

# *Geometria Analítica e Vetorial*

Versão 13

---

**Daniel Miranda**  
**Rafael Grisi**  
**Sinuê Lodovici**  
**UFABC**  
**julho de 2020**

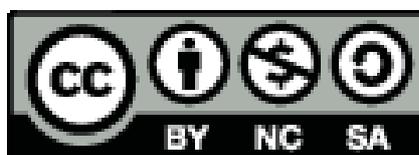
**"I have not yet any clear view as to the extent to which we are at liberty arbitrarily to create imaginaries and endow them with supernatural properties.- John Graves**

**Copyright © 2019**

**Licenciado sob a Creative Commons Attribution 4.0. Você não pode usar esse arquivo exceto em conformidade com a Licença. Você pode obter uma cópia da Licença em**

**<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>.**

**A menos que exigido por lei aplicável ou acordado por escrito, o livro distribuído sob a Licença é distribuído “COMO ESTÁ”, SEM GARANTIAS OU CONDIÇÕES DE QUALQUER TIPO, expressa ou implícita. Consulte a Licença para permissões específicas e limitações sob a Licença.**



***31 de janeiro de 2021***

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>i</b>
<b>Símbolos e notações gerais</b>	<b>1</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>2</b>
<b>1 Estrutura Vetorial do Plano e do Espaço</b>	<b>3</b>
1.1 Definições Elementares . . . . .	3
1.2 Soma de Ponto com Vetor . . . . .	28
<b>2 Combinações Lineares</b>	<b>31</b>
2.1 Dependência e Independência Linear de Vetores .	31
2.2 Bases . . . . .	55
2.3 Exercícios Complementares . . . . .	64
<b>3 Vetores em Coordenadas</b>	<b>68</b>
3.1 Sistemas de Coordenadas . . . . .	70
3.2 Bases Ortonormais e Coordenadas Cartesianas . .	86
3.3 Produto Escalar: Ângulo entre dois Vetores . . . . .	90
3.4 Produto Vetorial: Vetor Perpendicular a dois Vetores Dados	112
3.5 Escolha do Sistema de Coordenadas . . . . .	116
3.6 O Problema do Lugar Geométrico . . . . .	123
3.7 Coordenadas Polares . . . . .	128
<b>4 Retas e Planos</b>	<b>128</b>

4.1	Equações da Reta . . . . .	128
4.2	Equações do Plano . . . . .	143
5	Posições Relativas	148
5.1	Posição Relativas entre Retas . . . . .	148
5.2	Posição relativas entre retas e planos . . . . .	157
5.3	Posição relativas entre planos . . . . .	161
6	Ângulos e Distância	166
6.1	Ângulos . . . . .	166
6.2	Distâncias . . . . .	177
6.3	Retas em Coordenadas Polares . . . . .	187
7	Círculos e Esferas	193
7.1	Equações Canônicas de Círculos e Esferas . . . . .	193
7.2	Retas Tangentes e Planos Tangentes . . . . .	202
7.3	Circunferência em coordenadas polares . . . . .	209
8	Cônicas	211
8.1	Introdução . . . . .	211
8.2	Elipse . . . . .	213
8.3	Hipérbole . . . . .	223
8.4	Parábola . . . . .	232
8.5	★ Excentricidade . . . . .	242
8.6	★ Construções de Dandelin . . . . .	247
8.7	★ Cônicas em Coordenadas Polares . . . . .	251
8.8	★ Cônicas e a Trajetória dos Planetas . . . . .	253
9	Curvas	257
9.1	Parametrização de Curvas . . . . .	257
9.2	Curvas em Coordenadas Polares . . . . .	264
9.3	Coordenadas Esféricas e Cilíndricas . . . . .	268

9.4	Comprimento de uma Curva . . . . .	273
9.5	Regiões planas limitadas por curvas . . . . .	276
10	Mudança de Coordenadas Ortogonais no Plano	284
10.1	Translação . . . . .	285
10.2	Eliminação dos termos lineares de uma equação quadrática	285
10.3	Rotação . . . . .	290
10.4	Equações Geral do Segundo Grau no Plano . . . . .	295
10.5	Um pouco de Álgebra Linear . . . . .	301
11	Mudança de Coordenadas no Espaço	304
11.1	Mudança de Base . . . . .	304
11.2	Mudança de Coordenadas . . . . .	308
A	Notação de Somatório	313
B	Funções Trigonométricas	316
B.1	Identidades Trigonométricas . . . . .	317
B.2	Gráficos das Funções Trigonométricas . . . . .	318
B.3	Funções trigonométricas inversas . . . . .	321
C	Matrizes e Sistemas Lineares.	325
C.1	Matrizes . . . . .	325
C.2	Determinantes . . . . .	327
C.3	Teorema de Cramer . . . . .	332
C.4	Método de Eliminação de Gauss . . . . .	335
D	Wolfram Alpha e Mathematica	344
D.1	Plotagem . . . . .	344
D.2	Cálculo e Álgebra Linear . . . . .	351

<b>Respostas de Alguns Exercícios</b>	<b>355</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>356</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>356</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>357</b>

# Símbolos e notações gerais

$\exists$	: <i>existe</i>
$\forall$	: <i>qualquer que seja ou para todo(s)</i>
$\Rightarrow$	: <i>implica</i>
$\Leftrightarrow$	: <i>se, e somente se</i>
$\therefore$	: <i>portanto</i>
$:=$	: <i>definição</i> (o termo à esquerda de $:=$ é definido pelo termo ou expressão à direita)
i.e.	: <i>id est</i> (em português, <i>isto é</i> )
$\square$	: <i>indica o final de uma demonstração</i>
$\overleftrightarrow{AB}$	: <i>reta passando pelos pontos A e B</i>
$AB$	: <i>segmento de reta ligando os pontos A e B</i>
$\overline{AB}$	: <i>segmento orientado de reta ligando os pontos A e B</i>
$\overrightarrow{AB}$	: <i>vetor determinado pelos pontos A e B</i>
$v$	: <i>vetor v</i>
$\ \overline{AB}\ $	: <i>comprimento do segmento <math>\overline{AB}</math></i>
$\ v\ $	: <i>comprimento do vetor v</i>
$\ \overrightarrow{AB}\ $	: <i>comprimento do vetor <math>\overrightarrow{AB}</math></i>
$ A $	: <i>determinante da matriz A</i>

# **Agradecimentos**

**Gostaríamos de agradecer à prof<sup>a</sup>. Mariana Rodrigues da Silveira e ao prof. Alexei Magalhães Veneziani pelas inúmeras sugestões e correções. Também gostaríamos de agradecer aos alunos André Peric Tavares e Rafael Romano pelas correções.**

# Estrutura Vetorial do Plano e do Espaço

*"Meça o que for mensurável, e torne mensurável o que não o for."  
Galileu Galilei*

## 1 Definições Elementares

Como veremos ao longo desse texto, a utilização da linguagem vetorial permite uma descrição elegante e unificada dos principais resultados da geometria Euclideana bem como possibilita uma transição natural da formulação axiomática para a descrição analítica (em coordenadas) dessa mesma geometria.

Nesse capítulo, daremos o primeiro passo nessa caminhada e apresentaremos o básico da linguagem vetorial. Antes porém começaremos entendendo um pouco do papel fundamental que os vetores desempenham nas ciências naturais.

