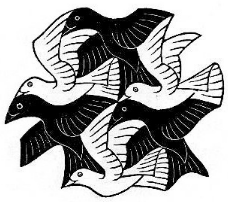
Estrutura dos Operadores Lineares

Daniel Miranda



UFABC, 26 de novembro de 2012
Versão: 0.37

SÍMBOLOS E NOTAÇÕES GERAIS

Ao longo do curso serão adotados os seguintes símbolos e notações (sem prejuízo de outros símbolos e notações que irão sendo introduzidos ao longo destas notas):

$\mathcal{L}(V, V)$	:	Espaço das transformações lineares$\tau : V \to V$
1	:	Número natural 1 e a transformação identidade de $V \to V$
I	:	Matriz identidade
$p_\tau(x)$	:	Polinômio característico de τ
K	:	Corpo
see	:	se e somente se
$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$	:	Espaço gerado por $\{a_1, \dots, a_n\}$

SUMÁRIO

1 ESTRUTURA DOS OPERADORES LINEARES

O objetivo deste capítulo é entender a estrutura dos operadores lineares. Boa parte dessa tarefa é o de encontrar bases apropriadas nas quais o operador linear possua uma representação "simples".

A demonstração dos teoremas estruturais que apresentaremos será feita por indução, quebrando o espaço em subespaços invariantes.

1.1 ESPAÇOS INVARIANTES

Dado $\tau \in \mathcal{L}(V, V)$ dizemos que um subespaço $W \subset V$ é **invariante** por τ (ou ainda que W é $\tau-$**invariante**) se

$$\tau(W) \subset W.$$

Dado $\tau \in \mathcal{L}(V, V)$ e $W \subset V$ um espaço $\tau-$invariante, definimos $\tau|_W : W \to W$ como

$$\tau|_w(w) = \tau(w) \text{ se } w \in \mathrm{W}.$$

Teorema 1. *Dado um operador $\tau : V \to V$ e uma decomposição de V em subespaços $\tau-$invariantes $V = V_1 \oplus V_2$. Suponha que restrito a V_1 a matriz de τ seja A_1 na base β_1 e que restrito a V_2 a matriz de τ seja A_2na base β_2 então a matriz de $\tau : V \to V$ na base $\beta = \beta_1 \sqcup \beta_2$ é dada por*

$$\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$$

Um caso particular extremamente importante é o caso quando temos um subespaço invariante de dimensão 1,i.e, W é $\tau-$invariante e $\dim W = 1$, nesse caso temos que W é gerado por um vetor $w \in W$, com $w \neq 0$, i.e,

$$W = \{aw, a \in K\}$$

e claramente existe λ tal que

$$\tau(w) = \lambda w$$

Ainda nesse caso dizemos que w é um **autovetor.**

Definição 2. Dizemos que $v \in V$ é um autovetor para τ se existe $\lambda \in K$ tal que $\tau(w) = \lambda w$. Tal $\lambda \in K$ é dito **autovalor** associado ao autovetor w.

O conjunto de todos os autovalores de τ com as respectivas multiplicidades é denominado espectro de τ e denotado por $\mathrm{spec}(\tau)$

Dado uma transformação $\tau \in \mathcal{L}(V, V)$, para encontramos os autovalores de τ devemos encontrar os $\lambda \in K$ tais que:

$$\tau(w) = \lambda 1(w)$$

isto é

$$(\tau - \lambda 1)(w) = 0$$

Para que o sistema linear homogêneo acima tenha solução não trivial devemos temos ter que

$$\det(\tau - \lambda 1) = 0$$

O polinômio $p_\tau(x) = \det((\tau - x1))$ é dito **polinômio característico** de τ. E acabamos de provar o seguinte teorema:

Teorema 3. *Dado $\tau \in \mathcal{L}(V, V)$ então $\lambda \in K$ é autovalor see λ é raiz do polinômio característico $p_\tau(\lambda)$.*

1.2 AÇÃO DOS POLINÔMIOS EM $\mathcal{L}(V, V)$

Podemos também interpretar cada polinômio $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$ como uma função de $\mathcal{L}(V, V)$ em $\mathcal{L}(V, V)$ definida como:

$$\begin{cases} p(\tau) : \mathcal{L}(V, V) \longrightarrow \mathcal{L}(V, V) \\ \qquad \tau \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \tau^i \end{cases}$$

sendo $\tau^0 = 1$ o operador identidade e τ^na composta iterada n vezes de τ.

Definição 4. Dizemos que um polinômio $p(x)$ anula uma transformação τ se

$$p(\tau) = 0$$

Lema 5. *Se* V *é um espaço vetorial de dimensão* n *e* $\tau \in \mathcal{L}(V, V)$ *então existe um polinômio* $g(x) \in K[x]$ *tal que* $g(\tau) = 0$.

Demonstração. Seja $\gamma = \left\{1, \tau, \tau^2, \dots \tau^{n^2}\right\}$. Como $\dim(L(V, V)) = n^2$, temos que γ é um conjunto linearmente dependente, logo existem $a_i \in K$ tais que

$$a_0 1 + a_1 \tau + \cdots + a_n \tau^{n^2} = 0$$

Logo $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ é um polinômio que anula τ. □

O **aniquilador** de τ é o conjunto de todos os polinômios que anulam τ:

$$\mathrm{Ann}(\tau) = \{p(x) | p(\tau) = 0\}$$

é um ideal de $K[x]$. O lema anterior prova que esse ideal é não trivial. Como $K[x]$ é um domínio de ideais principais, temos que existe um único polinômio mônico $m(x)$ tal que:

$$\mathrm{Ann}(\tau) = \langle m(x) \rangle = \{a(x) m(x) \text{ com } a(x) \in K[x]\}$$

O gerador $m(x)$ do ideal $\mathrm{Ann}(\tau)$ é dito **polinômio minimal** de τ.

1.3 TEOREMA DE SCHUR

Proposição 6. *Suponha* $\tau \in \mathcal{L}(V, V)$ *e* $\beta = \{v_1, \dots v_n\}$ *base de* V. *Então são equivalentes:*

1. A matriz de τ na base β é triangular superior;
2. $\tau v_k \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ para todo $k = 1, \dots n$;
3. $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ é $\tau-$invariante para todo $k = 1, \dots, n$;

Demonstração. Exercício □

Teorema 7. *Dado um operador linear τ sobre um espaço vetorial V de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, então existe uma base B para$V$ tal que a matriz de τ em relação à base$B$ é triangular superior.*

Demonstração. A prova deste teorema é por indução sobre a dimensão de V. Para $\dim V = 1$, o resultado é claro por isso suponha por hipótese indutiva que o resultado é válido para espaços vetoriais de dimensão menor do que V. E seja λ um autovalor de τ, que existe pois K é algebricamente fechado

Considere $\operatorname{im}(\tau - \lambda 1)$. Não é difícil mostrar que $\operatorname{im}(\tau - \lambda 1)$ é um subespaço invariante de dimensão menor do que V. Pela hipótese de indução, existe uma base $B' = \{e_1, \ldots, e_k\}$ para $\operatorname{im}(\tau - \lambda 1)$ tal que nessa base a matriz de $T|_{\operatorname{im}(\tau-\lambda 1))}$ é uma matriz triangular superior. Estendendo B' à uma base $\{u_1 ... u_n, v_1 ... v_m\}$ de V, a prova está completa, observando que para todo k tal que $1 \leqslant k \leqslant\leqslant m$, $T(v_k) \in \langle u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_k \rangle$. □

1.4 TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

1.4.1 Demonstração Usando Espaços Quocientes

Teorema 8. *Dado $\tau \in L(V, V)$ então o polinômio característico de τ anula τ, i.e:*

$$p_\tau(\tau) = 0.$$

Demonstração. Vamos prová-lo apenas para o caso de um corpo algebricamente fechado K embora também seja verdadeiro sem esta restrição.

