**Lista Zero $0$**

Relações e Operações Binárias.
Anéis e Corpos

**1** — Dado um conjunto não vazio A. Mostre que:

a) Se $R =$ AxA, então R é reflexiva, simétrica, transitiva e completa.

b) Se $R = \varnothing$ então R é simétrica, transitiva assimétrica, antissimétrica.

c) Se $R = \{(a, a)|a \epsilon A\}$ então R é uma relação de equivalência e antissimétrica.

**2** — Prove ou forneça contraexemplos:

a) R é completa $\Rightarrow$R é reflexiva

b) R transitiva e irreflexiva $\Rightarrow$R é antissimétrica

c) R é reflexiva $\Rightarrow$R não é antissimétrica

d) R é assimétrica $\Rightarrow$ R não é transitiva

e) R é uma ordem parcial $\Rightarrow$ $R$ é antissimétrica e assimétrica

**3** — Dê exemplos se possível de relações $R$ que são

a) Reflexivas e Simétricas mas não transitivas

b) Simétricas e transitiva, mas não reflexivas

c) Simétricas e antissimétrica

**4** — Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos conjuntos naturais e $m \epsilon \mathbb{N}$. Definimos a seguinte relação

$$R \equiv \{(x, y) : m|(x - y\}.$$

Neste caso escrevemos $x \equiv y (\mathrm{mod}\, m)$, x é congruente a y modulo m.

a) Ache $[3]_3[2]_3[5]_3$

b) Ache duas soluções das seguintes equações:

c) $x \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 14)$

d) $x^2 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 7)$

e) $x^2 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 7)$

f) Dado $m \epsilon \mathbb{N}$. Mostre que $x, y, z \epsilon \mathbb{Z}$, $x \equiv y (\mathrm{mod}\, m)$ então $x + z \equiv y + z (\mathrm{mod}\, m)$ e xz $\equiv$ yz$(\mathrm{mod}\, m)$.

**5** — Dados $A, B, C$ conjuntos e $R$ uma relação entre $A$ e $B$ e $S$ uma relação entre $B$ e $C$. Então
$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

**6** — Dado $\Pi$ uma partição de um conjunto não vazio $A$. Então $A/\Pi$ é uma relação de equivalência em $A$.

**7** — Dado $R$ uma relação de equivalência em $A$. Mostre que $A/[A]_R = R$.

**8** — Dado $\Pi$ uma partição de $A$. Mostre que $[A]_{A/\Pi} = \Pi$.

**9** — Dado $\circ$ uma relação binária em A. Mostre que:

a) Se $e$ é a identidade para $\circ$, então $e$ é idempotente.

b) Se $\circ$ é associativa e comutativa e $a, b$ são idempotentes então $a \circ b$ é idempotente.

c) Se $\circ$ é associativa e $a, b$ invertíveis então $a \circ b$ é invertível.

**10** — Suponha que $\circ$ é uma operação binária associativa em A. Seja $x$ um elemento fixo de $A$. Definimos outra relação binária $\circ^x$ em $A$ por
$$a \circ^x b := a \circ (x \circ b)$$
Mostre que $\circ^x$ é associativa.

**11** — Dado $Q = (a, b)$ com $a, b \epsilon \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Definimos a relação $R$ em $Q$ por
$$(a, b)R(c, d) \,\text{see}\, ad = cb$$

a) Mostre que R é uma relação de equivalência.

b) Ache três elementos em $[(1, 3)]_R$

c) Mostre que $\forall n \epsilon \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $[(x, y)]_R = [(nx, ny)_R$.

d) Seja $\square$ a operação binária em $[Q]_R$ definida por:
$$[(x, y)]_R \square [(m, n)]_R = [(\text{xm}, \text{yn})]_R$$
Mostre que a operação está bem definida, i.e., se $[(x, y)]_R = [(z, w)]_R$ e $[(m, n)]_R = [(p, q)]_R$ então
$$[(x, y)]_R \square [(m, n)]_R = (z, w)]_R \square [(p, q)]_R.$$

e) Desta vez tentamos definir uma relação binária $\oplus$ em $[Q]_R$ por:

$$[(x,y)]_R \oplus [(m,n)]_R = [(x+m, y+n)]_R$$

Mostre que $\oplus$ não está bem definida, ou seja não é realmente uma operação binária em $[Q]_R$

f) Seja $\boxplus$ a operação binária em $[Q]_R$ definida por:

$$[(x,y)]_R \boxplus [(m,n)]_R = [(xn+ym, \mathrm{yn})]_R$$

Mostre que a operação está bem definida.

g) O que é Q?

**12** — Mostre que:

a) $Z + \cdot$ é um domínio

b) $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ com as operações usuais são corpos.

c) Mostre que os polinômios sobre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ formam um anel de divisão.

d) Mostre que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ com p primo, é um corpo.

**13** — Quais são os elementos invertíveis de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ com respeito a adição e a multiplicação induzidas.

**14** — Seja $n$ um inteiro positivo que não é primo. Mostre que o anel $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ não é um domínio.