Para entendermos o papel que os vetores desempenham nas ciências, começamos observando que, por um lado, diversas grandezas físicas ficam completamente determinadas por um único valor (um número real), num sistema de unidades. Assim por exemplo o volume de um corpo fica especificado quando dizemos quantos metros cúbicos esse corpo ocupa, bem como

**ESPAÇO**

a massa, a temperatura, a carga elétrica, a energia, etc. Grandezas que ficam determinadas por um único valor real são denominadas grandezas escalares.

Por outro lado, diversas grandezas físicas exigem para sua completa determinação, além de um valor numérico o conhecimento de sua direção orientada. Tais grandezas são denominadas grandezas vetoriais ou simplesmente vetores.

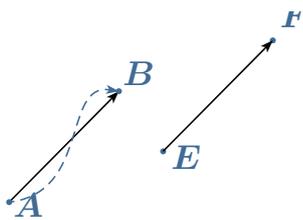


Fig. 1.1: Os caminhos ligando dois pontos correspondem, todos, ao mesmo vetor deslocamento.

O exemplo mais simples e ilustrativo é o deslocamento de um corpo. Se um corpo se move do ponto  $A$  para o ponto  $B$ , dizemos que ela sofreu um deslocamento de  $A$  para  $B$ . Para sabermos precisamente o deslocamento de um corpo precisamos conhecer o quanto o ele se deslocou (a intensidade do deslocamento) mas também em que direção ele se deslocou.

Pelas mesmas razões apresentadas serão grandezas vetoriais: a velocidade, a aceleração, a quantidade de movimento, a força e o torque.

É importante que observemos que para as grandezas escalares uma parte significativa da utilidade de medi-las, i.e, associar um número provém da riqueza de estruturas dos números: os números podem ser somados, subtraídos, comparados, etc.

Para que as grandezas descritas vetorialmente sejam úteis (tanto para a ciência como para a própria geometria) temos que construir no conjunto dos vetores estruturas análogas. Assim, neste e no próximo capítulo, descreveremos e construiremos diversas operações vetoriais e suas interpretações.

Como boa parte da construção dos vetores e de suas opera-

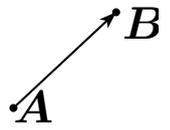
ções que faremos neste texto será de natureza primordialmente geométrica, assumiremos que o leitor conhece os principais conceitos e resultados da geometria Euclideana plana e espacial. Em particular suporemos conhecidos os conceitos de ângulos, retas, planos, comprimento de segmentos, distância de dois pontos, etc.

**Notação 1.1.** *De modo a fixar notação, ao longo deste texto denotaremos por  $\mathbb{E}^3$  o espaço euclidiano tridimensional e por  $\mathbb{E}^2$  o plano euclidiano, usaremos letras latinas maiúsculas,  $A, B$ , etc. para representar pontos, letras latinas minúsculas  $r, s$ , etc. para indicar retas, as letras gregas minúsculas  $\pi, \theta$ , etc. para denotar planos. Eventualmente usaremos letras latinas ou gregas minúsculas também para denotar números reais (escalares ou parâmetros de equações). Nesse caso, o contexto deve deixar claro a que a letra se refere.*

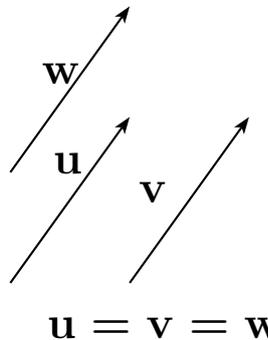
Para tornarmos clara a definição de vetor, começaremos com um termo relacionado: os vetores aplicados.

**Definição 1.2.** *Um vetor aplicado ou segmento orientado é um segmento de reta no qual se escolheu um dos extremos  $A$ , como ponto inicial. Nesse caso o outro extremo  $B$  do segmento será denominado ponto final e o vetor aplicado com ponto inicial  $A$  e final  $B$  será denotado por  $\overline{AB}$ . Para nossas considerações um ponto  $A$  é considerado um segmento que denominaremos segmento nulo. Esse segmento será denotado por  $\overline{AA}$  ou por  $\bar{0}$ .*

O comprimento de um segmento  $\overline{AB}$  será denotado por  $|\overline{AB}|$  e será denominado também tamanho, intensidade, magnitude ou norma do vetor.



Os vetores aplicados servem apenas parcialmente ao propósito de representar grandezas que possuem intensidade, direção e sentido, pois apesar de podemos representar grandezas com esses atributos como vetores aplicados, essa representação não é única. Ou seja, existem vários vetores aplicados com pontos iniciais e finais distintos, mas que possuem intensidade, direção e sentido iguais. Para eliminarmos esse problema, identificaremos, i.e, diremos que são iguais, todos esses vetores. Assim diremos que dois vetores aplicados são equivalentes (ou equipolentes) se e somente se, possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido ou ainda se ambos são nulos.



Uma identificação análoga, ocorre com as frações: duas frações podem ter numeradores e denominadores diferentes e mesmo assim diremos que elas são iguais (ou equivalentes) pois representam a mesma grandeza. Observe:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{23}{46}.$$

As frações acima são representações de um mesmo número. O número que, em notação decimal, denotaríamos por 0,5.

**ESPAÇO**

Mesmo em notação decimal, 0, 5 e 0, 50 são representações de um mesmo número.

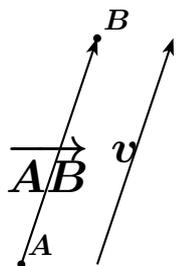
Quando identificamos os vetores aplicados equivalentes obtemos vetores livres ou simplesmente vetores.

**Definição 1.3.** *O conjunto de todos os vetores aplicados que possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido é dito vetor.*

É fundamental observar que dado um vetor podemos escolher livremente “o ponto onde inicia tal vetor”, ou seja, dado um vetor e um ponto podemos escolher um vetor aplicado que inicia nesse ponto e que possui a mesma intensidade, direção e sentido do vetor. Cada vetor aplicado com a mesma direção, sentido e comprimento do vetor, é dita ser um representante do vetor.

É importante que fique clara a seguinte diferença: se por um lado vetores aplicados ficam bem definidos pela escolha de direção, sentido, comprimento e origem, por outro, vetores precisam *apenas* de direção, sentido e comprimento. Isso significa que consideramos *equivalentes* segmentos orientados que são paralelos, apontam no mesmo sentido e tem o mesmo comprimento, mas consideramos *iguais* vetores paralelos, de mesmo sentido e com mesmo comprimento.

O vetor cujos representantes são segmentos orientado nulos, ou seja com pontos iniciais e finais coincidentes será denominado vetor nulo. O vetor nulo será denotado por  $\overrightarrow{AA}$  ou por 0.



Denotaremos os vetores utilizando fontes minúsculas em negrito  $a$ , através de uma flecha superior:  $\vec{a}$  ou ainda no caso em que tivermos dois pontos  $A$  e  $B$ , denotaremos por  $\overrightarrow{AB}$  o vetor que tem como representante o vetor aplicado  $\overline{AB}$ . Graficamente vetores são representados como flechas, no qual a ponta da flecha aponta no sentido do vetor.

Dado um vetor e um segmento que o representa, teremos que a direção do vetor é a direção desse segmento, o sentido vem de termos escolhido uma orientação no segmento, ou seja de termos escolhido um ponto inicial e final e o comprimento de um vetor é o comprimento do segmento que o representa.