Faremos a demonstração por indução sobre $\dim V$.

Se V é unidimensional, então τ é uma multiplicação por um escalar a, nesse caso $p_\tau(x) = x - a$ e claramente $p_\tau(\tau) = 0$.

Suponha $\dim L = n >\geqslant 2$ e suponhamos que o teorema está demonstrado para espaços com dimensão $n - 1$.

Nós selecionamos um autovalor a do operador τ e $W \subset V$ um subespaço unidimensional invariante associado a a, i.e, o subespaço gerado pelo autovetor e_1 associado a a. Estendemos para a base $e_1, ..., e_n$ de V. A matriz da transformação nesta base tem a forma

$$\begin{pmatrix} a & * \cdots * \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Portanto $p_\tau(x) = (a - x)\det(A - x1)$. O operador τ determina o operador:

$$\bar{\tau} : V/W \longrightarrow V/W$$

$$\bar{\tau}(v + W) = \tau(v) + W$$

Os vetores $\bar{e}_i = e_i + W \in V/W$, com $i > 2$ formam uma base para V/W, e a matriz de $\bar{\tau}$ nesta base é igual a A. Portanto:

$$p_{\bar{\tau}}(x) = \det(A - x1)$$

é o polinômio característico da $\bar{\tau}$ e, de acordo com a hipótese indutiva $p_{\bar{\tau}}(\bar{\tau}) = 0$.

Assim, $p_{\bar{\tau}}(\tau)(v) \in W$ para qualquer vetor de $v \in V$. Portanto

$$p_\tau(\tau)(v) = (a - \tau)p_{\bar{\tau}}(\tau)v = 0$$

pois $a - \tau$ anula todos os vetores em W. □

1.4.2 Demonstração Elementar Usando Propriedades do Determinante

Para demonstrarmos o teorema de Cayley-Hamilton usaremos a seguinte identidade envolvendo a matriz A e sua matriz de cofatores

Proposição 9. *Dado uma matriz $A_{n\times n}$ com $n \geqslant 2$ então temos que:*

$$A(\operatorname{cof} A)^t = (\det A)1$$

Para uma demonstração desse fato veja [6].

Seja $p(x)$ o polinômio característico de A:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

seja $B(x) = (b_{ij}(x))$ a adjunta de $A - x1$. Como $b_{ij}(x)$ são os cofatores da matriz $A - x1$ eles são polinômio em x de grau menor igual que $n - 1$. Assim

$$b_{ij}(x) = b_{ij_0} + b_{1j_1}x + \cdots + b_{nj_{n-1}}x^{n-1}$$

Seja $B_k = \left(b_{i,j_k}\right)$Para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Então nós temos que

$$B(x) = B_0 + B_1 x + \cdots + B_{n-1}x^{n-1}$$

Pela igualdade

$$(A - x1)[\mathrm{adj}(A - x1)] = [\mathrm{adj}(A - x1)](A - x1) = \det(A - x1)1$$

temos que $(A - x1)B(x) = [\det(A - x1)]1$. Assim

$$(A - x1)[B_0 + B_1 x + \cdots + B_{n-1}x^{n-1}] = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n)1$$

Expandindo o lado esquerdo desta equação e igualando as potências de mesmo grau , temos que

$$-B_{n-1} = a_n 1,\ AB_{n-1} - B_{n-2} = a_{n-1}1, ..., AB_1 - B_0 = a_1 1,\ AB_0 = a_0 1.$$

Multiplicando as equações matriciais acima por $A^n, A^{n-1}, ..., A, I$, respectivamente, temos

$$-A^n B_{n-1} = a_n A^n, \quad A^n B_{n-1} - A^{n-1}B_{n-2} = a_{n-1}A^{n-1}$$

$$, \ldots, A^2 B_1 - AB_0 = a_1 A, \quad AB_0 = a_0 1$$

Somando as equações matriciais acima temos que $p(A) = 0$.

1.4.3 Demonstração Topológica

Faremos a demonstração para o corpo dos complexos.[1]

Começamos por mostrar que o teorema é verdadeiro se o polinômio característico não possui raízes repetidas e, em seguida, provaremos o caso geral.

Seja o discriminante do polinômio p dado por

$$\delta(p) = \prod_{i<j}(r_i - r_j)$$

sendo r_i as raízes de p ordenadas de alguma forma

Suponhamos, então, que o discriminante do polinômio característico é diferente de zero e, portanto, que $\tau : V \to V$ tem $n = \dim V$ autovalores distintos.

Podemos, portanto, escolher uma base de autovetores $\{v_1, \ldots, v_n\}$, com $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores correspondentes.

1 Ressaltamos que a demonstração topológica funciona para corpos quaisquer desde que tomemos o cuidado de passar ao fecho algébrico e considerar a topologia de Zariski.

A partir da definição do polinômio característico temos que

$$p_\tau(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \lambda_i).$$

e claramente

$$p_\tau(\tau)v_i = 0$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Como $p_\tau(\tau)$ se anula numa base, deve, de fato, ser identicamente nulo.

Para provar o caso geral, assumiremos que a aplicação

$$\tau \mapsto \delta(p_\tau),$$

é polinomial em $\mathcal{L}(V, V)$. Por isso, o conjunto das transformações τ com autovalores distintos é um subconjunto aberto denso de $\mathcal{L}(V, V)$. Agora a aplicação polinômio característico

$$\tau \mapsto p_\tau(\tau),$$

é uma aplicação polinomial do espaço $\mathcal{L}(V, V)$. Como ele se anula num subconjunto aberto denso, deve anular em todos os pontos.

1.5 TEOREMA DE JORDAN

Seja $\tau : V \to V$ uma transformação linear de um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Vamos provar que existe uma base de V, em que τ é representado por uma matriz na forma normal Jordan:

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_r \end{pmatrix}$$

sendo cada J_i um bloco de Jordan $J_t(\lambda)$ para algum $t \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & \\ & 1 & \lambda & & & \\ & & 1 & \ddots & & \\ & & & 1 & \lambda & \\ & & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Os seguintes resultados nos fornece uma caracterização simples da base de Jordan:

Lema 10. *Suponha que* $\tau^q = 0$ *e* $\tau^{q-1} \neq 0$. *Seja* $v \in V$ *um vetor tal que* $\tau^{q-1}v \neq 0$. *Então os vetores*

$$\{v, \tau v, \dots, \tau^{q-1}v\}$$

são linearmente independentes.

Usando o lema anterior podemos caracterizar uma base de Jordan para um operador:

Proposição 11. *Dado* $\tau \in \mathcal{L}(V, V)$ *então são equivalentes:*

1. $\{u_1^1, \dots, u_{k_1}^1, u_1^2, \dots, u_{k_2}^2, u_1^m, \dots u_{k_m}^m\}$ é uma base de Jordan para τ;
2. Existem $\lambda_j \in K$ tal que $\tau u_j^m = \lambda_j u_j^m + u_{j+1}^m$, onde interpretamos $u_j^l = 0$ se $j > k_l$.

