Lista 1 - Probabilidade

Álgebras, σ-álgebras, etc

Espaço Amostral

1 — Um dado é lançado sucessivas vezes até aparecer um 6 na face virada para cima. Neste instante o experimento finaliza. Qual é o espaço amostral deste experimento? Seja E_n o evento em que n lançamentos são necessários para completar o experimento. Que evento representa $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c$?

2 — (Distribuição de objetos em cubículos.) Considere a estrutura do espaço amostral decorrente de alocar k objetos (bolas, etc.) em n cubículos (caixas, etc.) enumerados de 1 a n. Esta classe de problemas aparece, por exemplo, na Física Estatística que o é estudada a distribuição de k partículas (prótons, elétrons, etc.) entre n estados (que podem ser níveis de energia). Na física estatística dizemos que:

- as partículas distinguíveis e que não estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli (no máximo uma partícula por sítio) obedecem as estatísticas de Maxwell-Boltzmann
- as partículas distinguíveis e que estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli (no máximo uma partícula por sítio) obedecem as estatísticas de Bose-Einstein.
- as partículas distinguíveis e que estão sujeitas ao princípio de exclusão, dizemos que obedecem as estatísticas de Fermi-Dirac.

Descreva o espaço amostral para estes modelos de alocação de partículas.

3 — (Passeio Aleatório I) Considere o experimento aleatório que consiste em observar os primeiros n movimentos de uma partícula que se desloca aleatoriamente no conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ dos números inteiros. A partícula começa sua trajetória na origem no instante 0 e a cada instante de tempo $1, 2, 3, \ldots$ a partícula se move aleatoriamente para a direita ou para a esquerda. Descreva o espaço amostral deste experimento.

4 — (Passeio Aleatório II) Descreva o espaço amostral que o o experimento consiste em observar a trajetória completa do passeio aleatório. Isto é, se observarmos seus movimentos em todos instante de tempo $n, n \in \mathbb{N}$.

5 — Considere uma urna que que contém M bolas enumeradas $1, 2, \ldots M$ onde M_1 bolas tem a cor $b_1, \ldots, M_r$ tem a cor b_r, e $M_1 + \cdots + M_r = M$. Suponha que retiramos uma amostra de tamanho $n < M$ sem substituição. Descreva o espaço amostral do experimento.

Álgebras

6 — Mostre que se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são álgebras de subconjuntos de Ω, então $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ é álgebra.

7 — Considere $\Omega = (0, 1]$. Prove que

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A = \cup_{i=1}^{n} (a_i, b_i],$$

$$(a_i, b_i] \subset (0, 1] \text{ e a união é disjunta é álgebra. } \}$$

8 — Prove que a coleção

$$\{\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : A \text{ é finito ou } A^c \text{ é finito } \}$$

é álgebra sobre Ω.

9 — Mostre que a coleção

$$\{A = \{A \subset \Omega : A \text{ é finito ou } A^c \text{ é finito } \}$$

não é uma σ-álgebra sobre Ω.

10 — Considere Ω infinito, não enumerável. Mostre que a coleção

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : \text{ A é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável } \}$$

é uma σ-álgebra sobre Ω.

11 — Mostre que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é gerado pelos conjuntos da forma $[-\infty, a]$ para $-\infty < a < \infty$, e também pelos conjuntos da forma $[-\infty, a)$ para $-\infty < a < \infty$.