Como consequência dos axiomas de congruência da geometria Euclideana, temos que dado um segmento (ou um representante de um vetor) e um ponto podemos construir um segmento paralelo e de mesmo comprimento iniciando em  $A$ . Se denotarmos por  $B$  o ponto final desse segmento, então teremos provado o seguinte resultado.

**Proposição 1.4.** *Dados um vetor  $v$  e um ponto  $A$ , existe um único ponto  $B$  tal que o vetor aplicado  $\overrightarrow{AB}$  é representante de  $v$ , ou seja, tal que  $v = \overrightarrow{AB}$ .*

O comprimento de um vetor  $v = \overrightarrow{AB}$  será também denominado norma do vetor e será denotado por  $\|v\|$  ou ainda por  $\|\overrightarrow{AB}\|$ .

**Notação 1.5.** *O conjunto de todos os vetores de  $\mathbb{E}^3$  será denotado por  $\mathbb{V}^3$ . De modo análogo, denotaremos por  $\mathbb{V}^2$  o conjunto de vetores associados a  $\mathbb{E}^2$ , i.e. classe de equivalência de segmentos de retas no plano.*

De modo geral, conceitos envolvendo vetores são definidos utilizando seus representantes. Nesse espírito temos as seguintes definições:

Diremos que dois vetores são paralelos quando seus representantes tiverem a mesma direção ou quando um desses vetores for o vetor nulo  $0$ . O termo vetores paralelos inclui o caso especial onde os vetores estão sobre a mesma reta ou mesmo o caso em que coincidem. Como consequência da definição anterior temos que o vetor nulo é paralelo a todo vetor e também que todo vetor é paralelo a si mesmo.

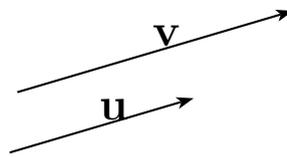


Fig. 1.2: Vetores paralelos.

Diremos que um conjunto de vetores são coplanares se esses vetores possuem representantes contidos no mesmo plano.

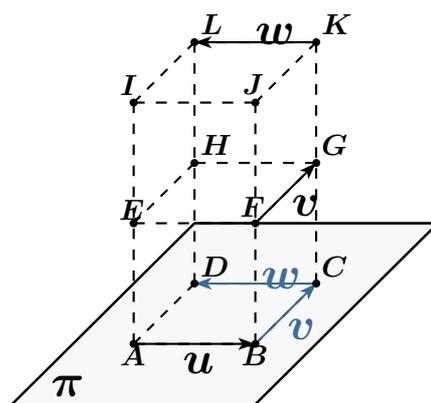


Fig. 1.3:  $u, v$  e  $w$  são coplanares.

Definimos o ângulo entre dois vetores  $u$  e  $v$  como o ângulo  $\theta$  (com  $\theta$  satisfazendo  $0 \leq \theta \leq \pi$ ) entre representantes  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  de  $u$  e  $v$ , respectivamente, com mesma origem.

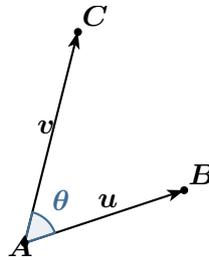


Fig. 1.4: Ângulo entre vetores

Finalmente, dois vetores  $u$  e  $v$  são ditos ortogonais, se um dos vetores for o vetor nulo, ou se ao escolhermos dois representantes para esses vetores que iniciam no mesmo ponto,  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  esses segmentos forem ortogonais, ou seja, se o ângulo determinado por esses segmentos for um ângulo reto ( $\pi/2$  radianos ou  $90^\circ$ ).

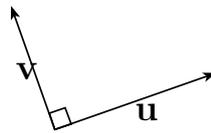


Fig. 1.5: Vetores ortogonais

**Observação 1.6.** *Note que, segundo nossa definição, o vetor nulo  $0$  é o único vetor paralelo e ortogonal a qualquer outro vetor, e coplanar a qualquer par de vetores.*

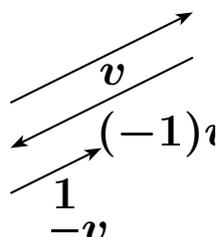
## Operações com Vetores

Por tradição, grandezas que possuem apenas magnitude, ou seja, grandezas que são representadas por números reais são denominadas grandezas escalares. Seguindo essa tradição denominamos um número real  $\lambda$  de escalar .

Vamos definir duas operações envolvendo vetores: a soma de vetores e a multiplicação por escalares.

**Definição 1.7. Multiplicação por Escalar:** *Dado um vetor  $v$  e um escalar  $\lambda$  podemos realizar a multiplicação de  $\lambda$  e  $v$  obtendo o vetor  $\lambda v$  definido do seguinte modo:*

- *Se o vetor  $v$  é nulo ou o escalar  $\lambda$  é zero então  $\lambda v = 0$*
- *Se  $\lambda > 0$ , o vetor  $\lambda v$  é o vetor com o mesmo sentido, mesma direção e com comprimento  $|\lambda| \|v\|$ .*
- *Se  $\lambda < 0$  então o vetor  $\lambda v$  tem a mesma direção e sentido oposto ao vetor  $v$  e comprimento  $|\lambda| \|v\|$ .*



**Fig. 1.6:** Multiplicação de um vetor por um escalar.

**Observação 1.8.** *Dados um vetor  $v$  e um escalar  $\lambda$  denotaremos usualmente o vetor  $\left(\frac{1}{\lambda}\right) v$  por  $\left(\frac{v}{\lambda}\right)$ . A equação anterior pode ser vista como uma definição da divisão de um vetor por um escalar.*

Um vetor de comprimento 1 é denominado vetor unitário. Dado um vetor  $v \neq 0$ , temos que o vetor:

$$\frac{1}{\|v\|} \cdot v = \frac{v}{\|v\|}$$

**ESPAÇO** 12  
é unitário e possui a mesma direção e sentido que  $v$  e é denominado versor associado à  $v$ . Para maiores detalhes veja exercício ??.

Um termo que usaremos ocasionalmente é o de vetor direcional ou vetor diretor. Muito frequentemente estaremos interessados apenas na direção de um vetor e não no seu tamanho. Por exemplo, como veremos posteriormente, uma reta é completamente determinada por um ponto  $P$  e um vetor  $v$ . Nesse caso o tamanho de  $v$  não é importante e podemos multiplicá-lo livremente por um escalar.

Através da multiplicação de vetores por escalares podemos dar uma caracterização algébrica para o paralelismo de vetores:

**Teorema 1.9.** *Se dois vetores  $u, v$  são paralelos e  $v \neq 0$  então  $u = \lambda v$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração.** Iremos considerar primeiramente o caso em que  $u$  e  $v$  têm mesmo sentido. Neste caso, visto que  $\|v\| \neq 0$ , podemos escolher

$$\lambda = \frac{\|u\|}{\|v\|}$$

Com essa escolha, provaremos que  $u = \lambda v$ .

Como  $u$  e  $v$  são paralelos,  $u$  e  $\lambda v$  possuem a mesma direção. E como estamos assumindo que  $u$  e  $v$  possuem o mesmo sentido e como  $\lambda$  é maior que zero então pela definição de multiplicação por escalares  $u$  e  $\lambda v$  possuem o mesmo sentido. Finalmente

$$\|\lambda v\| = \lambda \|v\| = \frac{\|u\|}{\|v\|} \|v\| = \|u\|$$

O que prova que eles tem o mesmo comprimento. Logo, como os vetores  $u$  e  $\lambda v$  possuem mesma direção, sentido e comprimento eles são iguais.