No caso em que $\tau \in \mathcal{L}(V, V)$ é nilpotente, pode-se provar que todos os autovalores de τ são nulos e nesse caso temos:

Proposição 12. *Dado* $\tau \in \mathcal{L}(V, V)$ *com* τ *nilpotente então são equivalentes:*

1. $\{u_1^1, \dots, u_{k_1}^1, u_1^2, \dots, u_{k_2}^2, u_1^m, \dots u_{k_m}^m\}$ é uma base de Jordan para τ;
2. Existem $\lambda_j \in K$ tal que $\tau u_j^m = u_{j+1}^m$, onde interpretamos $u_j^l = 0$ se $j > k_l$.
3. Existem $\{u_1, \dots u_m\}$ tal que:

   $$\{u_1, \tau u_1, \tau^{k_1}u_1, u_2, \dots \tau^{k_2}u_2, u_m, \dots, \tau^{k_m}u_m\}$$

   é base de Jordan para τ.

Uma representação diagramática da base acima pode ser feita como:

$$\begin{tikzcd}
u_1 \arrow[d] & & & \\
\tau u_1 \arrow[d] & u_2 \arrow[d] & & \\
\tau^2 u_1 \arrow[d] & \tau u_2 \bullet \arrow[d] & & u_m \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \cdots & \vdots \arrow[d] \\
\tau^{k_1} u_1 & \tau^{k_2} u_2 & & \tau^{k_m} u_m
\end{tikzcd}$$

ou de maneira mais esquemática, como:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d] & & & \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & & \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & & \bullet \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \cdots & \vdots \arrow[d] \\
\bullet & \bullet & & \bullet
\end{tikzcd}$$

Teorema 13. *Dado* K *um corpo algebricamente fechado e* V *um espaço vetorial de dimensão finita e* $\tau : V \to V$ *um operador linear. Então:*

1. Existe uma base de Jordan para τ, isto é existe uma base de V na qual a matriz de τ está na forma normal Jordan, i.e, existe uma matriz mudança de base M tal que a matriz do operador na base original A pode ser reduzida a forma de Jordan

$$M^{-1}AM = J$$

2. A matriz J é única, a menos de permutação dos blocos de Jordan.

A demonstração desse teorema é envolvente e assim apresentamos primeiramente a estrutura geral da demonstração.

Primeiramente decomporemos $V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$ com os subespaços V_i invariantes. Cada espaço desses corresponderá ao conjunto dos blocos de Jordan com o mesmo λ na diagonal.

Em cada um desses subespaços teremos que existe um λ tal que $\tau - \lambda 1$ é nilpotente. Assim provaremos primeiramente a forma de Jordan para operadores nilpotentes.

De posse desses ingredientes obteremos a forma de Jordan para um operador linear τ.

1.5.1 Redução à Aplicações Nilpotentes

O primeiro passo é o de reduzir ao caso no qual τ é um operador nilpotente, i.e., $\exists q \in \mathbb{N}$ tal que $\tau^q = 0$ para algum $q \geqslant 1$. Para tanto precisamos da seguinte definição:

Definição 14. Um vetor $v \in V$ é dito **autovetor generalizado do operador** τ **associado a** $\lambda \in K$ se existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\tau - \lambda 1)^r v = 0$$

Claramente todos os autovetores são autovetores generalizados.

Denotaremos por $V(\lambda)$ o conjunto dos autovetores generalizados associados a $\lambda \in K$.

Proposição 15. $V(\lambda)$ *é subespaço vetorial e* $V(\lambda) \neq 0$ *see* λ *é auto valor de* τ.

Demonstração. Suponha que existam r_1 e r_2 tais que $(\tau - \lambda 1)^{r_1} v_1 = (\tau - \lambda 1)^{r_2} v_2 = 0$. Seja $r = \max\{r_1, r_2\}$ então:

$$(\tau - \lambda 1)^r (v_1 + v_2) = 0 \text{ e } (\tau - \lambda 1)^{r_1} a v_1 = 0$$

Logo $V(\lambda)$ é espaço vetorial.

Se λ é autovalor então existe autovetor v associado a λ e logo $v \in V(\lambda) \neq 0$. Reciprocamente dado $l \in V(\lambda)$. Seja o menor r tal que $(\tau - \lambda 1)^r l = 0$ logo o vetor $l' = (\tau - \lambda 1)^{r-1} l$ é não nulo e l' é autovetor de τ pois

$$(\tau - \lambda 1) l' = (\tau - \lambda 1)^r l = 0$$

□

Agora precisamos do seguinte lema:

Lema 16. *Se* $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ *e* $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ *são polinômios coprimos tal que* $f(\tau)g(\tau) = 0$, *então* $V = \operatorname{im} f(\tau) \oplus \operatorname{im} g(\tau)$. *Além disso, os subespaços nesta decomposição são* τ*-invariante e o polinômio mínimo de* τ *restrito a* $\operatorname{im} g(\tau)$ *divide* $f(x)$.

Demonstração. Se $v = f(\tau)w$ então $\tau v = f(\tau)\tau w$ e logo os subespaços são τ-invariante. Pelo algoritmo de Euclides existem dois polinômios mais um $a(x)$ e $b(x)$ de tal modo que

$$a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1$$

Logo para qualquer $v \in V$,

$$f(\tau)(a(\tau)v) + g(\tau)(b(\tau)v) = v$$

Isto mostra que$f(\tau)a(\tau)$ é a projeção na $\operatorname{im} f(\tau)$, e que $V = f(\tau)V + g(\tau)V$.

Se $v \in \operatorname{im} g(\tau)$, com digamos$v = g(\tau)w$, então $f(\tau)v = f(\tau)g(\tau)w = 0$ de modo que o polinômio mínimo de τ em $\operatorname{im} g(\tau)$ divide$f(x)$. Finalmente, se $v \in \operatorname{im} f(\tau) \bigcap \operatorname{im} g(\tau)$, então

$$v = a(\tau)(f(t)v) + b(t)(g(\tau)v) = 0 + 0 = 0.$$

□

Teorema 17. *[Decomposição Primária] Dado* K *um corpo algebricamente fechado então*$V = \bigoplus V(\lambda_i)$ *com* λ_i *sendo os autovalores do operador* τ.

Demonstração. Sobre um corpo algebricamente fechado temos que o polinômio mínimo de τ se fatora como $(x - \lambda_1)^{a_1} ... (x - \lambda_r)^{a_r}$ onde o λ_i são distintos e cada $a_i \geqslant 1$. Ao aplicar o lema com $f(x) = (x - \lambda i)^{a_i}$ e $g(x)$ o produto dos fatores restantes, podemos dividir V em subespaços

$$V_1, \cdots, V_r$$

de tal modo que $\tau : V_i \to V_i$ tem um mínimo polinomial dividindo $(x - \lambda_i)^{a_i}$. Claramente cada $V_i = V(\lambda_i)$ e assim o teorema segue. □

Corolário 18. *Se o espectro de τ é simples, então τ é diagonalizável.*

Demonstração. Se todos os autovalores de τ são distintos temos que o número de autovalores n é $n = \deg p_\tau(x) = \dim V$. Nesse caso a decomposição primária

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}$$

com todos os V_{λ_i} de dimensão 1 (e assim gerados por um autovetor). Logo nessa base τ é diagonalizável.

