Lista 4

Funções de Uma Variável

Derivadas II

Derivadas de funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas

1 — Calcule as seguintes derivadas

a) $e^{\operatorname{sen} x}$
b) $\ln(1+x^2)$
c) x^x
d) $\cos(x)^x$
e) $x^\pi + \pi^x$
f) $(2x+1)^x$
g) $\ln(\ln(\ln(x)))$
h) $\ln(x)^x$
i) x^{e^x}
j) $x^{1/x}$
* k) x^{x^x}

2 — Prove que

a) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec}(x)) = -\operatorname{cossec}(x)\operatorname{cotg}(x)$
b) $\frac{d}{dx}(\sec(x)) = \sec(x)\operatorname{tg}(x)$
c) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg}(x)) = -\operatorname{cossec}^2(x)$
d) $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e) $\frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
f) $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$
g) $\frac{d}{dx}\operatorname{arccossec}(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

3 — Calcule as seguintes derivadas

a) $\operatorname{tgh}(4x)$
b) $\operatorname{senh}(x^3+3x)$
c) $\operatorname{senh}(x)\operatorname{tgh}(x)$
d) $e^{\cosh x}$
e) $x^2\operatorname{senh}(3x)$

Derivação Implícita

4 — Encontre dy/dx diferenciando implicitamente

a) $x^2+y^2=1$
b) $x^2y+xy^2=3x$
c) $\sqrt{x+y}+\sqrt{xy}=6$
d) $x\operatorname{sen}(y)+\cos(2y)=\cos(y)$
e) $x^y=y^x$
f) $y=\ln(x^2+y^2)$

5 — Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado

a) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ no ponto $(-5, 9/4)$
b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$ no ponto $(-1, 4\sqrt{2})$
c) $y^2=x^3(2-x)$ no ponto $(1,1)$

6 — A função $y=f(x)$, $y>0$ é dada implicitamente por $x^2+4y^2=2$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto de abscissa 1.

7 — Mostre, fazendo a diferenciação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

8 — Mostre que a soma dos interseptos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$ é igual a c.

9 — Encontre as equações das retas tangentes à elipse $x^2+4y^2=36$ que passa através do ponto $(12,3)$

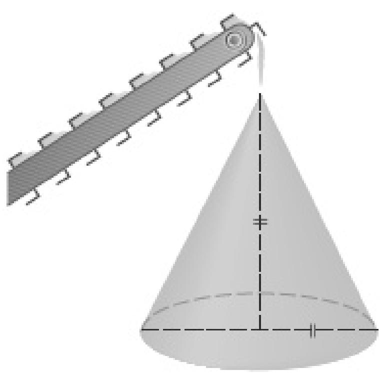
Taxas Relacionadas

10 — Se uma bola de neve derrete de tal forma que sua área de superfície decresce a uma taxa de $1\mathrm{cm}^2/\mathrm{min}$, encontre a taxa segundo a qual o diâmetro decresce quando o diâmetro é $10cm$.

11 — Dois carros iniciam o movimento no mesmo ponto. Um viaja para o sul a $60km/h$ e o outro para oeste a $25km/h$. A que taxa está crescendo a distância entre os carros duas horas depois?

12 — A água está vazando de um tanque cônico invertido a uma taxa de $10.000cm^3/min$. Ao mesmo tempo está sendo bombeada água para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem $6m$ de altura e o diâmetro no topo é $4m$. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de $20cm/min$ quando a altura da água for $2m$, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque.

13 — Uma esteira transportadora está descarregando cascalho a uma taxa de $30m^3/min$ formando uma pilha na forma de cone com diâmetro da base e da altura sempre iguais. Quão rápido está crescendo a altura da pilha, quando sua altura é de $10m$.



14 — O ponteiro dos minutos de um relógio mede $8mm$, enquanto o das horas tem $4mm$ de comprimento. Quão rápido está variando a distância entre as pontas dos ponteiros quando o relógio está marcando 1 hora?

