Lista 5

Funções de Uma Variável

Derivadas III

Derivadas de Ordem Superior

1 — Calcule y' e y'' para as seguintes funções:

a) $y = \text{tgh}(6x)$

b) $y = \text{cotgh}(\sqrt{1+x^2})$

c) $y = \cosh(x)^x$

d) $y = \cos(x)^x$

e) $y = \ln(\cos(x^2))$

f) $y = \log_2(1-3x)$

g) $y = \log_5(3x^3 + \text{sen}(x))$

h) $y = \log_{10}(\frac{a-x}{a+x})$

i) $y = \log_a(\frac{a-x}{a+x})$

j) $y = \arccos(x^2+3x)$

k) $y = \text{arcsen}(\cos(x))$

l) $y = \cosh(x)\cos(x)$

m) $y = \ln(\cosh(x))$

2 — Encontre:

a) $\frac{d^9}{dx^9}x^8\ln(x)$

b) $\frac{d^4}{dx^4}\cosh(x)$

c) $\frac{d^5}{dx^5}\ln(x)$

d) $\frac{d^n}{dx^n}\ln(x)$

e) $\frac{d^n}{dx^n}\cosh(2x)$

3 — Encontre y' se $y = \ln(x^2+y^2)$

4 — Encontre y' se $y^x = x^y$

Máximos e Mínimos

5 — Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de f no intervalo dado:

a) $f(x) = \frac{x^4-4}{x^2+1}$ no intervalo $[-4, 4]$

b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ no intervalo $[-1, 2]$

c) xe^{-x} no intervalo $[0, 2]$

d) $\frac{\ln(x)}{x}$ no intervalo $[1, 3]$

6 — Prove que a função $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ não tem máximos nem mínimos locais.

Teorema do Valor Médio

7 — Seja $f(x) = |x-1|$. Mostre que não existe c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3-0)$. Porque isso não contradiz o teorema do valor médio?

8 — Mostre que a equação $2x - 1 - \text{sen}(x) = 0$ tem exatamente uma raiz real.

9 — Mostre que um polinômio de grau 3 tem no máximo três raízes reais.

10 — Use o teorema do valor médio para provar a desigualdade:

$$|\text{sen}(a) - \text{sen}(b)| \leq |a-b|$$

11 — Prove as identidades:

a) $\text{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2\arctan(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}$

b) $2\,\text{arcsen}(x) = \arccos(1-2x^2)$

Gráficos de Funções

12 — Para as próximas funções:

a) Encontre os intervalos para os quais a função é crescente ou decrescente

b) Encontre os valores de máximo e mínimo locais

c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão

d) Esboce o gráfico, utilizando as informações dos itens anteriores

a) $(x^2 - 1)^3$

b) $3x^{2/3} - x$

c) $x + \cos(x)$

d) $x^{1/3}(x + 4)$

e) $\ln(x^4 + 27)$

f) $\ln(1 - \ln(x))$

g) $e^{-1/(x+1)}$

h) $\ln(\mathrm{tg}^2(x)$

i) $\frac{e^x}{x^2-9}$

j) $x \,\mathrm{tg}\, x \qquad -\pi/2 < x < \pi/2$

k) $e^{\cos(x)}$

L'Hopital

13 — Calcule os seguintes limites usando L'Hopital quando possível

a) $\lim_{x\to -1} \frac{4x^3+x^2+3}{x^5+1}$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-x^2+x-1}{x^1 2-3}$

c) $\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5}$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$

f) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan x}{\tan 5x}$

g) $\lim_{x\to\infty} x \,\mathrm{sen}\, \frac{a}{x}$

h) $\lim_{x\to 1} \ln(x) \ln(x - 1)$

i) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

j) $\lim_{x\to 0^+} x^{\mathrm{sen}(x)}$

k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sec^3(x)}{1-\cos(x)}$

l) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^x$

m) $\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-4x}$

Polinômio de Taylor

14 — Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de x_0

a) $\ln(x)$ em torno de 1

b) e^x em torno de 0

c) $\mathrm{sen}(x)$ em torno de 0

d) $\cos(x)$ em torno de 0

e) $\mathrm{senh}(x)$ em torno de 0

f) $\cosh(x)$ em torno de 0

g) $\sqrt[x]{x}$ em torno de 1

h) $\sqrt{x}$ em torno de 4

i) $\frac{1}{1-x^2}$ em torno de 0

15 — Usando o polinômio de Taylor de ordem 2 calcule o valor aproximado e avalie o erro:

a) $\ln(1.2)$

b) $\sqrt{3.8}$

c) $\mathrm{sen}(0.1)$

d) $\mathrm{sen}(\pi/25)$

e) $e^{0.003}$

16 — Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 de f em torno de x_0

a) $\ln(x)$ em torno de 1

b) e^x em torno de 0

c) $\mathrm{sen}(x)$ em torno de 0

d) $\cos(x)$ em torno de 0

e) $\mathrm{senh}(x)$ em torno de 0

f) $\cosh(x)$ em torno de 0

g) $\sqrt[x]{x}$ em torno de 1

h) $\sqrt{x}$ em torno de 4

i) $(1 + x)^\alpha$ em torno de 0

17 — Usando polinômios de Taylor calcule $\cos(1)$ com erro em módulo inferior a 10^{-4}