No que se segue fixaremos um dos autovalores λ e provaremos que a restrição de τ a V_λ possui base de Jordan. Na verdade consideraremos as aplicações $\tau - \lambda 1_V$ restritas a V_λ. Essas aplicações são nilpotentes e assim podemos reduzir o estudo para o caso em que τ age de modo nilpotente (nos subespaços V_i).

Na verdade provaremos um pouco mais: □

Teorema 19. *[Forma de Jordan para Operadores Nilpotentes] Dado um operador nilpotente agindo num espaço vetorial finito dimensional possui base de Jordan. Nessa base a matriz de τ é uma combinação de blocos da forma $J_r(0)$.*

1.5.2 Forma Normal de Jordan para Operadores Nilpotentes (Demonstração Rápida).

Faremos primeiramente a demonstração por indução sobre $\dim V$. Como τ é nilpotente, $\dim \operatorname{im} \tau < \dim \tau$. Se $\operatorname{im} \tau = 0$, $\tau = 0$ e o resultado é trivial, por isso, podemos assumir que $\operatorname{im} \tau \neq 0$.

Por indução, podemos encontrar $u_1, ..., u_k \in \operatorname{im} \tau$, de modo que

$$u_1, \tau u_1 ..., \tau^{a_1 - 1} u_1, ..., u_k, \tau u_k, ..., \tau^{a_k - 1} u_k$$

é uma base de Jordan para (nesta base $\tau : \operatorname{im} \tau \longrightarrow \operatorname{im} \tau$ está na forma normal de Jordan).

$$
\begin{tikzcd}
u_1 \arrow[d] & & & & \\
\tau u_1 \arrow[d] & u_2 \arrow[d] & & & \\
\tau^2 u_1 \arrow[d] & \tau u_2 \arrow[d] & & u_m \arrow[d] & \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \cdots & \vdots \arrow[d] & \\
\tau^{a_1-1}u_1 & \tau^{a_2-1}u_2 & & \tau^{a_m-1}u_m & \in \ker\tau
\end{tikzcd}
$$

Tabela 1.1: Base de Jordan para $\operatorname{im}\tau$.

Para $1 \leqslant i \leqslant k$ escolha $v_i \in V$ tal que $u_i = \tau v_i$. Claramente $\ker\tau \supseteq \langle \tau^{a_1-1}u_1 ..., \tau^{a_k-1}u_k \rangle$. Estenderemos essa base a uma base de $\ker\tau$, adicionando $w_1, ..., w_l$, isto é: os vetores

$$v_1, \tau v_1, ..., \tau^{a_1}v_1, ..., v_k, \tau v_k, ..., \tau^{a_k}v_k, w_1, ..., w_l$$

formam uma base para V.

$$
\begin{tikzcd}
v_1 \arrow[d] & & & & & & \\
\tau v_1 \arrow[d] & v_2 \arrow[d] & & & & & \\
\tau v_1 \arrow[d] & \tau v_2 \arrow[d] & & v_m \arrow[d] & & & \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \cdots & \vdots \arrow[d] & & & \\
\tau^{a_1}v & \tau^{a_2}v_2 & & \tau^{a_m-1}v_m & w_1 & \cdots & w_l
\end{tikzcd}
$$

Tabela 1.2: Base de Jordan para V. Em vermelho a base de Jordan para $\operatorname{im}\tau$.

A independência linear pode ser facilmente verificada por aplicando τ para qualquer dada relação linear entre os vetores:

Suponha que exista uma combinação linear não trivial dos vetores

$$v_1, \tau v_1, ..., \tau^{a_1} v_1, ..., v_k, \tau v_k, ..., \tau^{a_k} v_k, w_1, ..., w_l$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{a_i} a_{ij} \tau^j v_i + \sum_{k=1}^{l} w_k = 0$$

aplicando τ teremos que os coeficientes dos vetores:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{a_i - 1} a_{ij} \tau^j v_i = 0$$

mas como esses vetores são L.I., temos que $a_{ij=0}$ se $i < a_i$. Logo a combinação inicial se reduz a uma combinação dos vetores

$\tau^{a_1} v_1, \ldots, \tau^{a_k} v_k, w_1, ..., w_l$. Mas esses vetores formam uma base para o núcleo de τ, logo os coeficientes desses vetores também são nulos. E assim temos que são linearmente independentes.

Para mostrar que eles geram V, usamos um argumento de contagem dimensional. Nós sabemos que $\dim \ker \tau = k + l$ e$\dim \operatorname{im} \tau = a_1 + ... + a_k$. Por isso

$$\dim \tau = (a_1 + 1) + ... + (a_k + 1) + l,$$

que é o número de vectores acima.

Portanto, construímos uma base para V na qual $\tau : V \longrightarrow V$ está na forma normal de Jordan.

1.5.3 Forma Normal de Jordan para Operadores Nilpotentes (Usando Quocientes).

Suponha que $\tau^q = 0$ e $\tau^{q-1} \neq 0$. Seja $v \in V$ um vetor tal que $\tau^{q-1} v \neq 0$. O lema 10 nos diz que os vetores $v, \tau v, \ldots, \tau^{q-1} v$ são linearmente independentes. O subespaço U gerado por esses vetores é um subespaço $\tau-$invariante de V. Com respeito a essa base de U, a matriz de $\tau : U \longrightarrow U$ é o bloco de Jordan $J_q(0)$. Portanto, se pudéssemos encontrar um complemento $\tau-$invariante para U, uma indução fácil sobre $\dim V$ completa a prova.

Para mostrar que existe um complemento $\tau-$invariante, trabalhamos por indução em q. Se $q = 1$, então $\tau = 0$ e qualquer complemento do subespaço vectorial U irá servir.

Agora suponha que podemos encontrar um complementar $\tau-$invariante quando $\tau^{q-1} = 0$. Considere $\operatorname{im}\tau \subseteq V$.

Sobre $\operatorname{im}\tau$, τ age como um operador linear nilpotente: $\tau^{q-1} = 0$ e $\tau^{q-2}(\tau v) \neq 0$, então por indução em q temos

$$\operatorname{im}\tau = \left\langle \tau v, \dots, \tau^{q-1}v \right\rangle \oplus W$$

para algum $\tau-$invariante W.

Nossa tarefa é encontrar um complemento $\tau-$invariante para U em V. Suponha primeiro que $W = 0$. Neste caso, $\operatorname{im}\tau = \langle \tau v, ..., \tau^{q-1}v \rangle$ e $\ker\tau \cap \operatorname{im}\tau = \tau^{q-1}v$. Estenda $\tau^{q-1}v$ a uma base de $\ker\tau$, adicionando por exemplo os vetores $v_1 ..., v_s$.

Pelo teorema do núcleo imagem temos que o conjunto $\{v, \tau v ..., \tau^{q-1}v, v_1, ..., v_s\}$ é uma base de V. E assim o subespaço gerado por $v_1 ..., v_s$ é um complementar $\tau-$invariante de U.