A demonstração do caso em que  $u$  e  $\lambda v$  possuem direção contrária é análoga, porém nesse caso escolhendo  $\lambda = -\frac{\|u\|}{\|v\|}$ .

**Proposição 1.10.** *Dois vetores  $u, v$  são paralelos se e somente se  $u = \lambda v$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$  ou  $v = \theta u$  para algum  $\theta \in \mathbb{R}$ .*

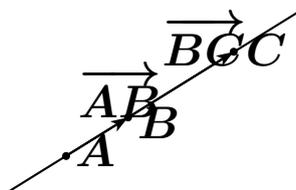
**Demonstração.** Suponha que  $u, v$  são paralelos.

**Caso  $v \neq 0$ ,** pelo teorema acima, temos que  $u = \lambda v$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . **Caso contrário,** i.e., se  $v = 0$  então  $v = \theta u$  para  $\theta = 0$ .

A implicação contrária segue da definição de multiplicação de um vetor por um escalar. Se  $u = \lambda v$  ou  $v = \theta u$  então  $u$  e  $v$  têm mesma direção, ou seja, são paralelos.

E como consequência do corolário anterior temos:

**Teorema 1.11.** *Três pontos  $A, B, C$  pertencem a mesma reta se e somente se  $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$  ou  $\overrightarrow{BC} = \theta \overrightarrow{AB}$ .*



**Demonstração.** Claramente se  $A, B, C$  pertencem a mesma reta então os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$  são paralelos e consequentemente pelo corolário acima temos:

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{BC} = \theta \overrightarrow{AB}$$

**ESPAÇO**  
 Se  $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$  ou  $\overrightarrow{BC} = \theta \overrightarrow{AB}$ , então pelo corolário anterior os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  são paralelos. Consequentemente são paralelas as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ . Mas como o ponto  $B$  pertence a ambas as retas, essas são coincidentes, i.e., os pontos  $A, B, C$  pertencem a mesma reta.

## Soma de Vetores

**Definição 1.12. Soma de vetores** *Dois ou mais vetores podem ser somados do seguinte modo: a soma,  $v + u$ , de dois vetores  $v$  e  $u$  é determinada da seguinte forma: A partir de um segmento orientado  $\overline{AB}$ , representante arbitrário de  $v$ , tome um segmento orientado  $\overline{BC}$  que representa  $u$ , i.e., tome um representante de  $u$  com origem na extremidade final do representante de  $v$ , desta forma o vetor  $v + u$  é definido como o vetor representado pelo segmento orientado  $\overline{AC}$ , ou seja, pelo segmento que vai da origem do representante de  $v$  até a extremidade final do representante de  $u$ .*

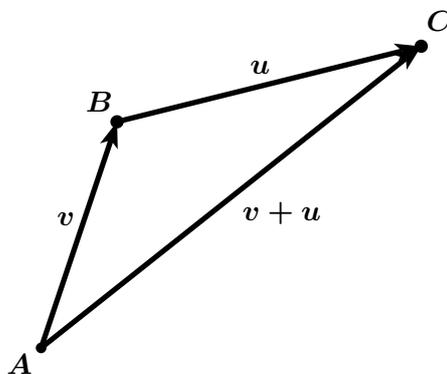


Fig. 1.7: Soma de Vetores

A soma de vetores também pode ser feita através da regra do paralelogramo. Para somar dois vetores  $v$  e  $u$  através dessa

regra tomamos representantes desses vetores que começam num ponto comum  $O$ , como na figura 1.8. Então, a partir do ponto final de cada vetor traçamos uma reta paralela ao outro vetor. Essas retas se interceptam no ponto  $P$ . E logo um paralelogramo é formado. O vetor diagonal  $\overrightarrow{OP}$  é a soma dos vetores  $v$  e  $u$ . O vetor  $v + u$  obtido por esse método é o mesmo que o obtido pelo método anterior, pois o segmento  $\overline{OP}$  divide o paralelogramo em triângulos congruentes que representam a soma dos vetores  $v$  e  $u$ .

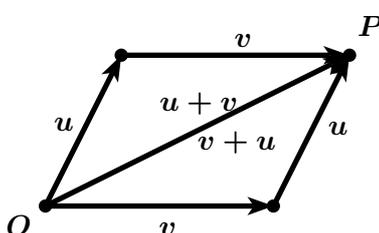


Fig. 1.8: Regra do paralelogramo.

Existe ainda um terceiro modo de se realizar a soma de dois vetores, a chamada soma em coordenadas, que ilustraremos no exemplo a seguir e que discutiremos em maior detalhes no Capítulo 3.

**Exemplo 1.13.** *Suponha que sobre um corpo material agem duas forças,  $u$  e  $v$ , de módulos  $2,00\text{N}$  e  $4,00\text{N}$  respectivamente, nas direções indicadas na Figura 1.9. Qual o módulo da força resultante, ou seja, qual o comprimento de  $(u + v)$ ?*



### Solução:

1 Soma pela lei do paralelogramo:

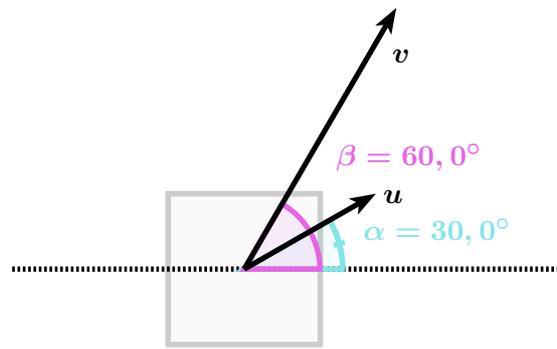


Fig. 1.9: Exemplo 1.13

Como acabamos de ver, uma forma de encontrar  $(u + v)$  é usar a regra do paralelogramo. Considere então o paralelogramo  $ABCD$  conforme a Figura 1.10. Como ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes e a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é  $360^\circ$  obtemos que o ângulo  $\angle ADC$  é de  $150^\circ$ . Como  $u = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ , podemos aplicar a lei dos cossenos no triângulo  $ADC$  para obter o comprimento de  $AC$ , ou seja, o módulo de  $u + v$ :

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= |AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2 - 2|AD||DC| \cos(150^\circ) \\ &= 16 + 4 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot (-\sqrt{3}/2) = 20 + 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

Logo  $\|u + v\| = \sqrt{20 + 8\sqrt{3}} \approx 5,82\text{N}$ .

**2 Soma em coordenadas cartesianas:**

Uma segunda abordagem seria decompor as forças em componentes horizontais e verticais e fazer, então, a soma dessas componentes. A vantagem desse modo de resolução está na não necessidade do estudo de ângulos (como fizemos para encontrar o ângulo  $\angle ADC$  na resolução anterior), e na troca da lei dos cossenos pelas definições de

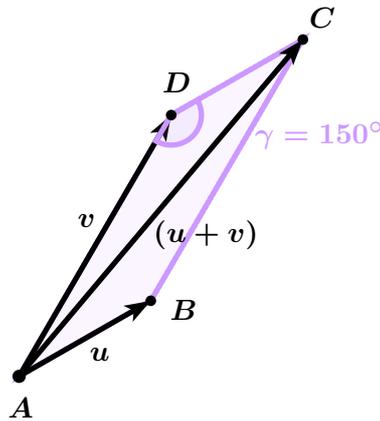


Fig. 1.10: Exemplo 1.13: Paralelogramo

seno e cosseno de um ângulo junto com o teorema de Pitágoras.

