Lista 1

Funções de Uma Variável

Limite I

Definição de Limites

1 — Prove a partir da definição de limite que:

a) $\lim_{x\to 3}(x+6) = 9$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$

c) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

d) $\lim_{x\to 3} 4 = 4$

e) $\lim_{x\to 3} x^3 = 27$

f) $\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$

2 — Prove que a função $f(x) = \frac{|x|}{x}$ não possui limite quando $x \to 0$

Propriedades do Limite

3 — Calcule os seguintes Limites:

a) $\lim_{x\to 3} x^2$

b) $\lim_{x\to -3} x^2 - 4$

c) $\lim_{x\to 3} \pi$

d) $\lim_{x\to 1} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

4 — Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^2+1}$

b) $\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^3}{x^3+1}$

c) $\lim_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

d) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3}\right)$

e) $\lim_{h\to 1}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

f) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^4-5x-6}$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2}{3x^3+x^2+x}$

5 — Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$

b) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

c) $\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2}$

d) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$

e) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}$

Limite Fundamental

6 — Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}(mx)}$

c) $\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$

* d) $\lim_{x\to -2}\frac{\tan \pi x}{x+2}$

* e) $\lim_{x\to \pi/4}\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1-\tan x}$

Dica: nos itens anteriores use que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Continuidade

7 — Prove pela definição que as seguintes funções são contínuas nos pontos especificados:

a) $f(x) = x^4$ em $x = 1$

b) $f(x) = |x|$ em $x = 0$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ em $x = 4$

d) $f(x) = 5x - 2$ em $x = 1$

8 — Calcule os limites laterais:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ se } x \geq 1 \\ x^2 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

d) $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ se } x \geq 1 \\ x^2 \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

e) $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \text{ se } x \geq 2 \\ 6x^2 \text{ se } x < 2 \end{cases}$$

f) $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^3-1}$

g) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x^3-1}$

Teorema do Confronto

9 — Suponha que para todo x $|g(x)| \leq x^4$ Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0} g(x)$.

10 — Calcule os seguintes limites usando o teorema do confronto:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} 2^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

11 — Seja $f(x) = [\![x]\!]$ a função maior inteiro. Para que valores de a existe $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)$.

12 — Existe um número a tal que o limite

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

existe? Caso afirmativo encontre a e o valor do limite.

Teorema do Valor Intermediário

13 — Use o teorema do valor intermediário para provar que existe uma raiz da equação no intervalo especificado:

a) $x^4 + x - 3 = 0 \quad (1, 2)$

b) $\sqrt[3]{x} \quad (0, 1)$

c) $\cos(x) = x \quad (0, 1)$

d) $\ln x = e^{-x} \quad (1, 2)$

14 — Use o teorema do valor intermediário para provar que existe um número c tal que $c^2 = 2$. (Ou seja, demonstre a existência de $\sqrt{2}$)

Outros

15 — Seja $f(x) = x - [\![x]\!]$

a) Esboce o gráfico de $f(x)$

b) Se n for um inteiro calcule:

$$\lim_{x \to n^-} f(x) \qquad e \qquad \lim_{x \to n^+} f(x)$$

c) Para quais valores de a existe $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)$

16 — Encontre os valores da constante c para os quais a função f é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} cx + 1 \text{ se } x \leq 3 \\ cx^2 - 1 \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

17 — Encontre os valores da constante c para os quais a função f é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - c \text{ se } x < 4 \\ cx + 20 \text{ se } x \geq 4 \end{cases}$$

Respostas dos Exercícios

4 a) 1 b) 0 c) 6 f) 0 g) $1/3$

6 a) 4 b)n/m c) $\cos(a)$ e) $-1/\sqrt{2}$

9 0

12 15; -1.

16 $1/3$