

Lista 8

Funções de Uma Variável

Técnicas de Integração

1 — Determine α e β de modo que:

$$\operatorname{sen}(6x) \cos(4x) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(\alpha x) + \cos(\beta x)).$$

Dica: use que: $\operatorname{sen}(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b))$

2 — Usando a técnica do exercício anterior calcule:

a) $\int \operatorname{sen}(6x) \cos(x) dx$

b) $\int \operatorname{sen}(x) \cos(6x) dx$

c) $\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}(3x) \cos(2x) dx$

d) $\int \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx$

3 — Usando que

$$\operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

calcule as seguintes integrais:

a) $\int \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(5x) dx$

b) $\int \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(7x) dx$

c) $\int \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx) dx$

4 — Usando que

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} ((\cos(a+b) + \cos(a-b)))$$

calcule:

a) $\int \cos(x) \cos(5x) dx$

b) $\int_{\pi/4}^{\pi} \cos(x) \cos(7x) dx$

c) $\int \cos(nx) \cos(mx) dx$

5 — Dados α, β, m, n constantes, com $\alpha \neq \beta$ mostre que existem A e B tais que:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

6 — Usando o exercício anterior calcule as seguintes integrais:

a) $\int \frac{1}{(x+1)(x-1)} dx$

b) $\int_7^9 \frac{x-1}{(x)(x-2)} dx$

c) $\int \frac{x-1}{x^2-4} dx$

d) $\int \frac{x-3}{x^2+3x+2} dx$

7 — Seja $\alpha \neq 0$. Mostre que:

$$\int \frac{1}{\alpha^2+x^2} dx = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right) + k$$

Use esse fato para calcular as integrais:

a) $\int \frac{1}{5+x^2} dx$

b) $\int \frac{1}{3+4x^2} dx$

c) $\int_0^1 \frac{3x+1}{5+x^2} dx$

8 — Calcule as seguintes integrais:

a) $\int \sqrt{1+x^2} dx$

b) $\int \sqrt{1-4x^2} dx$

c) $\int \sqrt{1-\cos(x)} dx$

d) $\int \sqrt{3+4x^2} dx$

e) $\int \sqrt{x^2+2x+2} dx$

9 — Calcule a área da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

10 — Prove que Dados α, β, m, n constantes mostre que existem A e B tais que:

$$\frac{mx + n}{(x - \alpha)^2} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{(x - \alpha)^2}.$$

11 — Calcule as seguintes integrais por frações parciais:

- $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$
- $\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx$
- $\int_3^4 \frac{x + 3}{(x - 1)^2} dx$
- $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx$
- $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4} dx$
- $\int \frac{x + 1}{x(x - 2)(x + 3)} dx$
- $\int \frac{x^4 + x + 1}{x^3 - x} dx$

Para calcular $\int \sin^n(x) \cos^m(x) dx$ faça as seguintes transformações:

• Se n for ímpar faça $u = \cos(x)$ observando que

$$\begin{aligned} & \int \sin^m(x) \cos^{2k+1}(x) dx \\ &= \int \sin^m(1 - \cos^2(x))^k \cos(x) dx \end{aligned}$$

Por fim faça a substituição $u = \sin(x)$

• Se m for ímpar faça $u = \sin(x)$

$$\begin{aligned} & \int \sin^{2k+1}(x) \cos^m(x) dx \\ &= \int \cos^m(1 - \cos^2(x))^k \sin(x) dx \end{aligned}$$

Por fim faça a substituição $u = \cos(x)$

• Se n e m forem pares faça $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ e use as fórmulas de recorrência.

12 — Calcule:

- $\int \sin(x) \sin(8x) dx$
- $\int \sin^3(x) dx$
- $\int \cos^2(4x) dx$
- $\int \sin(x) \cos^4(5x) dx$
- $\int \sin(2x) \cos^2(2x) dx$
- $\int_0^{\pi/4} \sin^2(2x) \cos^2(2x) dx$
- $\int_0^{\pi} \cos(x) \cos^2(4x) dx$

13 — Calcule as integrais usando substituição trigonométrica. Esboce o triângulo retângulo associado

- $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} dx$
- $\int x^3 \sqrt{9 - x^2} dx$
- $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$
- $\int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{4 - 9x^2} dx$
- $\int x \sqrt{1 - x^4} dx$
- $\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{\frac{5}{2}}}$

Dicas 8a) $x = \operatorname{tg}(v)$ 8b) $x = \frac{1}{2} \sin(u)$ 8c) $\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})$ 8d) $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}(u)$
8e) Observe que $x^2 + 2x + 2 = 1 + (x + 1)^2$