Lista 1

Algebra Linear Avançada II

Formas Bilineares I

1 — Seja $P_3()$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor igual a 3.

a) Prove que

$$g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

é uma forma bilinear simétrica. Ache a matriz de Gram dessa forma na base canonica e na base $\{1, 1+x, 1+x+x^2, x+x^3\}$

b) Prove que

$$g'(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} (x^2+1)p(x)q(x)dx$$

é uma forma bilinear simétrica. Ache a matriz de Gram dessa forma na base canonica e na base $\{1, 1+x, 1+x+x^2, x+x^3\}$.

c) Para ambas as formas g, g' determine uma base ortonormal e a dimensão do kernel.

d) A aplicação $g'(p(x), q(x)) = p(0)q(0)$ é uma forma bilinear? Simétrica, hermitiana, alternada?

e) A aplicação $g'(p(x), q(x)) = p(0)q(1)$ é uma forma bilinear? Simétrica, hermitiana, alternada?

2 — Seja W um subespaço dotado de uma forma bilinear (simétrica, hermitiana ou simplética). Dados U, V subespaços de W. Mostre que

a) Se $U \subset V$ então $V^\perp \subset U^\perp$

b) $U \subset U^{\perp\perp}$

c) $U^\perp = U^{\perp\perp\perp}$

3 — Seja W um subespaço dotado de uma forma bilinear (simétrica, hermitiana ou simplética). Dados U, V subespaços de W. Mostre que

a) $(U+V)^\perp = U^\perp \cap^\perp$.

b) $(U \cap V)^\perp = U^\perp +^\perp$.

4 — Prove que são equivalentes:

a) g é não singular

b) $g(u, x) = g(v, x)$ para todo $x \in V$ então $u = v$.

5 — Mostre que g é não degenerada se e somente se sua matriz de Gram em qualquer base é não singular .

6 — Ache uma matriz diagonal congruente à:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7 — Dados U, V espaços de dimensão finita sobre K e dado $g : U \times V \to K$ uma aplicação bilinear. Chamaremos o conjunto

$$L_0 = \{u \in U | g(u, v) = 0, \forall v \in V\}$$

de kernel a esquerda de g e o conjunto

$$R_0 = \{v \in V | g(u, v) = 0, \forall u \in U\}$$

de kernel a direita de g.
Prove que:

a) $\dim U/L_0 = \dim V/R_0$

b) g induz uma aplicação bilinear g' em $U/L_0 \times V/R_0 \to K$

$$g'(u + L_o, v + R_0) = g(u, v)$$

para a qual ambos os kernels são nulos.

8 — De a classificação das formas ortogonais unidimensionais sobre um corpo finito de caracteristica diferente de 2.

9 — Dado L, g um espaço finito dimensional com uma forma bilinear não degenerada. Prove que um conjunto de vetores $\{e_1 \dots e_k\}$ é L.I. se e somente se a matriz $g(e_i, e_j)$ é não singular.

10 — Seja V um espaço de dimensão finita dotado de uma forma bilinear simetríca sobre um corpo de caracteristica diferente de 2. Podemos construir uma base ortogonal $\{u_1, \dots u_n\}$ para V começando com uma base $\mathcal{E} = \{e_1, \dots e_n\}$

a) Porque podemos assumir que a forma é não degenerada?

b) Supondo a forma não degenerada. Se $g(e_i, e_i) \neq 0$ para algum i então definimos $u_1 = u_i$. Caso contrário $g(e_i, e_j) \neq 0$ nesse caso $u_1 = e_i + e_j$

c) Assuma que temos um conjunto de vetores $\mathcal{U} = \{u_1, \dots u_k\}$ formem uma base ortogonal para o subespaço V_k de V e que nenhum u_i é isotrópico então podemos decompor V como soma direta:

$$V = V_k \otimes V_k^{\perp}$$

d) Para cada $e_i \in \mathcal{E}$ seja

$$w_i = e_i - \sum_{i=1}^{k} \frac{g(e_i, u_i)}{g(u_i, u_i) u_i}$$

Prove que w_i geram $V_k^{\perp}$. Use esse fato para fazer o passo indutivo.

11 — O espaço de Minkovski é isométrico a ^{4} com o produto interno usual?

12 — Prove que uma forma Hermitiana ou ortogonal é positiva definida se e somente se todos os menores diagonais da matriz de Gram forem não negativos.

13 — Prove que uma matriz unitária, triangular superior e com entradas positivas na diagonal principal, deve ser a matriz identidade.

14 — Prove que dois vetores u, v num espaço euclideano são ortogonais se e somente se:

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$$

15 — Dado g uma forma bilinear positiva definida sobre V, espaço vetorial sobre então vale a identidade do paralelogramo:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

, onde $\|u\| = \sqrt{g(u, u)}$.

16 — Uma norma sobre um espaço vetorial V sobre R é uma função

$$\|\| : V \to R$$

satisfazendo:

a)$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ para todo $\lambda \in$ e $v \in V$

b)$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in V$

c)$\|u\| = 0$ se e somente se $u = 0$.

a) Prove que dado g uma forma bilinear simétrica positiva definida então

$$\sqrt{g(v, v)} : V \to R$$

é uma norma.

b) Prove que se uma norma satisfaz a identidade do paralelogramo

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

então

$$g(u, v) := \frac{1}{4} \left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 \right)$$

é um produto interno em V que induz a norma $\|\|$

c) De exemplos de normas que não provém de nenhum produto interno