# Bases Matemáticas

Daniel Miranda[1]

[1]**email:** daniel.miranda@ufabc.edu.br
sala 819 - Bloco B
**página:** http://hostel.ufabc.edu.br/ daniel.miranda

23 de maio de 2011

UFABC
Universidade Federal do ABC

# Elementos de Lógica e Linguagem Matemática

**Definição**

Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é *verdadeira* ou *falsa*, mas não simultaneamente ambas.

**Valor Verdade:** *verdadeiro* , *falso*

**Exemplos 2** As seguintes frases são exemplos de proposições.

- "$2+5=7$";
- "A função $f(x)=-x$ é uma função crescente".
- "$2^{25^{9876}}+3^{4576}$ é primo";
- "$\sqrt{17}$ é irracional"

**Exemplos 3** Nenhuma das frases seguintes é uma proposição, porque ou não são declarações ou não podemos atribuir um único valor *verdadeiro* ou *falso*.

- “Vamos dançar!”
- “Como você está?”.
- “Esta sentença é falsa”.
- “Está quente hoje”.
- “O Cruzeiro é o melhor time do mundo;”
- “Deus existe;”

Em diversas situações precisamos que o “sujeito“ das proposições seja uma variável que possa ser substituída por um elemento qualquer dentre uma coleção de objetos $\mathbb{U}$ em consideração. O conjunto $\mathbb{U}$ neste caso será denominado **universo do discurso**, ou ainda, **domínio de discurso** .

Proposições que dependam de uma ou mais variáveis são denominadas **proposições abertas**.
$p(x), q(x), p(x, y), ...$

**Exemplo** $p(x) =$ "$x^2 < 9$".

O valor verdade de uma proposição aberta depende do valor atribuído à variável $x$.

Se $x = 2$ então $p(2) =$ "$4 < 9$" tem valor verdade *verdadeiro*, por outro lado se considerarmos $x = 4$ temos que $p(4) =$ "$16 < 9$ " tem valor verdade *falso*.

## Definição

O conjunto dos valores de $x$ para os quais a proposição aberta $p(x)$ *verdadeira* é denominado **conjunto verdade** de $p(x)$.

**Exemplos 5**

- O conjunto verdade de $p(x) =$ "$x$ é primo e $3 < x < 14$" é $\{5, 7, 11, 13\}$
- O conjunto verdade de $p(x) =$ "$x$ é real e $x^2 + 1 = 5$" é $\{-2, 2\}$

Através de proposições abertas podemos fazer afirmações sobre todos os elementos de um conjunto usando o **quantificador universal** $\forall$ que é lido como "para todo" ou "qualquer que seja". Também é possível fazer afirmações sobre a existência de um

elemento de um conjunto usando o **quantificador existencial** $\exists$, que é lido como "existe".

Nesse contexto, uma proposição é dita *universal* se faz referência a *todos* os objetos do universo $\mathbb{U}$. Caso contrário, é dita *particular* .

Assuma que o universo é o conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$.

1. "Todos os números naturais são ímpares" é uma proposição universal.
2. "O número 2 é par" é uma proposição particular.
3. "Nenhum número natural é primo" é uma proposição universal, pois equivale a dizer que "todo número natural tem a propriedade de não ser primo.
4. "Há números naturais pares" é uma proposição particular.
5. "Ao menos dois números naturais são pares" é uma proposição particular.
6. "O número natural 0 é menor ou igual do que qualquer número natural" é uma proposição particular.
7. "Todo número natural é maior ou igual do que o número natural 0" é uma proposição universal.
8. "$n < n + 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$" é uma proposição universal.
9. "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = n$" é uma proposição particular.

Considere uma proposição universal do tipo *todo elemento de* $\mathbb{U}$ *satisfaz a propriedade* $p$.

Um **exemplo** para essa proposição é um elemento do universo $\mathbb{U}$ que satisfaz a propriedade $p$.

Um *contra-exemplo* para essa proposição é um elemento do universo $\mathbb{U}$ que *não* satisfaz a propriedade $p$.

