Lista 3

Álgebra Linear Avançada II

Aplicações Multilineares e Tensores

1 — Dado A um conjunto e V espaço vetorial. Prove que $\mathcal{F}(A,V)$ é um espaço vetorial com a soma e multiplicação por escalar usual.

2 — Prove que as aplicações são multilineares.

a) Dados n, m inteiros positivos. Então a multiplicação de polinomios:

$$* : \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{P}_m(\mathbb{K}) \to \mathcal{P}_{n+m}(\mathbb{K})$$

é uma aplicação bilinear.

b) A aplicação $\square : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\square((x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2$$

é uma aplicação trilinear.

c) A aplicação $\clubsuit : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\clubsuit((x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)) = x_1y_2z_1$$

é uma aplicação trilinear.

d) Dado $[a,b]$ um intervalo fechado em $\mathbb{R}$ e seja $C[a,b]$ o conjunto das funções continuas em $[a,b]$. Então a aplicação $\phi : C[a,b]^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi : (f_1, \dots f_n) = \int_a^b f_1(x) \cdots f_n(x)\, \mathrm{dx}$$

é n-linear.

e) Dado $[a,b]$ um intervalo fechado em $\mathbb{R}$ e seja $C^1[a,b]$ o conjunto das funções diferenciaveis em $[a,b]$. Então a aplicação $\phi : C^1[a,b]^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi : (f_1, \dots f_n) = \frac{d}{dx}\left(f_1(x) \cdots f_n(x)\right)$$

é n-linear.

f) Dado uma aplicação multilinear $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W_1$ e uma transformação linear $T : W_1 \to W_2$, então $T\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to W_2$ é uma aplicação multilinear.

g) Dado V espaço vetorial e V^* seu dual e sejam $f_1, \dots f_n \in V^*$então a aplicação:

$$\diamondsuit : V^n \to \mathbb{K}$$

$$\diamondsuit(v_1, \dots v_n) = f_1(v_1) \cdots f_n(v_n)$$

é multilinear.

3 — A forma $\mu : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\mu((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

é não singular

4 — A aplicação $\clubsuit : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\clubsuit((x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2)) = x_1y_2z_1$$

é singular.

5 — Prove que $\Delta : \mathrm{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} definidapor \Delta((a,b),(c,d)) = ad - bc$ é bilinear e alternada.

6 — Prove que $V \otimes K \simeq V$ das seguintes formas:

a)Achando bases de ambos os espaços.

b)Exibindo um isomorfismo natural (sem base)

c)Usando a formula $\dim(A \otimes B) = \dim A \dim B$

d)Através de diagramas universais

7 — Prove que $V \otimes W \simeq W \otimes V$ das seguintes formas:

a)Achando bases de ambos os espaços.

b)Exibindo um isomorfismo natural (sem base)

c)Usando a formula $\dim(A \otimes B) = \dim A \dim B$

d)Através de diagramas universais

8 — Dados X e Y conjuntos não vazios. Prove que $\mathfrak{F}(X \times Y, K)$ é isomorfo a $\mathfrak{F}(X, K) \otimes \mathfrak{F}(Y, K)$

9 — Prove que nem todos os vetores em $V \otimes V$, para $\dim V \geqslant 2$ são da forma $u \otimes v$.

10 — Dado $A = (a_{\text{ij}})$ a matriz de um operador linear $\tau \in \mathcal{L}(V)$ com respeito a base $\mathcal{B}_1 = \{e_i\}$ e seja $B = (b_{\text{ij}})$ a matriz de um operador linear $\sigma \in \mathcal{L}(V)$ ba base $\mathcal{B}_2 = \{f_j\}$. Considere então a base $\mathcal{B}_3 = \{e_i \otimes f_j\}$
ordenada lexicograficamente, isto é, $e_i \otimes f_j < e_l \otimes f_s$ se $i < l$ ou se $i \leqslant l$ e $j \leqslant s$. Mostre que a matriz de $\tau \otimes \sigma$ na base $\mathcal{B}_3$ é:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{\text{nn}}B \end{pmatrix}$$

A matriz acima é denominada produto tensorial ou produto de Kronecker de A e B.