12 — Considere as seguintes propriedades
(λ_1) $\Omega \in \mathcal{L}$,
(λ_2) $A \in \mathcal{L}$ implica que $A^c \in \mathcal{L}$, e
(λ_3) Para toda sequência de conjuntos disjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}$, temos $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$.
(λ_2') Para todo $A, B \in \mathcal{L}$, $A \subseteq B$ então $B - A \in \mathcal{L}$;
(λ_4) Para todo $A, B \in \mathcal{L}$, $A \cap B = \emptyset$ então $A \cup B \in \mathcal{L}$;
(λ_5) Para toda sequência não decrescente $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$;
(λ_6) Para toda sequência não crescente $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$.
Mostre que

a) $\mathcal{L}$ é λ-sistema see $\mathcal{L}$ satisfaz $(\lambda_1), (\lambda_2')$, e (λ_3) .
b) Todo λ-sistema satisfaz também $(\lambda_4), (\lambda_5)$, e (λ_6) .
c) $\mathcal{L}$ é um λ-sistema see satisfaz $(\lambda_1), (\lambda_2')$, e (λ_6) .
d) Se a família $\mathcal{L}$ é não vazia e satisfaz (λ_2) e (λ_3) , então $\mathcal{L}$ é um λ-sistema.

13 — Prove que

a) Se $A_n \nearrow$, então A_n converge, e

$$\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

b) Se $A_n \searrow$, então A_n converge, e

$$\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = B.$$

14 — (Conjunto de Vitali) Suponha uma medida μ não nula, sigma aditiva e invariante por translações nos reais. Prove detalhadamente que existe um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ que não é μ mensurável.

15 — Explique por que esse exemplo leva a necessidade de σ-álgebra na definição de espaço de medida.

16 — (Conjunto de Vitali II) Suponha uma medida μ não nula, sigma aditiva e invariante por translações nos plano. Prove detalhadamente que existe um subconjunto do quadrado $[0,1]2$ que não é μ mensurável.

17 — (Conjunto de Cantor) Mostre que o conjunto de Cantor é não enumerável em $\mathcal{B}((0,1])$ (uma boa maneira de ver que ele é não enumerável é trabalhar com uma caracterização do conjunto de Cantor na base 3).

18 — (σ-álgebra induzida) Suponha que $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra em Ω e seja Ω_0 um subconjunto de Ω (não necessariamente em $\mathcal{F}$). Prove que $\mathcal{F} \cap \Omega_0 := \{F \cap \Omega_0 : F \in \mathcal{F}\}$ é σ-álgebra em Ω_0.

19 — Dado $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Sejam $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. então

$$\mu\left(\bigcup_N \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n\right) \leq \liminf \mu(A_n)$$

20 — Prove que uma álgebra $\mathcal{A}$ é σ-álgebra, e somente se, $\mathcal{A}$ é uma classe monótona.

21 — Mostre que se $\mathcal{A}$ é álgebra, então $\mathcal{M}\langle A\rangle = \sigma\langle A\rangle$.

Probabilidade

22 — (Inclusão-exclusão) Prove o príncipio de inclusão-exclusão. Dados $A_1, \ldots, A_n$ eventos num espaço de probabilidade $(\Omega, F, \mathbf{P})$, prove que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \cdots \tag{1}$$

$$\cdots + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \tag{2}$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right). \tag{3}$$

23 — (Urna de Polya) Uma urna contém inicialmente uma bola branca e uma bola negra. Em cada etapa do experimento, uma bola é retirada aleatoriamente da urna, essa bola é colocada de volta na urna e outra bola da mesma cor é adicionada. Prove que o número de bolas brancas que estão na urna depois de N etapas é um número aleatório uniforme em $\{1, 2, ..., N + 1\}$. Ou seja, o evento em que o número de bolas brancas após o passo N é igual a k tem probabilidade $\frac{1}{N+1}$ para cada todo $1 \leq k \leq N+1$.

24 — (Passeio Aleatório) Suponha que que uma partícula está inicialmente na origem e se move para a esquerda ou para a direita um passo de cada vez, aleatoriamente, com a probabilidade p de ir para a esquerda e q de ir para a direita (com $p+q = 1$). Deixe S_n denotar a A posição do passeio aleatório após n passos.

a) Determine a probabilidade da partícula estar na posição x após n etapas.

b) Calcule $\mathbf{E}(S_n)$

c) Calcule $\mathbf{Var}(S_n)$

d) Analise detalhadamenteo caso $p = q = 1/2$.