Tabela de conteúdos

Índice

Preliminares

Dado um conjunto $\mathcal{S}$, vamos construir um espaço vetorial com base os elementos desse conjunto .

Para isso seja $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções de $\mathcal{S}$ em $\mathbb{K}$. Nesse conjunto consideramos a soma e o produto usual de funções. É fácil de provar que com essas operações $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial.

Dado um elemento $s \in S$ podemos construir a função:

$$\delta_s : S \rightarrow \mathbb{K}$$
$$\delta_s(t) = \begin{cases} 0 \,\mathrm{se}\, s \neq t \\ 1 \,\mathrm{se}\, s = t \end{cases}$$

Claramente $\{\delta_s, s \in S\}$ é uma base para $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$.

E desta forma podemos identificar um elemento $s \in S$ com um elemento da base $\{\delta_s, s \in S\}$ de $\mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$. Através dessa identificação podemos escrever que $s \in \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathbb{R})$ ou ainda $2s_1 + s_2$.

Aplicações Multilineares

Definição 1. *Uma funçaõ* $\varphi: V_1 \times \ldots \times V_n \rightarrow W$ *é dita multilinear se:*

$$f(v_1, \ldots a v_i + b v_i', \ldots v_n) = a f(v_1, \ldots v_i, \ldots v_n) + b f(v_1, \ldots v_i', \ldots v_n)$$

para todo $a, b \in K$ *e para todo* $v_i, v_i' \in V_i$, *com* $1 \leqslant i \leqslant n$.

Exemplo 2. Se $n = 1$ na definição anterior então uma aplicação multilinear se reduz simplesmente a uma transformação linear.

Exemplo 3. Se $n = 2$, então uma aplicação multilinear é uma aplicação bilinear.

Exemplo 4. Dados n, m inteiros positivos. Então a multiplicação de polinomios:

$$* : \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{P}_m(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{P}_{n+m}(\mathbb{K})$$

é uma aplicação bilinear.

Exemplo 5. A aplicação $\square: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\square((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) = x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2$$

é uma aplicação trilinear.

Exemplo 6. A aplicação $\clubsuit\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\clubsuit((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) = x_1 y_2 z_1$$

é uma aplicação trilinear.

Exemplo 7. Dado $[a, b]$ um intervalo fechado em $\mathbb{R}$ e seja $C[a, b]$ o conjunto das funções continuas em $[a, b]$. Então a aplicação $\phi\colon C[a, b]^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi\colon (f_1, \dots f_n) = \int_a^b f_1(x) \cdots f_n(x) \mathrm{dx}$$

é n-linear.

Exemplo 8. Dado $[a, b]$ um intervalo fechado em $\mathbb{R}$ e seja $C^1[a, b]$ o conjunto das funções diferenciaveis em $[a, b]$. Então a aplicação $\phi\colon C^1[a, b]^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi\colon (f_1, \dots f_n) = \frac{d}{\mathrm{dx}} (f_1(x) \cdots f_n(x))$$

é n-linear.

Exemplo 9. Dado uma aplicação multilinear $\varphi\colon V_1 \times \dots \times V_n \to W_1$ e uma transformação linear $T\colon W_1 \to W_2$, então $T\varphi\colon V_1 \times \dots \times V_n \to W_2$ é uma aplicação multilinear.

Exemplo 10. Dado V espaço vetorial e V^* seu dual e sejam $f_1, \dots f_n \in V^*$ então a aplicação:

$$\diamondsuit\colon V^n \to \mathbb{K}$$

$$\diamondsuit(v_1, \dots v_n) = f_1(v_1) \cdots f_n(v_n)$$

é multilinear.

Exercício 1. Prove que as aplicações anteriores são multilineares.

Denotaremos o conjunto das aplicações multilineares de $V_1 \times \dots \times V_n$ em W por $\mathrm{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, W)$. Se denotarmos $Z = V_1 \times \dots \times V_n$ então claramente

$$\mathrm{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, W) \subset \mathcal{F}(Z, W)$$

onde $\mathcal{F}(Z, W)$ é o conjunto de todas as funções de Z em W, que é um espaço vetorial.

