Lista 4

Álgebra Linear Avançada II

Determinantes

1 — Dados os funcionais lineares $f_1, \ldots, f_r : V \to K$ defina a $r-$ forma alternada $f = f_1 \curlywedge \cdots \curlywedge f_r : E \times \ldots \times E \to K$ definida como $f(v_1, \ldots, v_r) = \det(f_i(v_j))$.

a)Prove que $f_1 \curlywedge \cdots \curlywedge f_r \neq 0$ se e somente se $f_1, \ldots, f_r$ são L.I.

b)Qual a relação entre $f_1 \curlywedge \cdots \curlywedge f_r$ e $f_1 \wedge \cdots \wedge f_r$?

c)Prove que se $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é uma base para V^* então os tensores $f_J = f_{j1} \wedge \cdots \wedge f_{jr}$ com $J \in \{(j_1, \ldots, j_r) | j_1 < \cdots < j_n, j_i \in \mathbb{N}\}$ constituem uma base para $\Lambda^r(V)$

2 — Prove que se A é uma matriz triangular superior, isto é, $A = (a_{\text{ij}})$ com a_{ij}=0 se $j < i$, então $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$

3 — Prove que $\det(AB) = \det(A)\det(\text{B})$

4 — Prove que $\det(A^t) = \det(A)$

5 — Use o exercício 2 para provar que se A é uma matriz quadrada diagonalizavel com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ então $|\det(A)| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n|$

6 — Prove que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ são uma base de V se e somente se $\det(A) = 0$, onde A é a matriz cujas linhas são os vetores $v_1, \ldots, v_n$.

7 — Prove que para uma matriz em blocos

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

então det(M)=det(A)det(D).

8 — Use a forma de jordam para mostrar que se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A, com a respectiva multiplicidade então $|\det(A)| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n|$.

9 — Se A é invertivel prove que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - \text{CA}^{-1}B \end{pmatrix}$$

e use esse fato para mostrar que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - \text{CA}^{-1}B)$.

10 — Dados $A, B \in M_n(F)$. Prove que se A ou B são invertíveis então as matrizes $A + \alpha B$ são invertiveis exceto para um número finito de αs.

11 — Prove que $\det A_{\text{nn}} \otimes B_{\text{mm}} = \det(A_{\text{nn}})^m \det(B)^n$

12 — Dado V espaço vetorial e g um produto interno (positivo definido). Chama-se gramaniano dos vetores $v_1, \ldots, v_k \in V$ ao número

$$\mathfrak{g}(v_1, \ldots, v_k) = \det(g(v_i, v_j))$$

Prove que:

a)$\mathfrak{g}(v_1, \ldots, v_k) > 0$, se e somente se, os vetores $v_1, \ldots, v_k$ são L.I.

b)Se v_1 é perpendicular a $v_2, \ldots v_k$ então $\mathfrak{g}(v_1, \ldots, v_k) = |v_1|^2 \mathfrak{g}(v_2, \ldots, v_k)$

c)Seja w_1 a projeção ortogonal de v_1 sobre o espaço gerado por $v_2, \ldots v_r$ e seja $h_1 = v_1 - w_1$. Prove que

$$\mathfrak{g}(v_1, \ldots v_r) = |h_1|^2 \mathfrak{g}(v_2, \ldots, v_k)$$

d)Dado $P[v_1, \ldots, v_r]$ o paralelepipedo $r-$dimensional gerado por $v_1, \ldots, v_r \in V$. Definimos o $r-$volume do paralelepidedo por indução: se $r = 1$ então o volume é igual a $|v_1|$. Supondo conhecido o volume de um paralelepipedo $r-1$ dimensional define-se

$$\operatorname{vol} P[v_1, \ldots, v_r] = |h_1| = \operatorname{vol} P[v_2, \ldots, v_r].$$

e)Prove que $\operatorname{vol} P[v_1, \ldots, v_r] = \sqrt{\mathfrak{g}(v_1, \ldots, v_k)} = \sqrt{\det(g(v_i, v_j))}$

f)Prove que se $\dim(V) = n$, e A é a matriz cujas colunas são os vetores $v_1, \ldots, v_n$. Prove que

$$\mathfrak{g}(v_1, \ldots, v_n) = (\det A)^2$$

g)Conclua do item anterior que o volume do paralelepidedo gerado por $v_1, \ldots, v_n$ tem volume igual a $|\det A|$.