15 — Uma escada com $10m$ de comprimento está apoiada contra uma parede vertical. Se a base da escada desliza afastando-se da parede a uma velocidade de $2m/s$. Quão rápido está variando o ângulo entre o topo da escada e a parede quando o ângulo é $\pi/4$?.

Máximos e Mínimos

16 — Encontre os pontos críticos da função:

a) $f(x) = 5x^2 + 4$
b) $f(\theta) = \theta + \text{sen}(\theta)$
c) $f(x) = |2x + 3|$
d) $f(x) = xe^{2x}$
e) $f(x) = x\ln(x)$
f) $f(t) = \sqrt{t}(1 - t)$
g) $g(t) = 5t^{2/3} + t^{5/3}$

17 — Defina máximo local e máximo global e explique a diferença entre eles.

18 — Suponha que f seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$

a) f possui máximos e mínimos globais nesse intervalo? Justifique?
b) Como podemos encontrar esses pontos?

19 — Encontre os valores máximos e mínimos **globais** de f no intervalo dado:

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ no intervalo $[-3, 2]$
b) $g(x) = \frac{x}{x+1}$ no intervalo $[1, 2]$
c) $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$ no intervalo $[-1, 2]$
d) $f(t) = \text{sen}(t) + \cos(t)$ no intervalo $[0, \pi/3]$
e) $f(x) = x - 3\ln(x)$ no intervalo $[1, 4]$
f) $h(t) = \ln(t)/t$ no intervalo $[1, 3]$

20 — Encontre um número positivo tal que a soma do número e de seu recíproco seja mínimo.

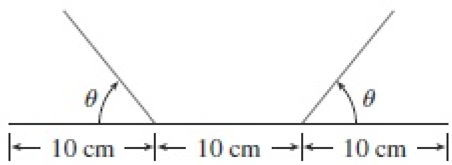
21 — Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de $100m$ cuja área seja a maior possível.

22 — Encontre o ponto da hipérbole $y^2 - x^2 = 4$ que está mais próximo do ponto $(2, 0)$.

23 — Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

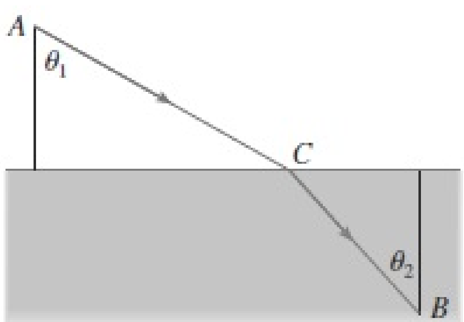
24 — Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o cilindro de maior volume possível.

25 — Uma calha deve ser construída com uma folha de metal de largura $30cm$ dobrando-se para cima $1/3$ da folha de cada lado, fazendo-se um ângulo θ com a horizontal. Como deve ser escolhido θ de forma que a capacidade de carregar a água na calha seja máxima?



26 — Seja v_1 a velocidade da luz no ar e v_2 a velocidade da luz na água. De acordo com o principio de Fermat um raio de luz viajará de um ponto A no ar para um ponto B na água por um caminho ACB que minimiza o tempo gasto. Mostre que

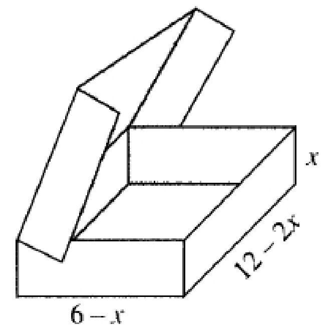
$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$



27 — Uma caixa sem tampa deve ser construída a partir de um quadrado de $60cm$ de largura, cortando fora um quadrado de cada um dos quatro cantos e dobrando para cima os lados. Encontre o maior volume que essa caixa pode ter.

28 — Uma lata cilíndrica sem topo é feita para receber Vcm^3 de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para fazer a lata.

29 — Uma caixa com tampa conforme a figura abaixo é feita a partir de uma folha de papel de 12cmx12cm. Encontre a caixa que optimiza o volume.



Respostas dos Exercícios

1 a) $x^x(1 + \ln(x))$