Exercício 2. Dado A um conjunto e V espaço vetorial. Prove que $\mathcal{F}(A, V)$ é um espaço vetorial com a soma e multiplicação por escalar usual.

Teorema 11. *Dados $V_1, \dots V_n$ e W espaços vetoriais e seja $Z = V_1 \times \dots \times V_n$ então $\mathrm{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, W)$ é um subspaço de $\mathcal{F}(Z, W)$.*

Teorema 12. ***(Construção de formas por extensão multilinear)*** *Dado n um inteiro positivo e sejam $V_1, \ldots V_n$ e W espaços vetoriais, assuma que $\dim V_i = d_i$ e seja $\{e_1^i, \ldots e_{d_i}^i\}$ uma base para V_i. Para cada multiindice $(j_1, \ldots j_n)$ com $1 \leqslant j_i \leqslant d_i$ seja $w_{(j_1, \ldots, j_n)} \in W$. Então existe e é única a forma:*

$$\varphi: V_1 \times \ldots \times V_n \rightarrow W$$

satisfazendo

$$\varphi(e_{j_i}^i, \ldots, e_{j_n}^n) = w_{(j_1, \ldots, j_n)}$$

Demostração. Para construir φ sejam $v_i \in V_i$. Então podemos escrever:

$$v_i = \sum_{j=1}^{d_i} a_j^i e_j^i$$

com $a_j^i \in \mathbb{K}$.

Supondo que a forma existisse ela deveria ser multilinear e assim usando a multilineridade temos que se a forma existisse, ela deveria satisfazer:

$$\varphi(v_1, \ldots v_n) = \sum_{(j_1, \ldots j_n)} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \cdots a^n w_{(j_1, \ldots, j_n)}$$

Desta forma definimos φ pela expressão anterior. Claramente φ é multilinear.

Para provarmos a unicidade consideramos outra forma ρ tal que

$$\rho(e_{j_i}^i, \ldots, e_{j_n}^n) = w_{(j_1, \ldots, j_n)}$$

então por multilinearidade

$$\rho(v_1, \ldots v_n) = \sum_{(j_1, \ldots j_n)} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \cdots a^n w_{(j_1, \ldots, j_n)}$$

e desta forma $\rho = \phi$. □

Teorema 13. *Dado n um inteiro positivo e sejam $V_1, \ldots V_n$ e W espaços vetoriais, assuma que $\dim V_i = d_i$ e $\dim W = d$ e seja $\{e_1^i, \ldots e_{d_i}^i\}$ uma base para V_i e $w_1, \ldots, w_d$ para para W. Para cada multiindice $(k_1, \ldots k_n, k)$ com $1 \leqslant j_i \leqslant d_i$ e $1 \leqslant k < d$ seja a forma definida por:*

$$\delta_{k_1, \ldots k_n, k}(e_{j_i}^i, \ldots, e_{j_n}^n) = \begin{cases} w_k \text{ se } k_i = j_i \text{ para todo } i; \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

então as formas $\delta_{k_1, \ldots k_n, k}$ com $1 \leqslant j_i \leqslant d_i$ e $1 \leqslant k < d$ formam uma base de $\mathrm{Mult}(V_1 \times \ldots \times V_n, W)$.

Corolário 14. *A dimensão de $\mathrm{Mult}(V_1 \times \ldots \times V_n, W)$ é $d_1 \cdots d_n d$*

Definição 15. *Uma forma $\phi \in \mathrm{Mult}(V_1 \times \ldots \times V_n, W)$ é dita não singular se $\phi(v_1, v_2, \ldots v_n) = 0$ então pelo menos um dos v_i é o vetor nulo. Caso contrário a forma é dita singular.*

Exercício 3. A forma $\mu: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\mu((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

é não singular

Exercício 4. A aplicação $\clubsuit: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\clubsuit((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)) = x_1 y_2 z_1$$

é singular.