**Exemplos 6**

1. Considere a proposição "para todo $n \in \mathbb{N}$ par, $(n+1)^2$ é ímpar".
   - Neste caso o número 2 é um exemplo dessa proposição, pois está no domínio do discurso e $(2+1)^2 = 9$ é impar.
   - Já o número 3 não é nem exemplo nem contra-exemplo, pois não pertence ao domínio de discurso.
2. Para todo $m \in \mathbb{N}$, $m^2 - m + 41$ é primo.
   - Neste caso 1 é um exemplo, pois $1 \in \mathbb{N}$ e $1^2 - 1 + 41 = 41$ é primo. Bem como 2,...,40 são exemplos
   - Por outro lado, 41 é contra-exemplo, pois $41 \in \mathbb{N}$ e $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ não é primo.

**Exemplos 7**

1. O número 5 é um exemplo para a proposição "Todo número natural é ímpar", enquanto que o número 2 é um contra-exemplo.
2. O número 4 é um exemplo para a proposição "Nenhum número natural é primo", enquanto que o número 3 é um contra-exemplo (lembre, nesse caso, que a propriedade universal alegada pela proposição é *não* ser primo).
3. O número 8 é um exemplo para a proposição "O quadrado de todo natural é maior do que 4", enquanto que o número 1 é um contra-exemplo.

| | “para todo“ $\forall$ | ”existe“$\exists$ |
|---|---|---|
| existem exemplos | inconclusivo | verdadeira |
| não existem exemplos | inconclusivo | falsa |
| existem contraexemplos | falsa | inconclusivo |
| não existem contraexemplo | verdadeira | inconclusivo |

Tabela: Comportamento Geral do Valor verdade de uma proposição quantificada em função da existência/inexistência de exemplos ou contraexemplos

## Definição

Dadas duas proposições $p, q$:

- a proposição composta *p ou q* é chamada **disjunção** de $p$ e $q$. A disjunção *p ou q* é *verdadeira* quando pelo menos uma das proposições $p$ ou $q$ forem *verdadeiras*. Caso contrário o valor verdade de *p ou q* é *falso*.
- a proposição composta *p e q* é chamada **conjunção** das proposições $p$ e $q$. A conjunção *p e q* é *verdadeira* somente quando as proposições $p$ e $q$ forem ambas *verdadeiras*. Caso contrário o valor verdade de *p e q* é *falso*.

# Não



## Definição

Dado uma proposição $p$, a negação de $p$ é uma proposição com valor verdade invertido, chamada de **negação** de $p$, denotada *não* $p$ e que pode ser lida como "não $p$" ou "não é verdade $p$".

# Negação da Disjunção e da Conjunção

UFABC

Sejam $p, q$ proposições. Então são válidas as seguintes regras de negação

1. A negação da proposição $p$ *e* $q$ é $($*não* $p)$ *ou* $($*não* $q)$
2. A negação da proposição $p$ *ou* $q$ é *não* $p$ *e* *não* $q$

**Exemplos 10**

- A negação da proposição "$x$ é divisível por 2 e 3" é "$x$ não é divisível por 2 ou $x$ não é divisível por 3".
- A negação da proposição "$x$ é divisível por 2 ou 3" é "$x$ não é divisível por 2 e $x$ não é divisível por 3".
- A negação da proposição "$b$ é soma de quadrados ou $b$ é primo" é a afirmação que "$b$ não é soma de quadrados e $b$ não é primo".
- A negação da proposição "$x$ é maior que 2 *ou* $x$ é menor igual que $-1$ " é a proposição " $x$ é menor igual a 2 *e* $x$ é maior que $-1$."

**Negação do Quantificador**

Seja $p(x)$ um proposição aberta. Então são válidas as seguintes regras de negação:

- A negação da proposição "para todo $x$ em $D$ é verdade $p(x)$" é a proposição "existe pelo menos um $x$ em D tal que não é verdade $p(x)$".
- A negação da proposição "existe $x$ em $D$ tal que é verdade $p(x)$" é a proposição "para todo $x$ em $D$ não é verdade $p(x)$".

