Bases Matemáticas

Daniel Miranda[1]

[1]**email:** daniel.miranda@ufabc.edu.br
sala 819 - Bloco B

página: http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda

9 de junho de 2010

UFABC
Universidade Federal do ABC

Conjuntos Numéricos

Supõem-se conhecidos os conjuntos $\mathbb{N}$ (naturais), $\mathbb{Z}$ (inteiros) e $\mathbb{Q}$ (racionais), descritos abaixo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ \ q \neq 0\}$$

É de uso comum a seguinte notação para alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}^* &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \neq 0\} \\
\mathbb{Z}_+ &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \geq 0\} \\
\mathbb{Z}_- &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \leq 0\} \\
\mathbb{Z}_+^* &= \mathbb{Z}^* \cap \mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x > 0\} \\
\mathbb{Z}_-^* &= \mathbb{Z}^* \cap \mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x < 0\}
\end{aligned}$$

Com significado análogo, usa-se a notação $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{Q}_+^*$ e $\mathbb{Q}_-^*$.

Em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ estão bem definidas as operações de *soma* e *multiplicação*. Algumas propriedades básicas dessas operações são apresentadas abaixo (onde a, b e c denotam números naturais, inteiros ou racionais):

1. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma)
2. $a.b = b.a$ (comutatividade da multiplicação)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da soma)
4. $(a.b).c = a.(b.c)$ (associatividade da multiplicação)
5. $0 + a = a$ (elemento neutro da soma)
6. $1.a = a$ (elemento neutro da multiplicação)
7. $a.(b + c) = a.b + a.c$ (distributiva)

Se a e n são números naturais, fica bem definida a operação de *potência*

$$a^n = \begin{cases} a.a.\cdots.a \qquad (n \text{ vezes}), \quad \text{se} \quad n \neq 0 \\ 1 \quad \text{se} \quad n = 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

Note que a "operação" 0^0 não é definida. O motivo disso será visto, possivelmente, na seção dedicada a limites de funções.

Nomenclatura. Na expressão a^n, o número a é chamado de **base**, enquanto n é chamado de **expoente**.
É imediato verificar as propriedades abaixo (onde $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $n, m \in \mathbb{N}$):

1. $a^n.a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{nm}$
3. $(a.b)^n = a^n.b^n$

Para estender a potenciação para expoentes inteiros, de modo a manter as propriedades acima, define-se:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}^* \text{ e todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, tomando $a \in \mathbb{N}^*$ e $n, m \in \mathbb{Z}$, temos, além das anteriores, a seguinte propriedade:

4. $a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$

Princípio de Indução Finita

Seja $P(n)$ uma propriedade genérica que satisfaz as seguintes condições:

(PIF 1) $P(n_o)$ é verdadeira para um certo $n_o \in \mathbb{N}$;

(PIF 2) Para todo $k \in \mathbb{N}$, com $k \geq n_o$, tem-se: se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_o$.

Exemplo 1. Considere a seguinte propriedade: a soma dos primeiros n números naturais positivos é $n(n+1)/2$. Em símbolos:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemplo 2 Mostrar por indução a propriedade $P(n) : 2^n \geq 1 + n$.

Princípio de Indução Finita - 2^a **versão**

Seja $P(n)$ uma propriedade genérica que satisfaz as seguintes condições:

(PIF 1) $P(n_o)$ é verdadeira para um certo $n_o \in \mathbb{N}$;

(PIF 2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq n_o$, tem-se: se $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$, com $n_o \leq k < n$, então $P(n)$ é verdadeira.

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_o$.

Exemplo 3 Considere a propriedade $P(n)$: n é primo ou é produto de números primos. Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n > 1$ (isto é, vamos provar que todo número natural maior que 1 é primo ou é produto de números primos). A condição PIF é trivialmente satisfeita, pois $P(2)$ é verdadeira. Adotando a segunda versão do PIF, vamos verificar a condição 2. Fixado $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$, nossa hipótese indutiva é:

se $2 \leq k < n$, então k é primo ou é produto de primos.

Solução: Queremos mostrar que n é primo ou é produto de primos. Evidentemente, n é primo ou não é. Se for primo, então $P(n)$ é verdadeira. Se n não é primo, então deve existir um número primo p que divide n, isto é,

$$n = p.k$$

para um certo $k \in \mathbb{N}$. Ora, como $k > 1$ (pois $p \neq n$) e $k < n$ (pois $p > 1$), podemos usar a hipótese indutiva para o número k: k é primo ou é produto de primos. Consequentemente, $n = p.k$ é um produto de primos, ou seja, $P(n)$ é verdadeira. Assim, pelo PIF (2^a versão), a propriedade P vale para todo natural maior que 1. $\square$

Prove que qualquer valor postal maior ou igual a oito unidades monetárias pode ser obtido usando se apenas selos com valores de 3 e 5. Em outras palavras, um inteiro positivo n, para todo n ? 8, pode ser representado como a soma de 3s e 5s.

Recursão

Uma sequência de grande importância na combinatória em particular, e na matemática em geral é a função fatorial definida (informalmente?) como:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

Definição

Definimos a função fatorial $f(n) : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ como sendo a função que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(1) = 1$
2. $f(n) = n \cdot f(n-1)$ para todo n maior que 1.

O definição anterior é um exemplo de definição por recursão, também conhecida como definição por indução. Esse tipo de definição como, as demonstrações por indução, possui duas partes:

- A definição do caso inicial;
- A definição de $f(n)$ a partir de $f(n-1)$.

Vamos examinar outro exemplo. Na seção de indução encontramos somas como:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

Observe que na soma acima o termo típico a ser somado é da forma k^2 e estamos somando esses termos de 1 até n. Um modo sucinto e muito útil de escrever essa soma é utilizando a notação de somatório:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

A expressão anterior deve ser lida como "soma de k^2 com k variando de 1 até n.

E de modo mais geral a soma dos números reais $a_1, \cdots a_n$ pode ser escrita usando a notação de somatório como

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$$

Claramente, não é necessário que a soma comece do 1. Assim por exemplo, podemos escrever:

$$\sum_{s=0}^{4} (2s+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

$$\sum_{j=2}^{5} j^j = 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5$$

De modo análogo ao fatorial, podemos definir o somatório como

Definição

Dado a_k uma sequência de números reais. Definimos o somatório de a_k de 1 até n como sendo a função $\sum_{k=1}^{n} a_k : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$$
2. $$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$ para todo n maior que 1.

Veja que pelas definições acima:

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_2 + \sum_{k=1}^{1} a_k = a_2 + a_1$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_3 + \sum_{k=1}^{2} a_k = a_3 + (a_2 + a_1)$$

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_4 + \sum_{k=1}^{3} a_k = a_4 + (a_3 + a_2 + a_1)$$

Por fim, vejamos o exemplo do produtório:

Definição

Dada a_k uma sequência de números reais. Definimos o produtório de a_k de 1 até n como sendo a função $\prod_{k=1}^{n} a_k : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\prod_{k=1}^{1} a_k = a_1$.
2. $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} a_k$ para todo n maior que 1.

Para ilustrar a definição de produtório vamos calcular alguns exemplos:

$$\prod_{k=1}^{3} a_k = a_3 \cdot \prod_{k=1}^{2} a_k = a_3 \cdot a_2 \cdot \prod_{k=1}^{1} a_k = a_3 \cdot a_2 \cdot a_1.$$