Lista 3

Funções de Uma Variável

Derivadas I

Derivadas: Definição e Regras de Derivação

1 — Ache o coeficiente angular da reta secante a parábola

$$y = 2x - x^2$$

se as abscissas dos pontos de intersecção são iguais a:

a) $x_1 = 1 \quad x_2 = 2$

b) $x_1 = 1 \quad x_2 = 1.1$

c) $x_1 = 1 \quad x_2 = 1.01$

d) $x_1 = 1 \quad x_2 = 1 + h$

2 — A que valor tende o limite da secante no último caso quando $h \to 0$?

3 — Ache a razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ para a função $y = \dfrac{1}{x}$

a) no ponto 2 e $\Delta x = 1$

b) no ponto 2 e $\Delta x = 0.1$

c) no ponto 2 e $\Delta x = 0.01$

4 — Para as seguintes funções calcule a derivada no ponto indicado através do limite do quociente de Newton:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a) derivada de $f(x) = x$ no ponto $a = 0$

b) derivada de $f(x) = x$ no ponto $a = 1$

c) derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $a = 1$

d) derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $a = 2$

e) derivada de $f(x) = x^3$ no ponto $a = -1$

f) derivada de $f(x) = x^4$ no ponto $a = 0$

g) derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $a = 4$

h) derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $a = 8$

i) derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $a = 1$

j) derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $a = -1$

5 — Prove que $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\operatorname{sen}(x)$

6 — Mostre $\dfrac{d}{dx}a^x = \ln(a)a^x$. (Use que $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$).

7 — Escreva a equação da reta tangente as curvas $y = f(x)$ no ponto especificado:

a) $y = x^3$ no ponto $x = 3$

b) $y = x^7 + 3x$ no ponto $x = 1$

c) $y = \operatorname{sen}(x)$ no ponto $x = \pi$

d) $y = 2^x$ no ponto $x = 2$

e) $y = \cos(x) + x^2$ no ponto $x = 0$

8 — Quantas retas tangentes a curva $y = \frac{x}{x+1}$ passam pelo ponto $(1, 2)$. Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

9 — Encontre as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 3x^4 + 5x + 8$

b) $f(x) = x^7 + 6x^6 + \frac{1}{5}x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 + \pi$

c) $f(x) = ax^2 + bx + c$

d) $f(x) = ax^m + bx^{m+n}$

e) $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \frac{\ln(4)}{x} + \sqrt{5}x + \ln(7)$

f) $f(x) = \frac{2}{5x-3} - \frac{1}{x}$

g) $f(x) = x^{\frac{a}{2}} + x^{\frac{a+4}{2}} + ax^{a-1}$

h) $f(x) = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x^2}}$

10 — Encontre as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 5\operatorname{sen}(x) + 6\cos(x)$

b) $f(x) = \operatorname{tg}(x) - \operatorname{cotg}(x)$

c) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}$
d) $f(x) = x \operatorname{cotg}(x)$
e) $f(x) = (x - 2)\operatorname{sen}(x) + x^2 \operatorname{tg}(x) - \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}(x)\cos(x)$

11 — Encontre as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^7 e^x$
b) $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$
c) $f(x) = e^x \cos(x)$
d) $f(x) = \frac{x^n}{\ln(x)}$
e) $f(x) = x^3 \ln(x) - \frac{x^3}{3}$
f) $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x + 5^x + 6^x + 7^x$
g) $f(x) = \pi^x + 3^x x + 4^x \cos(x)$
h) $f(x) = \log_2(x) + \log_3(x) + \log_4(x)$
i) $f(x) = 2^x \log_3(x)$

12 — Seja

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\operatorname{senh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Esboce os gráficos de $\operatorname{senh}(x)$ e de $\cosh(x)$ utilizando os gráficos de e^x e e^{-x}.

13 — Mostre que:

a) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$
b) $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$
c) $\cosh(-x) = \cosh(x)$
d) $(\operatorname{senh}(x))' = \cosh(x)$
e) $(\cosh(x))' = \operatorname{senh}(x)$

14 — Calcule as seguintes derivadas:

a) $f(x) = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$
b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
c) $f(x) = (3 - 2\operatorname{sen}(x))^5$
d) $f(x) = \sqrt[3]{a + bx^3}$
e) $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(x)} + \frac{1}{\cos^3(x)}$
f) $f(x) = \operatorname{sen}(5x) + \cos(\frac{x}{7}) + \operatorname{tg}(\sqrt{x}$
g) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 5x + 1) + \operatorname{tg}(\frac{a}{x})$
h) $f(x) = \log_{10}(\operatorname{sen}(x))$
i) $f(x) = \ln(e^x + 5\operatorname{sen}(x) - 4x^3)$
j) $f(x) = \frac{a + bx^{n\,m}}{a - bx^n}$
k) $f(x) = x^4(a - 2x^3)^2$
l) $f(x) = 3^{\operatorname{cotg}(\frac{1}{x})}$

15 — Em que ponto a tangente a parábola $y = x^2 + -7x + 3$ é paralela a reta $5x + y - 3 = 0$.

16 — Achar a equação da tangente e da normal a curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ no ponto $-2, 5$.

17 — Dado $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Encontre os pontos do gráfico de f nos quais a tangente é horizontal.

18 — Dado o polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Determine a, b, c, d se $p(0) = p(1) = -2$ $p'(0) = -1$ e $p''(0) = 10$.