Definição 16. *Uma forma $\phi: V^n \rightarrow W$ é dita alternada se para todo par de inteiros i, j, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ e para todos os vetores $v_1, \ldots, v_n \in V$,*

$$\varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots v_j, \ldots v_n) = -\varphi(v_1, \ldots, v_j, \ldots v_i, \ldots v_n)$$

Exercício 5. Prove que $\Delta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Delta((a, b), (c, d)) = \mathrm{ad} - \mathrm{bc}$ é bilinear e alternada.

Produto Tensorial de Espaços Vetoriais

Abordagem Concreta

Dados V_1 e V_2 espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ vamos construir concretamente um novo espaço vetorial, denominado produto tensorial de V_1 e V_2 e denotado $V_1 \otimes V_2$:

Para isso sejam $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base de V_1 e $F = \{f_1, \ldots f_n\}$ base de V_2. E seja $E \times F = \{(e_i, f_j): e_i \in E, f_j \in F\}$ o produto cartesiano.

Denotaremos $E \otimes F = \mathcal{F}(E \times F, \mathbb{K})$. Então $E \otimes F$ é um espaço vetorial denominado produto tensorial de E e F. Claramente uma base para $E \otimes F$ é dado pelas funções:

$$e_i \otimes f_j: \quad E \times F \rightarrow \mathbb{K}$$
$$e_i \otimes f_j(e_k, f_l) = \begin{cases} 1 \,\mathrm{se}\, i = k \,\mathrm{e}\, j = l \\ 0 \,\mathrm{caso\,contrario} \end{cases}$$

E de extrema importância a aplicação bilinear $\chi: E \times F \rightarrow E \otimes F$ definida por

$$\chi(e_i, f_j) = e_i \otimes f_j$$

Generalizando temos:

Teorema 17. *Dado n um inteiro positivo e sejam V_1, $\ldots V_n$ espaços vetoriais, assuma que* $\dim V_i = d_i$ *e seja $\{e_1^i, \ldots e_{d_i}^i\}$ uma base para V_i . Para cada multiindice $(k_1, \ldots, k_n)$ com $1 \leqslant k_i \leqslant d_i$ e sejam a forma definida por:*

$$e_{k_1}^1 \otimes \ldots \otimes e_{k_n}^n(e_{j_1}^1, \ldots, e_{j_n}^n) = \begin{cases} 1 \ \textit{se}\, k_i = j_i \ \textit{para todo}\, i; \\ 0 \ \textit{caso contrário}. \end{cases}$$

então $e_{k_1}^1 \otimes \ldots \otimes e_{k_n}^n$ formam uma base para $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$

Abordagem Abstrata

No exemplo 9 vimos que dada uma transformação linear e uma aplicação multilinear podemos construir outra aplicação multilinear. Uma questão natural é se podemos através desse metodo construir todas as aplicações multilineares (com uma escolha sabia de W).

Problema 1. Dados $V_1, \ldots, V_n$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, será que existem um espaço vetorial T e aplicação multilinear $\tau: V_1 \times \ldots \times V_n \to T$ tal que para qualquer aplicação multilinear ϕ de $V_1 \times \ldots \times V_n$ em W, existe e é única a aplicação linear $f \in \mathrm{Hom}(T, W)$ tal que $T\tau = \phi$?

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\phi"'] & & T \arrow[dl, "f"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Observe que a solução do problema 1 é um espaço T e uma aplicação τ. O par $(T,\ \tau)$ que satisfaz o problema 1, também chamado problema universal para aplicações multilineares, deve ser tal que para qualquer espaço W e qualquer ϕ: $V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ deve existir uma aplicação linear f de T em W tal que o diagrama anterior comuta.

Antes de provarmos a existencia do par (T, τ) provaremos a unicidade.

Proposição 18. *Suponha (T, τ) e (T', τ') soluções do problema 1. Então existem isomorfismo $g: T \to T'$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"'] & & T \arrow[dl, bend left, "g"] \\ & T' \arrow[ur, bend left, "g^{-1}"] & \end{tikzcd}$$

Demostração. Como $(T,\ \tau)$ é solução do problema 1 então existe g tal que $g\tau = \tau'$, de modo analogo existe h tal que $h\tau' = \tau$.