Se  $u = u_x + u_y$ , onde  $u_x$  e  $u_y$  são as componentes horizontal e vertical de  $u$  respectivamente, e  $v = v_x + v_y$  (adotando a mesma notação) vemos que:

$$u + v = (u_x + u_y) + (v_x + v_y) = (u_x + v_x) + (u_y + v_y).$$

Daí, por Pitágoras:

$$\|u + v\|^2 = \|u_x + v_x\|^2 + \|u_y + v_y\|^2$$

(ver Figura 1.11).

Desse modo obtemos  $\|u_x\| = 2 \cos(30) = \sqrt{3}$ ,  $\|u_y\| = 2 \sin(30) = 1$ ,  $\|v_x\| = 4 \cos(60) = 2$  e  $\|v_y\| = 4 \sin(60) = 2\sqrt{3}$ . Daí:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (\sqrt{3} + 2)^2 + (1 + 2\sqrt{3})^2 = (3 + 4\sqrt{3} + 4) + (1 + 4\sqrt{3} + 12) \\ &= 20 + 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

E, da mesma forma que na resolução anterior,  $\|u + v\| = \sqrt{20 + 8\sqrt{3}} = 5,82\text{N}$ .

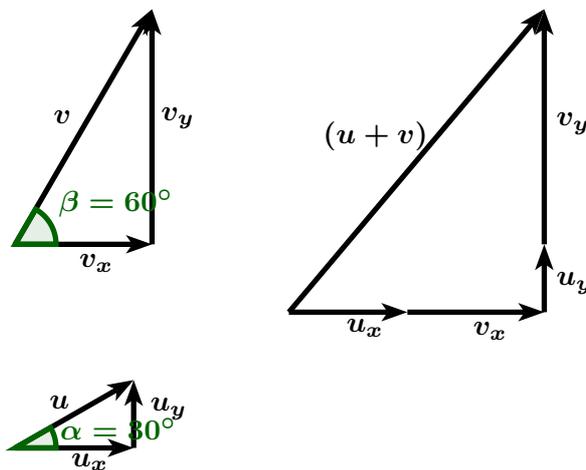


Fig. 1.11: Exemplo 1.13: Coordenadas cartesianas

Essa última resolução, conforme veremos mais adiante, é essencialmente o cálculo da soma de dois vetores num sistema de coordenadas cartesiano.

□

### Propriedades Vetoriais

Pela definição da soma de vetores, temos que em geral o comprimento de  $w = u + v$  é diferente da soma dos comprimento dos vetores  $u$   $v$ , i.e.,

$$\|w\| = \|u + v\| \neq \|u\| + \|v\|.$$

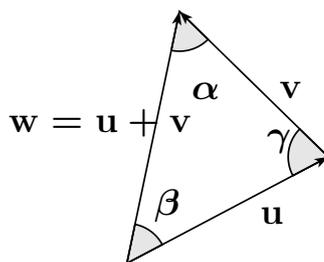


Fig. 1.12: comprimento e direção de  $w = u + v$

Para determinarmos o comprimento de  $w = u + v$  podemos utilizar a lei dos cossenos para o triângulo da figura:

Considerando  $\gamma$  o ângulo indicado na Figura 1.12, pela Lei dos Cossenos temos:

$$\|w\| = \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\gamma} \quad (1.1)$$

Considerando,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  os ângulos indicados na Figura 1.12, pela Lei dos Senos segue:

$$\frac{|w|}{\text{sen } \gamma} = \frac{|u|}{\text{sen } \alpha} = \frac{|v|}{\text{sen } \beta} \quad (1.2)$$

As equações 1.1 e 1.2 são a formulação vetorial das Leis dos Cossenos e dos Senos respectivamente.

**Observação 1.14.** Note que o ângulo  $\gamma$  representado na Figura 1.12 é na verdade o suplementar do ângulo entre  $u$  e  $v$ .

Notamos que, como  $-1 \leq \cos \gamma \leq 1$ , um resultado imediato de (1.1) é:

**Teorema 1.15 (Desigualdade Triangular).** *Dados dois vetores  $u$  e  $v$  temos que:*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad (1.3)$$

*Além disso, vale a igualdade de (1.3) se e somente se os vetores  $u$  e  $v$  tiverem mesma direção e sentido.*

Observamos também que, a partir da definição de soma vetorial, é fácil ver que  $v + 0 = 0 + v = v$ , ou seja, o vetor nulo é

um elemento neutro para a adição. Mais, podemos definir o vetor oposto a um vetor dado. Para isso consideremos a seguinte propriedade, cuja demonstração deixamos como exercício (??):

*Para cada vetor  $u$  existe um único vetor  $-u$  tal que*

$$u + (-u) = 0.$$

O vetor  $-u$  é denominado como o vetor oposto de  $u$  e é o vetor com o mesmo comprimento e direção de  $u$ , mas com sentido oposto.

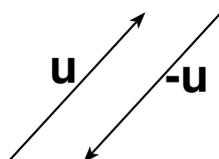


Fig. 1.13: Vetor oposto.

A partir do vetor oposto podemos definir subtração de vetores: , definimos a subtração  $v - u$  como a soma do vetor  $v$  com o vetor  $-u$ .

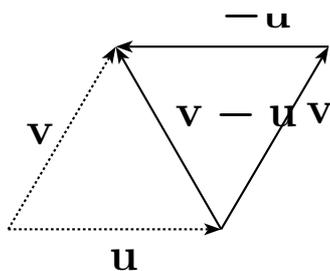
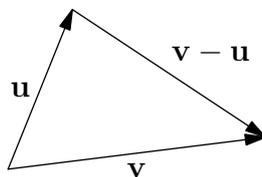


Fig. 1.14: Subtração de Vetores

De modo equivalente podemos definir o vetor  $v - u$  como o o vetor que adicionado a  $u$  dá o vetor  $v$ . Consequentemente, se representarmos os vetores  $v$  e  $u$  começando no mesmo ponto, o vetor  $v - u$  será o vetor que liga a extremidade final de  $u$  a extremidade final de  $v$  (vide figura 1.14).

Uma observação importante é que sempre que os vetores formam um polígono fechado, como a figura abaixo, sua soma



é nula: Como um caso especial dessa regra é a soma de um vetor com seu oposto, i.e.,  $v + (-v) = 0$ .

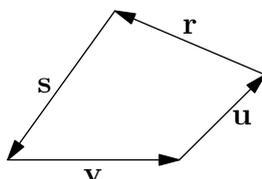


Fig. 1.15: A soma de vetores que formam um polígono fechado é nula:  $v + u + r + s = 0$

As seguintes propriedades da soma e multiplicação de vetores devem ser evidentes. Elas caracterizam os espaços de vetores  $\mathbb{V}^2$  e  $\mathbb{V}^3$  como espaços vetoriais, que, como eles, são conjuntos munidos de duas operações (multiplicação por escalar e soma). O estudo desses e outros espaços vetoriais (como o espaço de polinômios de grau  $n$ , por exemplo), bem como de transformações lineares, é conteúdo de cursos de Álgebra Linear na maioria das universidades.