Aplicações da Derivada e Derivação Implícita

19 — O deslocamento de uma partícula sobre uma corda vibrante é dado pela equação

$$y(t) = 10 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(10\pi t)$$

a) Encontre a velocidade da partícula após t segundos
b) Em quais instantes de tempo a partícula está parada?
c) Em quais instantes de tempo a partícula está subindo?

20 — O movimento de uma mola sujeita a uma força de atrito é frequentemente modelado pelo produto de uma função exponencial e uma função seno. Suponha que a equação do movimento de um ponto sobre essa mola é

$$s(t) = 2e^{-1.5t}\operatorname{sen}(2\pi t)$$

onde s é medida em centímetros e t em segundos.

a) Encontre a velocidade após t segundos.
b) Encontre os instantes de tempo nos quais a partícula se encontra em repouso e a respectiva posição nesses instantes.

c) Mostre que $\lim_{t \to \infty} s(t) = 0$. Interprete o significado desse limite.

21 — Uma escada com 10m de comprimento está apoiada numa parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede e x a distância da base da escada até a parede. Se a base da escada escorregar para longe da parede, com que rapidez x variará em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?

22 — Cristais de clorato de sódio são fáceis de crescer no formato de cubos permitindo uma solução de água e clorato de sódio evaporar vagarosamente. Se V for o volume de cada cubo com comprimento de lado x:

a) Calcule $\frac{dV}{dx}$ quando $x = 3mm$ e explique seu significado.

b) Mostre que a taxa de variação do volume de cada cubo em relação ao comprimento da aresta é igual a metade da área da superfície do cubo.

23 — Uma pedra caiu dentro de um lago, produzindo uma ondulação circular que cresce a uma velocidade radial de $60m/s$. Encontre a taxa segundo a área dentro do círculo está crescendo depois de a) $1s$ b) $3s$ c) $5s$. O que você pode concluir?

24 — A lei de Boyle estabelece que quando uma amostra de gás é comprimida a uma temperatura constante, o produto da pressão e do volume permanece constante: $PV = C$

a) Encontre a taxa de variação do volume em relação a pressão.

b) Uma amostra de gás está em um recipiente a baixa pressão e é regularmente comprimida a temperatura constante por $10min$. O volume decresce mais rapidamente no início ou final dos 10 minutos. Explique.

25 — Em uma fazenda de piscicultura, uma população de peixes é colocada dentro de um lago e colhida regularmente. Um modelo para a variação da população é dada pela equação:

$$\frac{dP}{dt} = r_0 \left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right) P(t) - \beta P(t)$$

onde r_0 é a taxa de nascimento dos peixes, P_c é a população máxima que o pequeno lago pode manter (*capacidade de suporte*) e β é a porcentagem da população que é colhida.

a) Qual o valor de $\frac{dP}{dt}$ corresponde à população estável?

b) Se o pequeno lago pode manter 10000 peixes a taxa de nascimento é 5% e a taxa de colheita é de 4% encontre o nível estável da população.

c) O que acontece se β é elevado a 5%?

Funções definidas por partes

26 — Seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \leq c \\ ax + b \text{ se } x > c \end{cases}$$

Ache os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

27 — Seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) \text{ se } x \leq c \\ ax + b \text{ se } x > c \end{cases}$$

Ache os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

28 — Seja f a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} \text{ se } |x| > c \\ a + bx^2 \text{ se } |x| < c \end{cases}$$

Ache os valores de a, b em termos de c de modo que $f'(c)$ exista.

Respostas dos Exercícios

1 a)-1 d) -h

3 a) -1/6 b) -5/21 c) -50/201

4 a) 1 b) 1 c) 2 d) 4 e) 3 f) 0

8 Dois pontos, $(-2 \pm \sqrt{3}, (1 \mp \sqrt{3})/2)$

9 b)$2x + 9x^2 + 4x^3 + x^4 + 36x^5 + 7x^6$ d)$amx^{m-1} + b(m+n)x^{m+n-1}$

10 b) $\operatorname{cossec}(x)^2 + \sec(x)^2$ d) $\operatorname{cotg}(x) - x \operatorname{cossec}(x)^2$ e) $(-2 + x)\cos(x) + \cos(x)^2 + x^2\sec(x)^2 + \operatorname{sen}(x) - 2\cos(x)\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)^2 + 2x\tan(x)$

11 a)$7e^x x^6 + e^x x^7$ b) $(-2e^x)/x^3 + e^x/x^2$ f) $2^x\ln(2) + 3^x\ln(3) + 4^x\ln(4) + 5^x\ln(5) + 6^x\ln(6) + 7^x\ln(7)$ h) $1/(x\ln(2)) + 1/(x\ln(3)) + 1/(x\ln(4))$ i) $2^x/(x\ln(3)) + (2^x\ln(2)\ln(x))/\ln(3)$

14 a) $30(1 + 3x - 5x^2)^{29}(3 - 10x)$ b) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $-10\cos(x)(3 - 2\operatorname{sen}(x))^4$ d) $\dfrac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$ f) $5\operatorname{sen}(5x) - \frac{1}{7}\operatorname{sen}(\frac{x}{7}) + \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$ h) $\operatorname{cotg}(x)\log_{10} e$ j) $2abmnx^{n-1}\dfrac{(a+bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m+1}}$ l) $4x^3(a - 2x^3)(a - 5x^3)$

16 $y - 5 = 0$ $x + 2 = 0$

21 5m/rad

24 a) $\frac{dV}{dP} = -\frac{C}{P}$ b) No início.

27 $a = 2c$ $b = -c^2$

28 $a = \frac{3}{2c}$ $b = -\frac{1}{2c^3}$