer subespaço $A-$invariante também é invariante com respeito a um polinomio desse operador.

14 — Seja $f : L \to L$ um operador diagonalizável com espectro simples

a) Prove que qualquer operador $g : L \to L$ tal que gf = fg pode ser representado como um polinômio em f.

b) Prove que a dimensão de tais operadores é igual a dimensão de L.

15 — Dado f, g operadores lineares num espaço $n-$dimensional sobre um corpo de característica zero. Assuma que $f^n = 0$, $\dim \ker f = 1$ e que gf − fg = f. Prove que os autovalores de g são da forma $a, a-1, a-2, \dots, a-n$ para algum $a \in K$.