Agora $\tau = hg\tau$ e assim hg é a identidade.

De modo analogo podemos provar que gh é identidade, e assim T e T' são isomorfos. $\square$

Para provarmos a existência consideraremos o espaço $V_1 \otimes \ldots . \otimes V_n$ e χ conforme definido na seção anterior.

Teorema 19. *$(V_1 \otimes \ldots . \otimes V_n, \chi)$ resolve o problema 1.*

Demostração. Suponha T um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e ϕ: $V_1 \otimes \ldots . \otimes V_n \to W$ uma aplicação linear. Temos que construir uma aplicação linear $f: T \to W$ tal que $f\tau = \phi$.

Para fazermos isso lembremos que $e^1_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^n_{j_n}$ formam uma base de $V_1 \otimes \ldots . \otimes V_n$

Logo existe uma única f linear tal que $f(e^1_{j_1} \otimes ... \otimes e^n_{j_n}) = \phi(e^1_{j_1}, ..., e^n_{j_n})$

Agora é simples de verificar que $f\tau = \phi$. □

Teorema 20. *Dados V_1 e V_2 espaços vetoriais e $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases respectivamente de V_1 e V_2 então*

$$\mathcal{B} = \{\beta_1 \otimes \beta_2, \beta_i \in B_i\}$$

é base de $V_1 \otimes V_2$

Demostração. Considere $V_1 \times V_2$ e seja $V' = \operatorname{span}(\mathcal{B})$. e definimos

$$\phi_0(\beta_1, \beta_2) = \delta_{b_1 b_2}$$

Temos então que V', ϕ_0 resolve o problema universal.

Se definirmos $T: V' \to W$ por $T(\delta_{b_1 b_2}) = \varphi(\beta_1, \beta_2)$

□

Propriedades Funtoriais do Produto Tensorial

Teorema 21. *Dados $V_1, ..., V_n$ e $W_1, ..., W_m$ espaços vetoriais. Então existe um isomorfismo*

$$h: (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) \otimes (W_1 \otimes \cdots \otimes W_m) \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \otimes W_1 \otimes \cdots \otimes W_m$$

Demostração. Considere $\varphi: V_1 \times \cdots \times V_n \times W_1 \times \cdots \times W_m \to (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) \otimes (W_1 \otimes \cdots \otimes W_m)$ dado por $\varphi(v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_m)$. Então φ satisfaz o problema universal

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \ldots \times V_n \times W_1 \times \ldots \times W_m \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & (V_1 \otimes \ldots \otimes V_n) \times (W_1 \otimes \ldots \otimes W_m) \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

para todo ϕ e todo W. Logo $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) \otimes (W_1 \otimes \cdots \otimes W_m)$ é isomorfo a $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \otimes W_1 \otimes \cdots \otimes W_m$. □

Corolário 22. $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \simeq V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$

Teorema 23. $V_1 \otimes V_2 \simeq V_2 \otimes V_1$

Demostração. A aplicação $h: V_1 \times V_2 \to V_2 \otimes V_1$ dada por $h(v_1, v_2) \to v_2 \otimes v_1$ resolve o problema universal com $\tilde{f} = (f_2, f_1)$ onde $f = (f_1, f_2)$ logo $V_1 \otimes V_2 \simeq V_2 \otimes V_1$ □

Teorema 24. $V \otimes F \simeq V \simeq F \otimes V$

Demostração. Considere as base de $V \otimes F$ e de V. □

Considere para todo $i = 1, ..., n$ uma transformação linear $T_i \in \mathcal{L}(V_i, V_i')$ então podemos construir uma aplicação multilinear $\varphi: V_1 \times \cdots \times V_n \to V_1' \otimes \cdots \otimes V_n'$ dada por

$$\varphi: (v_1, ..., v_n) = T_1(v_1) \otimes \cdots T_n(v_n)$$

Logo pela universalidade do produto tensorial existe uma única transformação linear S tal que $S\varphi = \phi$

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & V_1' \otimes \ldots \otimes V_n' \arrow[dl, dashed, "S"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

