Lista 1

Análise Real I

Números Reais

Exercícios.

1 — Dado $x = A|B$ e $y = C|D$ cortes. Mostre que

a)x+y=y+x

b)x+(y+z)=(x+y)+z

c)$x \cdot y = y \cdot x$

d)$x < y$ então $x + z < y + z$

2 — Dado o corte

$$A|B = \{r \in \mathbb{Q} : r \leqslant 0 \,\text{ou}\, r^2 < 2\}|\{r \in \mathbb{Q} : r > 0 \text{ e } r \geqslant 2\}$$

a)Mostre que $(A|B)^2 = (A|B)(A|B) = 2$.

b)Defina um corte $C|D$ tal que $(C|D)^2 = a$, para $a \in \mathbb{Q}, a > 0$

3 — Dado um conjunto não vazio E, α o ínfimo desse conjunto e β o supremo desse conjunto. Mostre que $\alpha \leqslant \beta$.

4 — Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios e limitados. Defina $-A = \{-x, x \in A\}$. Mostre que

$$\sup(-A) = -\inf(A)$$

$$\inf(-A) = -\sup(A)$$

5 — Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios e limitados. Defina $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ e $A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$. Mostre que:

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$
$$\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$$

Encontre expressões análogoas para $\inf(A+B)$ e $\inf(A-B)$.

6 — Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios. Mostre que:

a)$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

b)$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$

7 — Seja $X = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ Mostre que $\inf X = 0$

8 — Seja $X \subset \mathbb{R}$.Uma função é dita limitada se $f(X) \subset R$ é um conjunto limitado. Neste caso define-se o $\sup f$ como o supremo do conjunto $f(X)$.

a)Mostre que a soma de duas funções limitadas $f, g : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada

b)Mostre que $(f + g)(X) \subset f(X) + g(X)$

c)Conclua que $\sup(f + g) \leqslant \sup f + \sup g$ e que $\inf(f + g) \geqslant \inf f + \inf g$

d)Dê exemplos para os quais valham as desigualdades estritas

e)Mostre que o produto de duas funções limitadas é limitada

f)Mostre que $f \cdot g(X) \subset f(X) \cdot g(X)$

g)Conclua que se forem ambas positivas $\sup(f \cdot g) \leqslant \sup f \cdot \sup g$ e $\inf(f \cdot g) \geqslant \inf f \cdot \inf g$

9 — Mostre que:

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

9 — Mostre que para $x, y \geqslant 0$:

$$\sqrt{\text{xy}} \leqslant \frac{x + y}{2}$$

9 — Dados A_n, G_n, H_n as médias aritméticas, geométricas e harmonicas:

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$
$$G_n = \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$
$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots \frac{1}{a_n}}$$

Mostre que $A_n \geqslant G_n \geqslant H_n$

10 — Usando que $G_n \leqslant A_n$, mostre que:

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \,\text{para}\, x > 0$$

11 — Mostre que num corpo ordenado $a^2 + b^2 = 0$ se e somente se $a = b = 0$

12 — Dados x, y num corpo ordenado K, com $y \neq 0$, mostre que $|x \cdot y^{-1}| = |x| \cdot |y|^{-1}$