Converta as seguintes afirmações para a forma simbólica e diga quais são as suas negações:

- Todos os números naturais podem ser decompostos como produtos de primos.
- Existe inteiro $n$ tal que $n + 3 = 4$.

Solução na lousa

## Definição

Dadas duas proposições $p$ e $q$ então podemos construir a proposição "se $p$ então $q$" que também pode ser lida como "$p$ implica $q$", que denotaremos por

$$p \Rightarrow q.$$

A implicação $p \Rightarrow q$ é *falsa* somente no caso que a proposição $p$ é *verdadeira* e a proposição $q$ é *falsa*.

Numa implicação, $p \Rightarrow q$, a proposição $p$ é denominada **hipótese** ou e a proposição $q$ é denominada **tese, conclusão ou consequente** da implicação.

A tabela a seguir apresenta o valor verdade de $p \Rightarrow q$ em função dos valores verdades de $p$ e $q$.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| *verdadeiro* | *verdadeiro* | *verdadeiro* |
| *verdadeiro* | *falso* | *falso* |
| *falso* | *verdadeiro* | *verdadeiro* |
| *falso* | *falso* | *verdadeiro* |

Tabela: Tabela Verdade da Implicação.

Qual o valor verdade das seguintes implicações?

- Se 2 é um número par, então 3 é um número ímpar.
- Se 2 é um número par, então 4 é um número ímpar.
- Se 2 é um número ímpar, então 3 é um número par.
- Se minha mãe é um trator então eu sou uma moto-serra.

Dada uma proposição $p \Rightarrow q$ então:

- a proposição $q \Rightarrow p$ é chamada de **recíproca** da proposição;
- a proposição *não* $q \Rightarrow$ *não* $p$ é chamado de **contrapositiva**;
- a proposição *não* $p \Rightarrow$ *não* $q$ é chamado de **inversa** da proposição.

Uma afirmação e sua contrapositiva são equivalentes!

# Métodos de Demonstração

Vamos ilustrar algumas técnicas de demonstração utilizando alguns resultados de números naturais. Para isso recordamos algumas definições que utilizaremos:

- Um número inteiro não nulo $a$ **divide** um número inteiro $b$ se existe um inteiro $k$, tal que: $b = ak$. Se $a$ divide $b$, $b$ é dito múltiplo de $a$ ou de modo equivalente $a$ é dito divisor de $b$.
- Um número inteiro $a$ é dito par se 2 divide $a$, ou seja, se existe número inteiro $k$ tal que $a = 2k$.
- Um número inteiro $b$ é dito **impar** se 2 não divide $b$, nesse caso pode-se provar que existe um número inteiro $k$ tal que $b = 2k + 1$.
- Um número real $r$ é dito **racional** se existirem números inteiros $p, q$ tal que $r = \frac{p}{q}$.
- Um número real $r$ é dito **irracional** se não for racional, i.e, se não existirem inteiros $p, q$ tal que $r = \frac{p}{q}$.

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração que nós tratamos nesta seção, e é a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ suponha que $p$ é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se $q$.

**Exemplo 1** Se $n, n$ são números pares então $n + m$ também é um número par.

Na lousa

**Exemplo 2** Se $a$ divide $b$ e $b$ divide $c$, então $a$ divide $c$.

Uma demonstração por redução ao absurdo é uma técnica de demonstração no qual se demonstra que se algum enunciado fosse verdadeiro, ocorreria uma contradição lógica, e portanto o enunciado deve ser falso.

**Exemplo 3** Existem infinitos números primos.

**Exemplo 4** $\sqrt{2}$ é irracional.

O método de demonstração por contraposição baseia-se no fato que uma implicação *p implica q* é equivalente a sua contrapositiva *não q implica não p*. Assim, no método de demonstração por contraposição ao invés de se demonstrar a implicação *p implica q*, demonstra-se que *não q implica não p*.