**Proposição 1.16.** *Sejam  $u, v, w$  vetores e  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  escalares. As operações com vetores possuem as seguintes propriedades:*

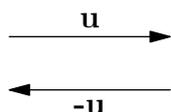
**Propriedades da soma:**

**S1.** Propriedade Comutativa:  $v + u = u + v$

**S2.** Propriedades associativa:  $(u + v) + w = u + (v + w)$

**S3.** Elemento Neutro:  $0 + u = u$

**S4.** Elemento oposto: Para cada vetor  $u$  existe um único vetor  $-u$  tal que  $u + (-u) = 0$



**Propriedades da multiplicação de vetor por escalar:**

**M1.** Propriedade distributiva de escalares em relação aos vetores:  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

**M2.** Multiplicação por zero  $0u = 0$

**M3.** Associatividade da multiplicação por escalares  $(\lambda_1 \lambda_2)u = \lambda_1(\lambda_2 u)$

**M4.** Distributiva dos vetores em relação aos escalares  $(\lambda_1 + \lambda_2)u = \lambda_1 u + \lambda_2 u$

**M5.** Elemento neutro multiplicativo  $1u = u$

**Demonstração.** Esboçaremos a demonstração de algumas dessas propriedades:

A propriedade comutativa segue da regra do paralelogramo para a adição dos vetores  $u$  e  $v$ , veja a figura 1.16. A diagonal é simultaneamente os vetores  $u + v$  e  $u + v$ .

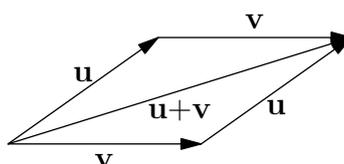


Fig. 1.16: Propriedade Comutativa da Soma

A propriedade associativa segue de imediato do fato que quando três vetores são adicionados, o mesmo vetor fecha o polígono, como na figura 1.17.

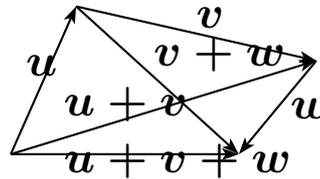


Fig. 1.17: Propriedade Associativa da Soma

As propriedades S3 e S4 são deixadas como exercício ao leitor.

A propriedade M1 segue de modo simples a partir da regra do paralelogramo. Deixamos os detalhes a cargo do leitor. M2 e M5 são resultados imediatos da definição de multiplicação de vetor por escalar.

Para demonstrarmos a propriedade M3, i.e., a associatividade da multiplicação por escalares  $(\lambda_1 \lambda_2)u = \lambda_1(\lambda_2 u)$  observamos inicialmente que os vetores  $(\lambda_1 \lambda_2)u$  e  $\lambda_1(\lambda_2 u)$  possuem a mesma direção e sentido independentemente do sinal de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  (terão o mesmo sentido de  $u$  se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tiverem o mesmo sinal, e sentido oposto a  $u$  se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tiverem sinais contrários).

Além disso, os comprimentos de  $(\lambda_1 \lambda_2)u$  e  $\lambda_1(\lambda_2 u)$  são os mesmos pois:

$$\|\lambda_1(\lambda_2 u)\| = |\lambda_1| \cdot \|\lambda_2 u\| = |\lambda_1| \cdot (|\lambda_2| \|u\|) = |\lambda_1 \lambda_2| \cdot \|u\| = \|(\lambda_1 \lambda_2)u\|$$

A propriedade M4, i.e., a distributiva dos vetores em relação aos escalares

$$(\lambda_1 + \lambda_2)u = \lambda_1 u + \lambda_2 u,$$

segue da observação de que a direção e o sentido dos vetores  $(\lambda_1 + \lambda_2)u$  e  $\lambda_1 u + \lambda_2 u$  é a mesma. Esse fato é claro se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tiverem o mesmo sinal, ou se  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , no outros casos o sentido é determinado pelo escalar de maior módulo  $|\lambda_1|$  e  $|\lambda_2|$ .

Se o sinal de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem o mesmo, teremos que

$$\|(\lambda_1 + \lambda_2)u\| = |(\lambda_1 + \lambda_2)| \|u\| = (|\lambda_1| + |\lambda_2|) \|u\| = \|\lambda_1 u\| + \|\lambda_2 u\|.$$

Pela definição de adição de vetores é fácil ver que a soma de dois vetores de mesmo sentido é um vetor também de mesmo sentido e com o comprimento igual a soma do comprimento dos vetores somados. Daí temos:

$$\|\lambda_1 u\| + \|\lambda_2 u\| = \|\lambda_1 u + \lambda_2 u\|.$$

Por outro lado, caso os sinais de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sejam contrários, teremos:

$$\|(\lambda_1 + \lambda_2)u\| = |(\lambda_1 + \lambda_2)| \|u\| = \left| |\lambda_1| - |\lambda_2| \right| \|u\| = \left| \|\lambda_1 u\| - \|\lambda_2 u\| \right|.$$

Novamente, pela definição de soma vetorial, segue que:

$$\left| \|\lambda_1 u\| - \|\lambda_2 u\| \right| = \|\lambda_1 u + \lambda_2 u\|.$$

Todas as propriedades algébricas dos vetores podem ser deduzidas das 9 propriedades acima. Essas propriedades são análogas as propriedades dos números reais e grande parte da álgebra desenvolvida para números reais se estende para as operações vetoriais. De modo mais geral podemos definir um espaço vetorial como um conjunto com uma operação  $+$  e uma operação de multiplicação por escalares satisfazendo os nove axiomas acima. Os espaços vetoriais são uma das estruturas matemáticas de maior importância.

Vejamos algumas propriedades algébricas dos vetores:

**Exemplo 1.17.**  $v + v = 2v$

**Demonstração.** Pela propriedade  $M5$  temos que  $v + v = 1v + 1v$  e pela propriedade  $M4$  temos que  $1v + 1v = (1 + 1)v = 2v$  e logo  $v + v = 2v$ .

**Exemplo 1.18.**  $v + (-1v) = 0$ , ou seja o vetor oposto a  $v$  é  $-1v$ .

◁

**Demonstração.** Pela propriedade  $M5$  temos que  $v + (-1v) = 1v + (-1v)$  e pela propriedade  $M4$  temos que  $1v + (-1v) = (1 - 1)v = 0v$ . Finalmente a propriedade  $M2$  nos diz que  $0v = 0$

Como o vetor oposto é único temos que o vetor oposto a  $v$  é  $-1v$ .

**Exemplo 1.19.**  $u + v = w$  se, e somente se,  $u = w - v$ .

◁

**Demonstração.** Vamos provar a primeira implicação. Se  $u + v = w$  então,  $u = w - v$

Vamos começar calculando  $(u + v) - v$

$$(u + v) - v = u + (v - v) \text{ por } S2 \tag{1.4}$$

$$u + (v - v) = u \text{ por } M4 \text{ e } M5 \tag{1.5}$$

por outro lado, como  $w = u + v$ :

$$(u + v) - v = w - v = u \tag{1.6}$$

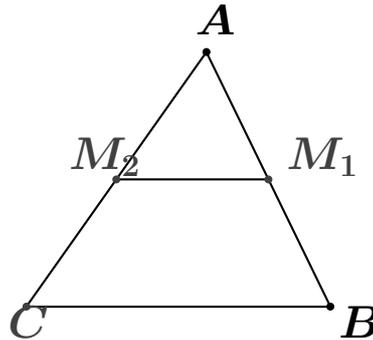
e conseqüentemente por 1.5 e 1.6 temos:

$$u = (u + v) - v = w - v$$

A implicação contrária é semelhante. O leitor pode tentar, assim, completar os detalhes.

