# Lista 6

Forma de Jordan

**1** — Dado um operador $\tau : V \to V$ e uma decomposição de $V$ em subespaços $\tau$- invariantes $V = V_1 \oplus V_2$. Suponha que restrito a $V_1$ a matriz de $\tau$ seja $A_1$ na base $\beta_1$ e que restrito a $V_2$ a matriz de $\tau$ seja $A_2$ na base $\beta_2$. Mostre que a matriz de $\tau : V \to V$ na base $\beta = \beta_1 \sqcup \beta_2$ é dada por

$$\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$$

**2** — Mostre o Teorema de Schur: Dado um operador linear $\tau$ sobre um espaço vetorial $V$ de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado, então existe uma base $\beta$ para $V$ tal que a matriz de $\tau$ em relação à base $\beta$ é triangular superior.

**3** — Prove a forma de Jordan para operadores nilpotentes.

**4** — Suponha que $\tau^q = 0$ e $\tau^{q-1} \neq 0$ . Seja $\nu \in V$ um vetor tal que $\tau^{q-1}\nu \neq 0$ . Então os vetores $\nu, \tau\nu, \dots, \tau^{q-1}\nu$ são linearmente independentes.

**5** — Ache a forma de Jordan das seguintes matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \\ 0 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & n & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$

**6** — Ache a forma de Jordan de $A^2$ e $A^{-1}$ dado que $A$ tem forma de Jordan $A_J$.

**7** — Dado A um operador em $V$. Definimos a exponencial de $A$, $e^A$, como o operador

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

a) Prove que a série de potência converge para qualquer operador $A$. (Dica use forma de Jordan)

b) Prove que se $A$ e $B$ comutam então $e^{A+B} = e^{B+A}$. Dê um contra-exemplo que esse fato é falso se tirarmos a hipótese de que $A$ e $B$ comutam.

c) Mostre que $e^{ABA^{-1}} = Ae^{B}A^{-1}$.

d) Mostre que $\lim_{n\to\infty}\left(I+\frac{A}{n}\right)^n = e^A$

**8** — Sejam $S, T$ operadores diagonalizáveis que comutam. Então eles são simultaneamente diagonalizáveis.

**9** — Calcule $A^5$ e $e^A$ para as seguintes matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 16 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

**10** — Suponha $A$ e $B$ matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Mostre que $A$ é similar a $B$ se e somente se $A$ e $B$ possuem a mesma forma canônica de Jordan.

**11** — Prove que se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são autovalores de $A$ então $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ são os autovalores de $A^k$.

**12** — Para qualquer $d \geqslant 1$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, seja a o bloco de Jordan $J_\lambda^d$

a) $\lambda$ é único autovalor de $J_\lambda^d$

b) O polinômio mínimo$J_\lambda^d$ é $(t-\lambda)^d$

c) O polinômio característico de$J_\lambda^d$ é $(t-\lambda)^d$

d) A multiplicidade geométrica de $\lambda$ é 1

**13** — Seja $C$ e $D$ duas matrizes quadradas

a) Mostre que {autovalores de $C \oplus D$={autovalores de $C$} $\bigcup${autovalores de $D$}

b) Mostre que para todo polinômio $p$, $p(C \oplus D) = 0$ se e somente se $p(C) = 0$ e $p(D) = 0$. Conclua que o polinômio mínimo de $C \oplus D$ é o mínimo múltiplo comum dos polinômios mínimos de $C$ e $D$.

c) Mostre que o polinômio característico de $C \oplus D$ é o produto dos polinômio característicos de $C$ e $D$.

**14** — Seja $A$ uma matriz $n \times n$ tal que $A = J_\lambda^{k_1} \oplus \ldots \oplus J_\lambda^{k_n}$. Mostre que o polinômio minimal de $A$ é $(x - \lambda)^{\max\{k_1\}}$.

**15** — Descreva o polinômio minimo de uma matriz cuja forma de Jordan é

$$(J_{\lambda_1}^{k_{11}} \oplus \ldots \oplus J_{\lambda_1}^{k_{1n}}) \oplus (J_{\lambda r}^{k_{r1}} \oplus \ldots \oplus J_{\lambda_r}^{k_{rn}})$$

**16** — Ache todas as formas de Jordan possíveis para uma transformação linear com polinômio característico $(x-2)^3(x-1)^2(x-5)$ . Ache o polinômio minimo correspondente a cada uma dessas formas de Jordan.

**17** — Seja $A$ uma matriz complexa tal que $A^k = I$ para algum inteiro $k$.Prove que A é diagonalizável.

**18** — Prove que uma matriz é diagonalizável se e somente se seu polinômio minimal tem apenas fatores lineares.

**19** — Prove que uma matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ que satisfaz $A^3 = A$ pode ser diagonalizada.

**20** — Ache a forma de Jordan e a interpretação geométrica dos operadores que satisfazem:

a) $A^2 = I$

b) $A^2 = A$

**21** — Prove que um operador é nilpotente se e somente se todos os seus autovalores forem iguais a zero.

**22** — Dado o operador $A = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ age no espaço dos polinômios complexos em duas variáveis de grau menor que $n$. Ache a forma canônica de $A$.

**23** — Prove que para qualquer matriz não singular $A$ e qualquer número natural $k$ existe matriz $X$ tal que $X^k = A$.

**24** — Resolva as equações:

a) $X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $X^3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

**25 —** Resolva $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$ para:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$