11 — (**Importante**) Prove que o conjunto das aplicações multilineares de $V_1 \times \cdots \times V_n$ em W é isomorfo ao conjunto das aplicações lineares de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ em W, i.e,

$$\text{Mult}(V_1, \dots V_n; W) \simeq \mathcal{L}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W)$$

dos seguintes modos:

a)Usando a propriedade universal do produto tensorial.

b)Calculando as dimensões dos espaços.

12 — (**Importante**) Mostre que o conjunto das aplicações lineares de V em W, $\mathcal{L}(V, W)$, é isomorfo a $V^* \otimes W$ do seguintes modos:

a)Exibindo o isomorfismo natural (sem base)

b)Exibindo o isomorfismo em bases.

c)Através das dimensões dos espaços.

d)Através de diagramas universais.

13 — Demonstre que $V \otimes W \simeq V^* \otimes W$. (Esse isomorfismo não é natural).

14 — Prove que se A e B são não singulares, então $A \otimes B$ é não singular das seguintes maneiras:

a)Provando através da definição de $A \otimes B$.

b)Usando a representação matricial do exercício anterior.

15 — Dados $A \in \mathcal{L}(V_1, V_1')$, $C \in \mathcal{L}(V_1', V_1'')$, $B \in \mathcal{L}(V_2, V_2')$ e $D \in \mathcal{L}(V_2', V_2'')$, Prove que:

a)$(C \otimes D)(A \otimes B) = CA \otimes DB$

b)$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$

16 — Dado

$$S = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \lambda_\sigma(f) : T^q(L) \to T^q(L)$$

a)Calcule $S(w)$ onde $w = e_1 \otimes e_1 \in T^2(\mathbb{R}^3)$

b)Calcule $S(w)$ onde $w = e_1 \otimes e_{21} \in T^2(\mathbb{R}^3)$

c)Calcule $S(w)$ onde $w = e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 \in T^3(\mathbb{R}^3)$ (Aviso: Calculeira)

d)Calcule $S(w)$ onde $w = e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \in T^3(\mathbb{R}^3)$ (Aviso: Mais calculeira)

17 — Dado

$$S = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \lambda_\sigma(f) : T^q(L) \to T^q(L)$$

Mostre que:

a)$S(f)$ é um tensor simétrico, ou seja, para qualquer $\sigma \in S_q$, $\lambda_\sigma(f) = f$.

b)S é um operador idempotente, ou seja, $S^2 = S$

c)Se f é um tensor antisimétrico então calcule $S(f)$.

18 — Use o item anterior para calcular a dimensão de $S^q(L)$, o conjunto dos q-tensores simétricos.

19 — Dado
$$A(f) = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \mathrm{sinal}(\sigma)\lambda_\sigma(f) : T^q(L) \to T^q(L)$$

Mostre que:

a)$A(f)$ é um tensor anti-simétrico, ou seja para qualquer $\sigma \in S_q$, $\lambda_\sigma(f) = \mathrm{sinal}(\sigma)f$.

b)A é um operador idempotente, ou seja, $A^2 = A$

c)Se f é um tensor simétrico então calcule $A(f)$.

19 — Conclua que $\mathrm{im}\, A = \Lambda^q(V)$

20 — Use o item anterior para calcular a dimensão de $\Lambda^q(L)$, o conjunto dos q-tensores anti-simétricos.

21 — Use o item anterior para calcular a dimensão de $\Lambda(L) = \bigoplus_{q=0}^n \Lambda^q(L)$.

22 — Dados $T_1 \in \Lambda^q(V)$ e $T_2 \in \Lambda^s(V)$ Prove que

$$T_1 \wedge T_2 = A(T_1 \otimes T_2) \in \Lambda^{s+q}(V)$$

satisfaz:

a)associatividade, ou seja, $T_1 \wedge (T_2 \wedge T_3) = (T_1 \wedge T_2) \wedge T_3$.

b)anti-comutatividade: $T_1 \wedge T_2 = (-1)^{\mathrm{pq}} T_2 \wedge T_1$

23 — Mostre que $\Lambda^q V$ é isomorfo ao subspaço das aplicações q-lineares

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V \to}_{p-\text{vezes}} K$$

que são antisimétricas, i.e,

$$F(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \mathrm{sinal}(\sigma) F(v_1, \ldots, v_n)$$