Agora, suponha que $W \neq 0$. Então τ induz uma transformação linear, $\overline{\tau}$ em V/W, que faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi"] & V \arrow[d, "\pi"] \\ V/W \arrow[r, "\overline{\tau}"] & V/W \end{tikzcd}$$

Seja $\overline{v} = v + W$. Como $\operatorname{im}\overline{\tau} = \langle \overline{\tau v} ..., \overline{\tau}^{q-1}\overline{v} \rangle$ o primeiro caso ($W = 0$) implica que existe um complemento $\tau-$invariante H em V/W para $\langle \overline{v}, \overline{\tau v} ..., \overline{\tau}^{q-1}\overline{v} \rangle$. A pré-imagem deste complemento em V será denotada por $H' = \pi^{-1}(H)$ e é um complemento apropriado para U.

Para mostrar esse fato, observe que :

$$V/W = \operatorname{im}\overline{\tau} \oplus H$$

Seja $\{\bar{a}_1, \dots, \overline{a}_l\}$ uma base para H e sejam $a_1, \dots, a_l \in V$ vetores que projetam-se nos primeiros e seja $\overline{H} = \langle a_1, \dots, a_l \rangle$ então $H'' = H' \oplus W$ é a pré-imagem de H. Logo:

$$V = \left\langle \tau v, \dots \tau^{q-1}v, \right\rangle \oplus H' \oplus W.$$

e claramente $H' \oplus W$ é $\tau-$invariante.

1.5.4 Forma Normal de Jordan para Operadores Nilpotentes (Usando Quocientes II).

O argumento acima pode ser melhorado de modo a fornecer uma relação clara entre a base de Jordan de τ e $\bar{\tau}$.

Dado τ um operador nilpotente, seja $W = \ker \tau$. Então τ induz uma transformação linear, $\bar{\tau}$ em V/W, que faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi"] & V \arrow[d, "\pi"] \\ V/W \arrow[r, "\bar{\tau}"] & V/W \end{tikzcd}$$

Como $W \neq 0$. então $\dim V/W < \dim V$ e logo por hipótese indutiva existe uma base de Jordan para V/W. Seja

$$\{\bar{v}_1, \tau\bar{v}_1 ..., \tau^{a_1 - 1}\bar{v}_1, ..., \bar{v}_k, \tau\bar{v}_k, ..., \tau^{a_k - 1}\bar{v}_k\}$$

uma base de Jordan para $\bar{\tau}$. Como os vetores: $\{\tau^{a_1 - 1}\bar{v}_1, \dots \tau^{a_k - 1}\bar{v}_k\}$ pertencem ao núcleo de τ. Isso significa que $\tau^{a_1}v_1 \in W$. Logo podemos completar esse conjunto à uma base de W. Sejam $\{w_1 \dots, w_l\}$ vetores em W de modo que:

$$\{\tau^{a_1}v_1, \dots \tau^{a_k}\bar{v}_k, w_1, \dots, w_k\}$$

é uma base para W.

Desse modo teremos que $\{v_1, \tau v_1, ..., \tau^{a_1}v_1, ..., v_k, \tau v_k, ..., \tau^{a_k}v_k, w_1, ..., w_l\}$ é uma base de Jordan para τ.

Para provar que é LI. Suponha que exista uma combinação linear não trivial dos vetores

$$\{v_1, \tau v_1, ..., \tau^{a_1}v_1, ..., v_k, \tau v_k, ..., \tau^{a_k}v_k, w_1, ..., w_l\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{a_i} a_{ij}\tau^j v_i + \sum_{k=1}^{l} w_k = 0$$

aplicando τ teremos que os coeficientes dos vetores:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{a_i - 1} a_{ij}\tau^j v_i = 0$$

mas como esses vetores são L.I., temos que $a_{ij=0}$ se $i < a_i$. Logo a combinação inicial se reduz a uma combinação dos vetores

$\tau^{a_1}v_1, \ldots, \tau^{a_k}v_k, w_1, ..., w_l$. Mas esses vetores formam uma base para $W = \ker\tau$, logo os coeficientes desses vetores também são nulos. E assim temos que são linearmente independentes.

Para mostrar que eles geram V, usamos um argumento de contagem dimensional. Nós sabemos que $\dim\ker\tau = k + l$ e$\dim \operatorname{im}\tau = a_1 + ... + a_k$. Por isso

$$\dim\tau = (a_1 + 1) + ... + (a_k + 1) + l,$$

que é o número de vectores acima.

Portanto, construímos uma base para V na qual $\tau : V \longrightarrow V$ está na forma normal de Jordan.

1.5.5 Unicidade da Forma Normal de Jordan para Operadores Nilpotentes

1.5.6 O Teorema de Jordan

Teorema 20. *Dado* K *um corpo algebricamente fechado e* V *um espaço vetorial de dimensão finita e* $\tau : V \to V$ *um operador linear. Então:*

1. Existe uma base de Jordan para τ, isto é existe uma base de V na qual a matriz de τ está na forma normal Jordan, i.e, existe uma matriz mudança de base M tal que a matriz do operador na base original A pode ser reduzida a forma de Jordan

$$M^{-1}AM = J$$

2. A matriz J é única, a menos de permutação dos blocos de Jordan.

Demonstração. Seja $\tau : V \to V$ um operador linear. Pelo teorema da Decomposição Primária existem $V(\lambda_i)$ auto espaços generalizados $\tau - invariantes$ de modo que

$$V = \bigoplus_{l=1}^{m} V(\lambda_i)$$

Restrito a cada $V(\lambda_i)$, a transformação $\tau - \lambda_i 1$ é nilpotente e assim pelo teorema de Jordan para operadores nilpotentes existe uma base $\{e_k^{\lambda_i}\}_{k=i}^{r_i}$ e blocos de Jordan $J_{t_k}(0)$ com $k = 1, \dots, r_k$ de modo que a matriz de $\tau - \lambda_i 1$ nessa base é:

$$\begin{pmatrix} J_{t_1^{\lambda_i}}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{t_{r_i}^{\lambda_i}}(0) \end{pmatrix}$$

e logo a matriz de τ é:

$$\begin{pmatrix} J_{t_1^{\lambda_i}}(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{t_{r_k}^{\lambda_i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

Seja

$$\bigcup_{\lambda_i \in \operatorname{spec} \tau} \{e_k^{\lambda_i}\}_{k=i}^{r_{\lambda_i}}$$

a base de V obtida pela união das bases de $V(\lambda_i)$. Nessa base a matriz de τ é:

$$\begin{pmatrix} J_{t_1^{\lambda_1}}(\lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{t_{r_1}^{\lambda_1}}(\lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J_{t_1^{\lambda_m}}(\lambda_m) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_{t_{r_m}^{\lambda_m}}(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

O que termina a demonstração do teorema de Jordan. $\square$

1.5.7 Calculando a Forma de Jordan

Dividiremos o processo de obtenção da forma de Jordan de um operador em duas etapas:

1. Na primeira calcularemos os diagramas de Jordan para cada autovalor obtendo assim a matriz de Jordan desse operador:

$$\begin{pmatrix} J_{t_1^{\lambda_1}}(\lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{t_{r_1}^{\lambda_1}}(\lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J_{t_1^{\lambda_m}}(\lambda_m) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_{t_{r_m}^{\lambda_m}}(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

2. Finalmente calcularemos a base na qual o operador é descrito por essa matriz.

CÁLCULO DOS DIAGRAMAS DE JORDAN Dado um autovalor λ de τ, e o seu diagrama de Jordan. Observe que a linha inferior desse diagrama consiste de uma base para $\ker(\tau - \lambda 1)$ e assim o número de vetores na linha inferior é $\dim\ker(\tau - \lambda 1)$. De modo análogo temos que as duas linhas inferiores formam uma base para $\ker(\tau - \lambda 1)^2$ e assim sucessivamente.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d] & & & & & & & \ker\tau^k \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & & & & & & \cdots \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & & \bullet \arrow[d] & & & & \ker\tau^k \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \cdots & \vdots \arrow[d] & & \ker\tau^2 & & \ker\tau^k \\
\bullet & \bullet & & \bullet & \ker\tau & \ker\tau^2 & \cdots & \ker\tau^k
\end{tikzcd}$$

Logo para determinarmos esse diagrama é suficiente calcularmos: $\dim\ker(\tau - \lambda 1), \dim\ker(\tau - \lambda 1)^2 - \dim\ker(\tau - \lambda 1), \dim\ker(\tau - \lambda 1)^3 - \dim\ker(\tau - \lambda 1)^2, \ldots$. Cada um desses números nós dá quantos vetores aparecem em cada linha do diagrama.

