

# Lista 1

## Álgebra Linear Avançada II

### Formas Bilineares I

**1** — Seja  $P_3(\mathbb{R})$  o espaço vetorial dos polinômios de grau menor igual a 3.

a) Prove que

$$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

é uma forma bilinear simétrica. Ache a matriz de Gram dessa forma na base canônica e na base  $\{1, 1+x, 1+x+x^2, x+x^3\}$

b) Prove que

$$g'(p(x), q(x)) = \int_{-1}^1 (x^2 + 1)p(x)q(x)dx$$

é uma forma bilinear simétrica. Ache a matriz de Gram dessa forma na base canônica e na base  $\{1, 1+x, 1+x+x^2, x+x^3\}$ .

c) Para ambas as formas  $g, g'$  determine uma base ortonormal e a dimensão do kernel.

d) A aplicação  $g'(p(x), q(x)) = p(0)q(0)$  é uma forma bilinear? Simétrica, hermitiana, alternada?

e) A aplicação  $g'(p(x), q(x)) = p(0)q(1)$  é uma forma bilinear? Simétrica, hermitiana, alternada?

**2** — Seja  $W$  um subespaço dotado de uma forma bilinear (simétrica, hermitiana ou simplética). Dados  $U, V$  subespaços de  $W$ . Mostre que

a) Se  $U \subset V$  então  $V^\perp \subset U^\perp$

b)  $U \subset U^{\perp\perp}$

c)  $U^\perp = U^{\perp\perp\perp}$

**3** — Seja  $W$  um subespaço dotado de uma forma bilinear (simétrica, hermitiana ou

simplética). Dados  $U, V$  subespaços de  $W$ . Mostre que

a)  $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$ .

b)  $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$ .

**4** — Prove que são equivalentes:

a)  $g$  é não singular

b)  $g(u, x) = g(v, x)$  para todo  $x \in V$  então  $u = v$ .

**5** — Mostre que  $g$  é não degenerada se e somente se sua matriz de Gram em qualquer base é não singular.

**6** — Ache uma matriz diagonal congruente à:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**7** — Dados  $U, V$  espaços de dimensão finita sobre  $K$  e dado  $g : U \times V \rightarrow K$  uma aplicação bilinear. Chamaremos o conjunto

$$L_0 = \{u \in U \mid g(u, v) = 0, \forall v \in V\}$$

de kernel a esquerda de  $g$  e o conjunto

$$R_0 = \{v \in V \mid g(u, v) = 0, \forall u \in U\}$$

de kernel a direita de  $g$ .

Prove que:

a)  $\dim U/L_0 = \dim V/R_0$

b)  $g$  induz uma aplicação bilinear  $g'$  em  $U/L_0 \times V/R_0 \rightarrow K$

$$g'(u + L_0, v + R_0) = g(u, v)$$

para a qual ambos os kernels são nulos.

**8** — De a classificação das formas ortogonais unidimensionais sobre um corpo finito de característica diferente de 2.

**9** — Dado  $L, g$  um espaço finito dimensional com uma forma bilinear não degenerada. Prove que um conjunto de vetores  $\{e_1 \dots e_k\}$  é L.I. se e somente se a matriz  $g(e_i, e_j)$  é não singular.

**10** — Seja  $V$  um espaço de dimensão finita dotado de uma forma bilinear simétrica sobre um corpo de característica diferente de 2. Podemos construir uma base ortogonal  $\{u_1, \dots, u_n\}$  para  $V$  começando com uma base  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$

- Porque podemos assumir que a forma é não degenerada?
- Supondo a forma não degenerada. Se  $g(e_i, e_i) \neq 0$  para algum  $i$  então definimos  $u_1 = e_i$ . Caso contrário  $g(e_i, e_j) \neq 0$  nesse caso  $u_1 = e_i + e_j$
- Assuma que temos um conjunto de vetores  $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_k\}$  formem uma base ortogonal para o subespaço  $V_k$  de  $V$  e que nenhum  $u_i$  é isotrópico então podemos decompor  $V$  como soma direta:

$$V = V_k \otimes V_k^\perp$$

- Para cada  $e_i \in \mathcal{E}$  seja

$$w_i = e_i - \sum_{i=1}^k \frac{g(e_i, u_i)}{g(u_i, u_i)} u_i$$

Prove que  $w_i$  geram  $V_k^\perp$ . Use esse fato para fazer o passo indutivo.

**11** — O espaço de Minkovski é isométrico a  $\mathbb{R}^4$  com o produto interno usual?

**12** — Prove que uma forma Hermitiana ou ortogonal é positiva definida se e somente se todos os menores diagonais da matriz de Gram forem não negativos.

**13** — Prove que uma matriz unitária, triangular superior e com entradas positivas na diagonal principal, deve ser a matriz identidade.

**14** — Prove que dois vetores  $u, v$  num espaço euclidiano são ortogonais se e somente se:

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$$

**15** — Dado  $g$  uma forma bilinear positiva definida sobre  $V$ , espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  então vale a identidade do paralelogramo:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

, onde  $\|u\| = \sqrt{g(u, u)}$ .

**16** — Uma norma sobre um espaço vetorial  $V$  sobre  $\mathbb{R}$  é uma função

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfazendo:

- $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $v \in V$
  - $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  para todo  $u, v \in V$
  - $\|u\| = 0$  se e somente se  $u = 0$ .
- a) Prove que dado  $g$  uma forma bilinear simétrica positiva definida então

$$\sqrt{g(v, v)} : V \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma norma.

- Prove que se uma norma satisfaz a identidade do paralelogramo

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

então

$$g(u, v) := \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

é um produto interno em  $V$  que induz a norma  $\|\cdot\|$

- De exemplos de normas que não provém de nenhum produto interno