**Exemplo 5** Se $n$ e $m$ são números inteiros para os quais $n + m$ é par, então $n$ e $m$ tem a mesma paridade.

Muitos teoremas na matemática são apresentados sob a forma "$p$ se, e somente se, $q$". Essa afirmação é equivalente a "se $p$, então $q$ *e* se $q$, então $p$". Logo, para demonstrar uma afirmação da forma "$p$ se, e somente se, $q$", devemos demonstrar duas implicações separadamente.

**Exemplo 6** Dois inteiros $a$ e $b$, possuem paridades diferentes se, e somente se, $a + b$ é um número ímpar

Temos que provar duas implicações:

- Se $a$ e $b$ possuem paridades diferentes então $a + b$ é um ímpar;
- Se $a + b$ é ímpar então $a$ e $b$ possuem paridades diferentes.

# Teoria dos Conjuntos

Um **conjunto** é uma qualquer coleção de objetos, concretos ou abstratos. Dado um conjunto, isto é, uma coleção de objetos, diz-se que cada um destes objetos **pertence** ao conjunto dado ou, equivalentemente, que é um **elemento** desse conjunto.

**Exemplos 1**

- o conjunto das disciplinas do primeiro trimestre do BC&T;
- o conjunto das letras desta frase;
- o conjunto dos times de futebol de um estado [1];
- o conjunto dos conjuntos dos times de futebol de um estado;
- o conjunto das idéias que Leonardo da Vinci nunca teve;
- o conjunto dos números naturais.

[1]Note que os elementos deste conjunto são, por sua vez, conjuntos também.

# Notações

Para denotar um conjunto genérico, usam-se normalmente letras maiúsculas $A, B, C, \ldots Z$, enquanto para seus elementos usam-se letras minúsculas $a, b, c, \ldots z$

A relação de pertinência é denotada pelo símbolo $\in$. Já o símbolo $\notin$ é usado para denotar a não-pertinência (quando isso fizer sentido).

# Subconjuntos



Seja dado um conjunto $A$. Dizemos que um conjunto $B$ é um **subconjunto** do conjunto $A$ (ou, equivalentemente, que $B$ **está contido** em $A$) se todo elemento de $B$ é também elemento de $A$, denotando-se tal situação por $B \subset A$.

Em símbolos, $B \subset A$ (ou $A \supset B$) se, e somente se,

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

## Definição

Se dois conjuntos $A$ e $B$ satisfazem as relações $A \subset B$ e $B \subset A$ simultaneamente, então dizemos que tais conjuntos são **iguais**, isto é, $A = B$. Em símbolos, $A = B$ se, e somente se,

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

# Conjunto vazio



Assumimos a existência de um conjunto que não possui nenhum elemento. Tal conjunto é chamado de **conjunto vazio** e denotado por $\varnothing$. Dado qualquer conjunto $A$, vale sempre a relação de inclusão

$$\varnothing \subset A.$$

Seja dado um conjunto $A$. O conjunto de todos os subconjuntos de $A$ é chamado de **conjunto potência** de $A$ (ou também **conjunto das partes** de $A$) e é denotado por $\wp(A)$. Note que, qualquer que seja o conjunto $A$, o conjunto potência $\wp(A)$ sempre contém, pelo menos, os elementos $\varnothing$ e $A$.

**Exemplos 3**. Sejam dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Então:

- $\wp(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $\wp(B) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

É importante destacar um erro comum quando se fala em conjunto das partes. Tomemos o conjunto $A$ do exemplo acima. É *falso* afirmar que $1 \in \wp(A)$ (ou pior, que $1 \subset A$). O correto é $\{1\} \in \wp(A)$ (o que equivale a dizer que $\{1\} \subset A$). Em suma, vale a relação

$$X \in \wp(A) \Leftrightarrow X \subset A.$$

# União



Dados dois conjuntos $A$ e $B$, o **conjunto união** $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a $A$ ou a $B$, isto é

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

O **conjunto intersecção** $A \cap B$ é formado pelos elementos que pertencem simultaneamente a $A$ e $B$, isto é

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B.$$

**Exemplos 4**. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ e $C = \{4, 5, 6\}$, tem-se:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$
- $A \cap B = \{1, 3\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A \cap C = \varnothing$
- $B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$
- $B \cap C = \{5\}$