O seguinte exemplo ilustra como podemos atacar um problema geométrico utilizando a linguagem vetorial.

**Exemplo 1.20.** *Os segmentos que unem os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.*



**Solução:** Seja o triângulo  $\Delta ABC$  e seja  $M_1$  o ponto médio do lado  $\overline{AB}$  e  $M_2$  o ponto médio do lado  $\overline{AC}$ .

Como  $M_1$  é ponto médio do lado  $\overline{AB}$  temos que vetor  $\overrightarrow{AM_1}$  é igual a metade do vetor  $\overrightarrow{AB}$ . Analogamente, temos que  $\overrightarrow{AM_2}$  é metade do vetor  $\overrightarrow{AC}$ , i.e.,

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \tag{1.7}$$

$$\overrightarrow{AM_2} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \tag{1.8}$$

e conseqüentemente:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM_1} \tag{1.9}$$

$$\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{M_2A} \tag{1.10}$$

Então como:

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \tag{1.11}$$

substituindo 1.9 e 1.10 em 1.11 temos:

$$\vec{CB} = 2\vec{M_2A} + 2\vec{AM_1} \tag{1.12}$$

$$\vec{CB} = 2(\vec{M_2A} + \vec{AM_1}) = 2\vec{M_2M_1} \tag{1.13}$$

e conseqüentemente:

$$\vec{M_2M_1} = \frac{1}{2}\vec{CB}$$

E assim o segmento  $\overline{M_2M_1}$  é paralelo ao segmento  $\overline{CB}$  e seu comprimento é metade do último.

□

**Exemplo 1.21.** *Dado um triângulo de vértices  $A, B, C$ . Dado  $P$  o ponto de encontro da bissetriz do ângulo  $\hat{C}$  com o lado  $\overline{AB}$ . Então o vetor  $CP$  é paralelo ao vetor  $\frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|} + \frac{\vec{CB}}{\|\vec{CB}\|}$ , ou seja,*

$$\vec{CP} = \lambda \left( \frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|} + \frac{\vec{CB}}{\|\vec{CB}\|} \right) \tag{1.14}$$

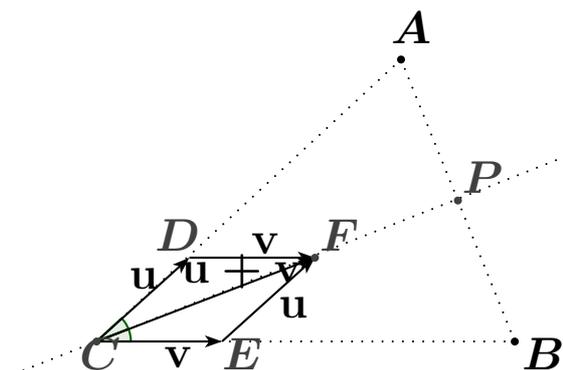
◁

**Solução:**

Note primeiramente que, para provarmos a equação (1.14), basta mostrarmos que, se  $F$  é tal que:

$$\vec{CF} = \frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|} + \frac{\vec{CB}}{\|\vec{CB}\|},$$

então  $F$  está sob a bissetriz do ângulo  $\hat{C}$ .



Faremos isso observando que a diagonal  $CF$  de um losango  $CEFD$  divide os ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{F}$  em ângulos iguais, ou seja é bissetriz de  $\hat{C}$  e  $\hat{F}$ . Isso segue do caso LLL de congruência de triângulos ( $\triangle CFD \cong \triangle CEF$ ).

Considere agora os vetores  $u = \frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|}$  e  $v = \frac{\vec{CB}}{\|\vec{CB}\|}$ . Como os vetores  $u$  e  $v$  possuem o mesmo comprimento, pois são unitários, o paralelogramo determinado por estes vetores é um losango. Conseqüentemente, como  $u$  e  $v$  são paralelos aos lados  $CA$  e  $CB$  do triângulo  $\triangle ABC$ , e a regra do paralelogramo nos diz que a soma de dois vetores é a diagonal do paralelogramo por eles formado, temos que, se  $\vec{CF} = (u + v)$ , então o segmento  $CF$  divide o ângulo  $\hat{C}$  em ângulos iguais.

Finalmente, se  $P$  é um ponto qualquer da bissetriz de  $\hat{C}$ , o vetor  $\vec{CP}$  é paralelo ao vetor  $\vec{CF}$ , i.e.,

$$\vec{CP} = \lambda \left( \frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|} + \frac{\vec{CB}}{\|\vec{CB}\|} \right)$$

□

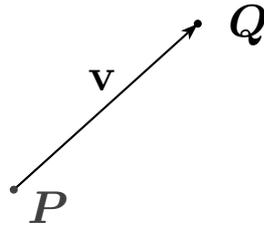
## 2 Soma de Ponto com Vetor

A soma do ponto com o vetor  $v$  nos retorna a translação do ponto  $P$  ao ser transportado pela direção, sentido e comprimento de  $v$ .

**Definição 1.22.** *Dado um ponto  $P$  e um vetor  $\vec{v}$  podemos definir a soma de ponto com vetor do seguinte modo.*

Seja um representante de  $\vec{v}$  que começa em  $P$  e seja  $Q$  o ponto final desse representante. Definimos então:

$$P + v := Q$$



Podemos reescrever a definição de soma de ponto com vetor de outra forma: diremos que  $P + v = Q$  se e somente se  $\overrightarrow{PQ} = v$ .

Se escolhermos um ponto fixo no espaço  $O$  que chamaremos de origem, cada ponto  $P$  do espaço (ou plano) pode ser escrito como

$$P = O + \overrightarrow{OP}$$

Nesse caso o vetor  $\overrightarrow{OP}$  é dito vetor posição de  $P$ .

**Proposição 1.23.** *A soma de ponto com vetor tem as seguintes propriedades:*

- 1  $P + O = P$
- 2  $P + u = P + v$  **se e somente se**  $u = v$
- 3  $(P + u) + v = P + (u + v)$
- 4  $(P + u) - u = P$
- 5  $P + \overrightarrow{PQ} = Q$

**Demonstração.** Faremos a demonstração dos três primeiras propriedades e deixaremos as outras como exercício ao leitor.

- 1 É imediata pois  $\overrightarrow{PP} = 0$
- 2 Se  $P + u = P + v$ , seja  $Q = P + u$ , então  $u = \overrightarrow{PQ} = v$  e assim  $u = v$ . A recíproca é imediata.
- 3 Seja  $Q_1 = P + u$ ,  $Q_2 = Q_1 + v$  e  $Q_3 = P + (u + v)$ . Para demonstrar que  $(P + u) + v = P + (u + v)$  basta mostrarmos que  $Q_2 = Q_3$ .

Por definição  $Q_1 = P + u$  implica que  $u = \overrightarrow{PQ_1}$ . De modo análogo,  $Q_2 = Q_1 + v$ , implica que  $v = \overrightarrow{Q_1Q_2}$  e  $Q_3 = P + (u + v)$  implica que  $(u + v) = \overrightarrow{PQ_3}$ .