CÁLCULO DA MATRIZ MUDANÇA DE BASE Para calcularmos a matriz mudança de base é suficiente resolvermos a equação linear:

$$AM = JM.$$

O sistema pode ser indeterminado, mas nesse caso qualquer solução do sistema linear acima servirá.

Exemplo 21. Determine a forma de Jordan de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de A é $(x-2)^3$e assim seu único autovalor é 2. Logo

$$A - 2 \cdot I = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo $\dim \ker(A - 2 \cdot I) = 2$. Como

$$(A - 2 \cdot I)^2 = 0$$

Temos que $\dim \ker(A - 2 \cdot I)^2 = 2$.
Logo o diagrama desse matrix é:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d] & \\ \bullet & \bullet \end{tikzcd}$$

E assim sua forma de Jordan é

$$\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcularmos a matriz mudança de base queremos resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ou de maneira equivalente

$$\begin{pmatrix} -a-\frac{d}{2} & -a-b-\frac{e}{2} & -c-\frac{f}{2} \\ 2a+d & 2b-d+e & 2c+f \\ 3a+\frac{3d}{2} & 3b+\frac{3e}{2}-g & 3c+\frac{3f}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uma solução para esse sistema é

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e assim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo 22. Ache a forma de Jordan para

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -4 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Nesse caso o polinômio característico é: $(x-3)^2(x-2)^3$ e assim seus autovalores são: $3, 2$.

Temos que $\dim\ker(B-3I) = 2$ e $\dim\ker(B-3I)^2 = 2$ e que
$\dim\ker(B-2I) = 1$, $\dim\ker(B-2I)^2 = 2$ e $\dim\ker(B-2I)^3 = 3$

Logo o diagrama de Jordan associado ao autovalor 2 é

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

e o diagrama de Jordan associado ao autovalor 3 é

$$\bullet \qquad \bullet$$

E assim a forma de Jordan é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 23.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nesse caso $(x-2)^5$, logo 2 é autovalor . Também temos que: $\dim\ker(C-2I)^2 = 3$ e $\dim\ker(C-2I) = 5$ e logo o diagrama para C é

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{tikzcd}$$

e consequentemente a forma de Jordan de C é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.5.8 Aplicações da Forma de Jordan: Exponencial de Matrizes

Definiremos a exponencial de uma matrizes através da série de Taylor para a exponencial real:

Definição 24. Seja A uma matriz nxn, então $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$.

A verificação da convergência da série acima pode ser feita através do teste de Weierstrass.

Exemplo 25. Exponencial da Matrizes nula

Seja 0 a matriz nula então

$$e^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = I$$

Exemplo 26. Exponencial da Matriz Identidade

$$e^I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I^n}{n!} e^I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I}{n!} e^I = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^1 & \dots & 0 \\ \dots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & e^1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 27. Exponencial de uma Matriz Diagonal

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Então:

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \dots & 0 \\ \dots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_n} \end{bmatrix}$$

Ou seja, para uma matriz diagonal, calcular a sua exponencial é equivalente a exponenciar cada elemento da diagonal.

Exemplo 28. Matrizes Nilpotentes

Observe que se uma matriz é nilpotente, os elementos do somatório a partir de um ponto são nulos, isso implica que a série que nos dá e^B é finita,

Vejamos um exemplo:

Seja $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, então

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $B^3 = 0$, logo:

$$e^B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!} e^B = I + B + B^2 + 0 + .. = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

CÁLCULO DA EXPONENCIAL USANDO A FORMA DE JORDAN

Com qualquer A pode ser escrita na forma $M.J.M^{-1}$ para uma certa M, temos que $e^A = e^{M.J.M^{-1}}$, e assim $e^{M.J.M^{-1}} = M.e^J.M^{-1}$, sabemos que $J = N + D$, onde N é uma matriz nilpotente e D uma diagonal, logo, $M.e^J.M^{-1} = M.e^{N+D}.M^{-1}$. Pela propriedade 1 temos $M.e^{N+D}.M^{-1} = M.e^N.e^D.M^{-1}$, uma vez que a matriz diagonal comuta com todas as matrizes.

Finalmente, temos que $e^A = M.e^N.e^D.M^{-1}$.

1.5.9 Propriedades

- Se A e B são duas matrizes tais que A.B=B.A (comutativas), então $e^A.e^B = e^{A+B}$:
- $e = M.e^A.M^{-1}$ para qualquer A

A POLINÔMIOS

Um polinômio sobre um corpo K é uma expressão da forma:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \text{com } a_i \in K$$

O conjunto de todos os polinômios sobre um corpo K formam um espaço vetorial (de dimensão infinita) sobre K. Esse corpo sera denotado por $K[x]$

Lema 29. *Dado* $K^\infty = \{$*sequências sobre* K *com com um número finito de termos não nulos*$\}$*, então*

$$K[x] \simeq K^\infty$$

É usual associar a cada $p(x) \in K[x]$ *uma função* $p(x) : K \longrightarrow K$ *definida como: se* $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *então* $\forall b \in K, p(a) := \sum_{i=0}^{n} a_i b^i$.

Teorema 30. *[Teorema da Divisão Euclidiana] Sejam* K *um corpo,* $f(x)$ *e* $g(x)$ *dois polinômios em* $K[x]$*, com* $g(x) \neq 0$*. Então existem* $q(x), r(x) \in K[x]$ *unicamente determinados, tais que* $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ *onde* $r(x) = 0$ *ou* $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Demonstração. Se $f(x) = 0$, então basta tomar $q(x) = r(x) = 0$, para obter o resultado desejado. O caso $f(x) = 0$ é facilmente demonstrável

Assim, podemos supor que $\deg f(x) \geqslant \deg g(x)$. Consideremos então $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i e g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x_i$, com $an \neq 0 \neq b_m$ e $n \geqslant m$.

Vamos demonstrar por indução sobre $n = \deg f(x)$.

Se $n = \deg f(x) = 0$, então teremos $m = 0, f(x) = a_0$ e $g(x) = b_0$ serão polinômios invertíveis em $K[x]$, de onde segue que

$$f(x) = a_0 = a_0(b_0)^{-1} b_0 + 0,$$

e o Teorema vale.