A aplicação S é dita produto tensorial das T_i e é denotada por $S = T_1 \otimes \cdots \otimes T_n$

Proposição 25. *Dados V_i, V_i', V_i'', espaços vetoriais e $T_i \in \mathcal{L}(V_i, V_i')$ e $L_i \in \mathcal{L}(V_i', V_i'')$ para todo $i = 1, ..., n$. Então:*

a) Se todas as T_i forem sobrejetivas então $S = T_1 \otimes \cdots \otimes T_n$ também é sobrejetiva;

b) Se todas as T_i forem injetivas então $S = T_1 \otimes \cdots \otimes T_n$ também é injetiva;

c) Se todas as T_i forem isomorfismos então $S = T_1 \otimes \cdots \otimes T_n$ também é isomorfismo;

d) $(T_1 \otimes \cdots \otimes T_n) \circ (L_1 \otimes \cdots \otimes L_n) = (T_1 L_1) \otimes \cdots \otimes (T_n L_n)$

e) Se T_i forem isomorfismos e $S = T_1 \otimes \cdots \otimes T_n$ então $S^{-1} = T_1^{-1} \otimes \cdots \otimes T_n^{-1}$

Demostração. Provaremos a e b □

Troca de Corpos

Suponha que V é um espaço vetorial sobre K e que F seja outro corpo contendo K (por exemplo $K = \mathbb{R}$ e $F = \mathbb{C}$)

Considere o produto $V \otimes_K F$, esse produto é um espaço vetorial sobre K. Queremos mostrar que $V \otimes_K F$ possui uma estrutura natural de espaço vetorial sobre F.

Vamos definir essa estrutura exibindo como deve ser a adição de vetores e a multiplicação por escalar.

A adição consideraremos a usual. E agora definiremos a multiplicação pelos escalares de F.

Dado $f \in F$, seja $\mu_f: F \to F$ dada por $\mu_f(g) = fg$. μ_f é uma transformação linear do espaço vetorial F sobre K. E desta forma $\mathrm{Id}_V \otimes \mu_f$ é uma transformação K-linear de $V \otimes_K F$.

Agora dado $\xi \in V \otimes_K F$

$$\xi = \sum v_i \otimes x_i.$$

Agora definimos a multiplicação por f pela formula:

$$f\xi = \mathrm{Id}_V \otimes \mu_f(\xi) = \sum v_i \otimes f x_i$$

Dado a inclusão $i: K \rightarrow F$, temos uma inclusão de $V \simeq V \otimes_K K \rightarrow V \otimes_K F$ dado por $(v, k) \rightarrow (v, i(k)$

Teorema 26. *Dado V espaço vetorial sobre K e F um corpo contendo K. Então se B é base para V então:*

$$\Gamma = \{\alpha \otimes 1, \alpha \in B\}$$

é base para $V \otimes_K \mathrm{Fc}$.

Demostração. Vamos provar que Γ é linearmente independente.

Começamos observando que Γ é linearmente independente sobre K.

Agora sejam $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in B$ e $k_1, \ldots, k_n \in F$ e suponha que

$$\sum_{i=1}^{n} k_i (a_i \otimes 1) = 0$$

Agora seja $C = \{z_j\}$ uma base para F sobre K. Então

$$k_i = \sum_j x_{\mathrm{ij}} z_j$$

e desta forma:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i (\alpha_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \otimes k_i) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \otimes \sum_j x_{\mathrm{ij}} z_{j_i})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \otimes \sum_j x_{\mathrm{ij}} z_{j_i}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_j x_{\mathrm{ij}} (\alpha_i \otimes z_{j_i}) = 0$$

Agora como B é linearmente independente sobre K isso implica que $x_{\mathrm{ij}} = 0$ e assim $k_i = 0$ para todo i.

Para provar que gera observamos que como espaço sobre K o conjunto Γ gera e assim para qualquer $w \in V \otimes_K F$ é da forma

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i (\alpha_i \otimes 1)$$

com $w_i \in K$.

□

Corolário 27. *Suponha V de dimensão finita sobre K. então*

$$\dim_K (V) = \dim_F (V \otimes_F K)$$