Suponhamos por hipótese de indução que o teorema vale para todo polinômio $l(x) \in K[x]$, com $\deg l(x) \leqslant n-1$. Suponhamos $\deg f(x) = n$ e consideramos o polinômio $h(x) = f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) \in K[x]$. Assim temos que $\deg h(x) \leqslant n-1$, e portanto pela hipótese de indução existem polinômios $q_1(x)$ e$r_1(x)$ em $K[x]$ tais que $h(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, com $r_1(x) = 0$ ou $\deg r_1(x) < \deg g(x)$. Desta forma temos:

$$f(x) = h(x) + a_n b_m x^{n-m} g(x) + r_1(x)$$

e logo

$$f(x) == g(x)q_1(x) + r_1(x) + a_n b_m x^{n-m} g(x) = g(x)q_1(x) + a_n b_m x^{n-m}$$

O resultado agora segue tomando-se $q(x) = q_1(x) + a_n b_m$ e $r(x) = r_1(x)$.

Para ver que os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ são unicamente determinados, suponhamos que

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x) = g(x)q_2(x) + r_2(x),$$

$r_i(x) = 0$ ou $\deg r_i(x) < \deg g(x)$, para $i = 1, 2$. Da segunda igualdade segue que $g(x)(q_1(x) - q_2(x)) = r_2(x) - r_1(x)$. Se $q_1(x) \neq q_2(x)$, então o grau do polinômio da esquerda na última igualdade é maior ou igual ao grau de $g(x)$. Mas, o grau do polinômio da direita deve ser estritamente menor que o grau de $g(x)$, provocando uma contradição. Assim, devemos ter $q_1(x) = q_2(x)$ e, consequentemente, $r_1(x) = r_2(x)$. □

Este teorema tem a seguinte consequência importante.

Corolário 31. *Seja K um corpo. Então* $K[x]$ *é um domínio de ideais principais.*

Demonstração. Seja I um ideal de $K[x]$. Se $I = 0$, então não temos nada a provar. Suponhamos $I \neq 0$. Seja $f(x) \in I$ um polinômio não nulo de menor grau possível. Provaremos que $I = \langle f(x) \rangle$. Para isso seja $h(x) \in I$, então existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ em $K[x]$ tais que $h(x) = f(x)q(x) + r(x)$, onde $r(x) = 0$ ou $\deg r(x) < \deg f(x)$. Segue daí que $r(x) = h(x) - f(x)q(x) \in I$, pois $h(x), f(x) \in I$. Da minimalidade do grau de $f(x)$, segue que$r(x) = 0$, e portanto $h(x) = f(x)q(x)$. Logo, $I \subseteq \langle f(x) \rangle$). A outra inclusão é obvia. Logo, $I = \langle f(x) \rangle$. □

Definição 32. Dados $f(x), g(x) \in K[x]$ definimos o **máximo divisor comum** entre $f(x)$ e $g(x)$ como um gerador do ideal $\langle f(x), g(x) \rangle$.

É imediato que dois mdc entre polinômios diferem por um produto por uma constante, isto é, se $d_1(x) = \text{mdc}(f(x), g(x))$ e $d_2(x) = \text{mdc}(f(x), g(x))$, então existe $u \in K$ tal que $d_1(x) = ud_2(x)$. Portanto, para obtermos uma unicidade do mdc entre polinômios, podemos dizer que o mdc entre dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$ é o gerador do ideal $\langle f(x), g(x) \rangle$, com termo líder unitário. Cabe aqui observar que um polinômio com termo líder unitário é dito **mônico**.

Suponhamos agora que $d(x) = \text{mdc}(f(x), g(x))$ em $K[x]$. Então sabemos que existem polinômios $r(x)$ e $s(x)$ tais que

$$d(x) = f(x)r(x) + g(x)s(x)$$

O próximo resultado nos permite fazer uso do Teorema da divisão Euclidiana para obter os polinômios $r(x)$ e $s(x)$.

Proposição 33. *Sejam* $f(x), g(x), q(x), r(x) \in K[x]$, *onde* K *é um corpo. Se* $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, *então* $\text{mdc}(f(x), g(x)) = \text{mdc}(g(x), r(x))$.

A prova é fácil e deixaremos como exercício para o leitor.

Observe agora que se $f(x)$ e $g(x)$ são dois polinômios em $K[x]$, onde K é um corpo, então aplicando-se o teorema da divisão euclidiana repetidas vezes, obtemos: $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, com $r_1(x) = 0$ ou $\deg r_1(x) < \deg g(x)$ e $g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$ e assim sucessivamente até que algum destes restos $r_k(x)$ seja o polinômio nulo. É claro que em algum momento obteremos um tal resto, pois do contrário estaríamos construindo uma sequência monótona decrescente infinita de inteiros positivos.

Assim, supondo que $r_{k+1}(x) = 0$, devemos ter $\text{mdc}(f(x), g(x)) = \text{mdc}(g(x), r_1(x))$ $= \cdots = \text{mdc}(r_{k-1}(x), r_k(x)) = r_k(x)$.

O algoritmo acima permite o cálculo do mdc entre dois polinômio, bem como permite que, isolando cada resto nas equações obtidas durante o processo, encontremos a combinação linear que expressa o máximo divisor comum em função dos dois polinômios iniciais.

O próximo resultado faz a conexão entre o problema de obter soluções de equações polinomiais e a teoria de fatoração polinômios:

Proposição 34. *Sejam* K *um corpo,* $f(x) \in K[x]$*e* $\alpha \in K$. *Então* α *é uma raiz de*$f(x)$ *se, e somente se,* $(x-\alpha)$ *divide*$f(x)$.

Demonstração. Do Teorema da divisão Euclidiana segue que existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ em K[x] tais que$f(x) = (x-\alpha)q(x) + r(x)$, onde $r(x) = 0$ ou $\deg r(x) < \deg(x-\alpha) = 1$. Portanto, podemos escrever $f(x) = (x-\alpha)q(x) + r_0$, onde $r_0 \in K$. Calculando $f(x)$ em α, temos $f(\alpha) = (\alpha-\alpha)q(\alpha) + r_0$, de onde segue que $r_0 = f(\alpha)$. Assim, se $x-\alpha$ divide $f(x)$, então $f(\alpha) = 0$, e reciprocamente. □

Teorema 35. *Sejam* K *um corpo e* $f(x) \in K[x]$ *um polinômio de grau n. Então* $f(x)$ *possui no máximo* n *raízes em K.*

Definição 36. Dizemos que um corpo K é algebricamente fechado se todo polinômio $f(x)$ em K[x] possui uma raiz em K.

Teorema 37. *[Teorema Fundamental da Álgebra] Todo polinômio* $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ *possui uma raiz em* $\mathbb{C}$.

Como vimos acima, o problema de encontrarmos raízes de um polinômio $f(x)$ em um corpo K está associado ao fato de podermos fatorá-lo em produtos de outros polinômios em K[x], onde um dos quais, pelo menos, tem grau 1. Passaremos então a discutir este problema de fatoração a partir de agora. Nesse sentido, os resultados acima nos dão a seguinte consequência interessante.

Teorema 38. *Sejam* K *um corpo algebricamente fechado e* $f(x) \in K[x]$ *um polinômio de grau* n. *Então* $f(x)$ *se fatora em um produto de fatores lineares:*

$$f(x) = c(x-\alpha 1)(x-\alpha 2)...(x-\alpha n)$$

onde $\alpha i \in K$ *são as raízes de*$f(x)$ *em* K, *e* $c \in K$ *é o coeficiente líder do polinômio* $f(x)$.

Demonstração. A demonstração é feita por indução sobre o grau de $f(x)$. □

Sejam D um domínio e $f(x) \in D[x]$ um polinômio não invertível. Dizemos que $f(x)$ é irredutível em $D[x]$, se $f(x)$ só admite fatoração trivial, isto é, se $f(x) = g(x)h(x)$, então $h(x)$ é invertível em $D[x]$ ou $g(x)$ é invertível em $D[x]$.

Caso contrário, dizemos que $f(x)$ é redutível em $D[x]$.

No caso particular em que o domínio D é um corpo, podemos dizer que $f(x)$ é um polinômio irredutível em $D[x]$, se o fato de $f(x) = g(x)h(x)$, implicar em $\deg g(x) = 0$ ou $\deg h(x) = 0$, pois os únicos elementos invertíveis nestes anéis são exatamente os polinômios de grau zero.

Se K é um corpo algebricamente fechado, então segue do Teorema Fundamental da álgebra que todo polinômio se fatora em produto de polinômios irredutíveis.

Lema 39. *Seja* D *um domínio de ideais principais. Se* $p, a, b \in D$ *são tais que* p *é irredutível em D e* $p|ab$, *então* $p|a$ *ou* $p|b$.

Demonstração. Suponhamos $p|ab$, isto é, $ab \in pD$. Se $p|a$, então $a \in pD$ e, como p é irredutível em D, segue que pD é um ideal maximal, ou seja, $pD + aD = D$. Portanto, existem elementos $x, y \in D$ tais que $px + ay = 1$. Multiplicando agora esta última igualdade por b, obtemos $b = b.1 = b(px + ay) = pbx + aby$ de onde segue que $b \in pD$, pois $pbx, aby \in pD$. Logo, temos que $p|b$. □

Teorema 40. *[Teorema de Fatoração Única] Dado* $f(x) \in K[x]$, *onde* K *é um corpo e* $\deg f(x) \geqslant 1$. *Então existem polinômios irredutíveis mônicos* $p1(x), p2(x), ..., pt(x)$ *unicamente determinados e* $u \in K$ *tais que*

$$f(x) = up1(x)p2(x)...pt(x)$$

com $\deg p1(x) \leqslant \deg p2(x) \leqslant \cdots \leqslant \deg pt(x)$.

Proposição 41. *Sejam* K *um corpo e* $f(x)$ *um polinômio em* $K[x]$ *de grau igual a dois ou três. Então* $f(x)$ *é irredutível se, e somente se,* $f(x)$ *não possui raízes em* K.

Demonstração. Consideremos inicialmente $\deg f(x) = 2$. Suponhamos $f(x) = g(x)h(x)$, onde $g(x)$, $h(x) \in K[x]$. Assim, temos $\deg g(x) + \deg h(x) = 2$, de onde decorre que $\deg g(x) = 0$ e $\deg h(x) = 2$, ou $\deg g(x) = 1$ e $\deg h(x) = 1$ ou $\deg g(x) = 2$ e $\deg h(x) = 0$. Se ocorrer o caso em que $\deg g(x) = \deg h(x) = 1$, então estes polinômios possuem raízes em K e estas são raízes de $f(x)$. As outras duas situações produzem fatorações triviais. Suponhamos agora que $\deg f(x) = 3$. Pelo mesmo tipo de argumento acima, $f(x) = g(x)h(x)$ é uma fatoração não trivial em $K[x]$ se, e somente se, $\deg g(x) = 1$ ou $\deg h(x) = 1$, isto é, se, e somente se, $g(x)$ tem uma raiz em K ou $h(x)$ tem uma raiz em K. Isto completa a prova da Proposição. □

O critério acima não funciona em grau 4, como mostra o exemplo dado pelo polinômio $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$, que não possui raízes em $\mathbb{R}$, mas se fatora como $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$.

Passaremos a analisar separadamente a irredutibilidade em $\mathbb{R}[x]$, Para este caso, temos um teorema de classificação dos polinômios irredutíveis.

Teorema 42. *Os únicos polinômios irredutíveis em* $\mathbb{R}[x]$ *são os lineares e os de grau dois que não possuem raízes em* $\mathbb{R}$.

Pelo exposto acima, já sabemos que os polinômios lineares e os polinômios de grau dois que não possuem raízes em $\mathbb{R}$ são irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$. O que temos que mostrar então é que estes são os únicos tais polinômios. Vamos fazer isto através de dois resultados auxiliares.

Primeiro observemos que se α é raiz de um polinômio de coeficientes reais então $\overline{\alpha}$ também é

Lema 43. *Seja* $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$, *com* $a \neq 0$. *Se* $\alpha \in \mathbb{C}$ *é uma raiz de* $f(x)$, *então* $\bar{\alpha}$ *também é uma raiz de* $f(x)$.

Como consequência imediata deste lema, segue que as raízes complexas aparecem aos pares e, sendo assim, todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem pelo menos uma raiz real, de onde concluímos que são polinômios redutíveis em $\mathbb{R}[x]$. Falta então apenas analisar o caso dos polinômios de grau par e maior que dois. Para estes, temos o seguinte resultado.

Lema 44. *Seja* $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ *um polinômio com* $\deg f(x)$ *par e maior que* 2, *sem raízes em R. Então* $f(x)$ *possui pelo menos um fator irredutível de grau dois.*

Demonstração. Seja $f(x)$ um polinômio como no enunciado deste Lema. Pelo Lema anterior, fatorando este polinômio em $\mathbb{C}[x]$, obtemos

$$f(x) = c(x-\alpha 1)(x-\alpha 1)...(x-\alpha k)(x-\alpha k)$$

Observamos agora que o produto $(x-\alpha)(x-\alpha)$, onde $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, produz um polinômio com coeficientes reais, a saber,

$$(x-\alpha)(x-\alpha) = (x-(a+bi))(x-(a-bi)) = x^2-2ax + (a^2 + b^2)$$

Logo, o resultado segue. $\square$

Supondo $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$, com $a \neq 0$, chamamos $\Delta = b2-4ac$ o discriminante de$f(x)$. Assim, $f(x)$ não possui raízes em R se, e somente se, $\Delta < 0$. Resumindo tudo isto, podemos enunciar o seguinte

Teorema 45. *Seja* $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. *Então* $f(x)$ *é irredutível em* $\mathbb{R}[x]$ *se, e somente se,* $\deg f(x) = 1$ *ou,* $\deg f(x) = 2$ *e o discriminante de* $f(x)$ *é negativo.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] KOSTRIKIN, A.I., MANIN, Y.I.; Linear Algebra and Geometry, Gordon and Breach 1989.

[2] HOFFMAN, K., KUNZE, R.; Linear Algebra. Prentice Hall. 1971.

[3] COELHO, F.U., LOURENÇO, M.L.; Um curso de Álgebra Linear. Ed. Da Universidade de São Paulo – EDUSP. 2001. Bibliografia Complementar

[4] ROMAN, S.; Advanced Linear Algebra, Springer 2005.

[5] SHILOV, G.; Linear Algebra, Dover 1977.

[6] APOSTOL, T. , Cálculo, Volume 2 , Reverte, 1994.

[7] HALMOS, P.R. Finite Dimensional Vector Spaces, Springer 1974.

[8] GOLAN, J.; The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know, Springer, 2007

[9] ROSE, H.E.; Linear Algebra: A Pure Mathematical Approach, Bir$_k$häuser, 2002