Logo

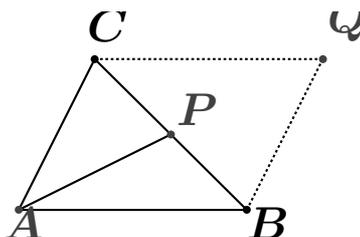
$$\overrightarrow{PQ_3} = (u + v) = \overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} \tag{1.15}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ_3} = \overrightarrow{PQ_2} \tag{1.16}$$

$$\Rightarrow Q_3 = Q_2 \tag{1.17}$$

**Exemplo 1.24.** Dado  $\triangle ABC$  um triângulo e  $P$  um ponto sobre  $BC$ . Se  $Q = P + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$  demonstre que  $ABQC$  é um paralelogramo e assim  $Q$  não depende da escolha de  $P$ .

◁



**Solução:** Como  $Q = P + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$  então

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

$$\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}$$

e logo

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

E assim  $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ . De modo análogo podemos provar que  $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AC}$  e assim  $ABQC$  é um paralelogramo.

□

## Combinações Lineares

### 1 Dependência e Independência Linear de Vetores

Como vimos no capítulo anterior, a adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar nos permitem obter novos e diferentes vetores a partir de alguns vetores dados. Os vetores assim obtidos são ditos combinação linear dos vetores iniciais.

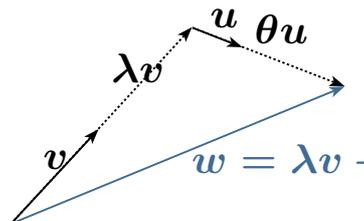


Fig. 2.1: O vetor  $w$  pode ser escrito como somas de múltiplos dos vetores  $u$  e  $v$ .

**Definição 2.1.** Diremos que um vetor  $w$  é combinação linear dos vetores  $\{v_1, \dots, v_n\}$  se existem escalares  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  tal que

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Nesse caso diremos também que o vetor  $w$  é dependente dos vetores  $v_i$  com  $i = 1, \dots, n$ , ou ainda, que o vetor  $w$  pode ser representado em função dos vetores  $v_i$  com  $i = 1, \dots, n$

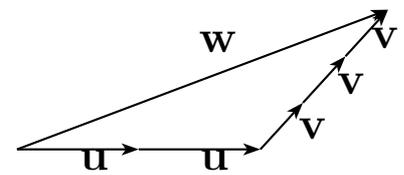


Fig. 2.2:  $w = 2u + 3v$

**Exemplo 2.2.** O vetor  $w$  ilustrado na figura 2.2 é combinação de  $u, v$ . Pois

$$w = 2u + 3v.$$

◁

**Exemplo 2.3.** Na figura 2.3 temos que vetor  $f_1$  é combinação linear de  $f_2, f_3, f_4, f_5$ .

Como os vetores  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  formam um polígono fechado sua soma é 0

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 0$$

e assim:

$$f_1 = -f_2 - f_3 - f_4 - f_5.$$

◁

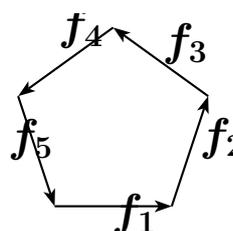
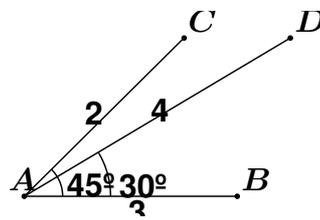


Fig. 2.3: O vetor  $f_1$  é combinação linear dos vetores  $f_2, f_3, f_4, f_5$ .



**Exemplo 2.4.** Escreva o vetor  $\overrightarrow{AD}$  como combinação linear de  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ .



**Solução:** Queremos encontrar  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tais que:

$$\overrightarrow{AD} = \lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC}. \quad (2.1)$$

Primeiramente vamos escolher convenientemente dois vetores  $i, j$  ortogonais e de norma 1 e vamos escrever todos os demais vetores em função desses (Figura 3.1). Escolheremos  $i = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$  e  $j$  como a rotação de  $i$  de um ângulo de 90 no sentido anti-horário.

Facilmente observamos que  $\overrightarrow{AB} = 3i$ .

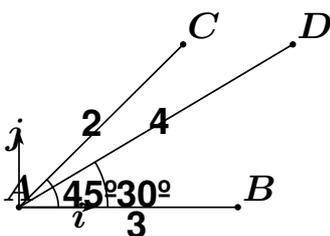


Fig. 2.4: Vetores  $i, j$

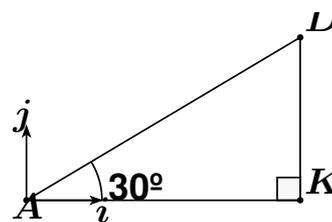


Fig. 2.5: Vetor AD

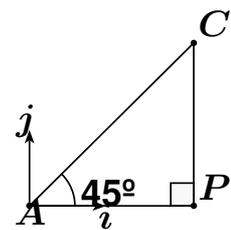


Fig. 2.6: Vetor AC

Observando a Figura 2.5 concluímos que  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD}$ . E por trigonometria do triângulo retângulo temos:

$$\overrightarrow{AK} = 4(\cos 30)i \text{ e } \overrightarrow{KD} = 4(\sin 30)j.$$

Dessa forma temos que  $\overrightarrow{AD} = 2\sqrt{3}i + 2j$ .

De modo análogo, observando o triângulo da Figura 2.6 concluimos que  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC}$ . Mas, novamente por trigonometria, temos que  $\overrightarrow{AP} = 2(\cos 45)i$  e  $\overrightarrow{PC} = 2(\sin 45)j$ . Logo  $\overrightarrow{AC} = \sqrt{2}i + \sqrt{2}j$ .

Voltando à equação (2.1) obtemos então:

$$2\sqrt{3}i + 2j = \lambda_1(3i) + \lambda_2(\sqrt{2}i + \sqrt{2}j).$$

Isolando  $i$  e  $j$  obtemos finalmente:

$$(2\sqrt{3} - 3\lambda_1 - \sqrt{2}\lambda_2)i + (2 - \sqrt{2}\lambda_2)j = 0$$

Como os vetores  $i, j$  são linearmente independentes, segue que:

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} - 3\lambda_1 - \sqrt{2}\lambda_2 = 0 \\ 2 - \sqrt{2}\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

E assim podemos concluir que  $\lambda_1 = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{3}$  e  $\lambda_2 = \sqrt{2}$ .

Finalmente:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{3}\overrightarrow{AB} + \sqrt{2}\overrightarrow{AC}.$$

□

### Definição 2.5.

- Um vetor  $v$  é dito linearmente dependente (LD) se  $v = 0$ .
- Os vetores  $v_1, \dots, v_n$  ( $n \geq 2$ ) são ditos linearmente dependentes (LD) se existe um  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que o

**vetor  $v_i$  seja combinação linear dos demais vetores, ou seja:**

$$v_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j,$$

**onde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ .**

**Definição 2.6.** Dizemos que os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são **linearmente independentes (LI)** se eles não são linearmente dependentes.

Temos a seguinte caracterização simples para a dependência linear de dois vetores. Essa caracterização será generalizada para um número maior de vetores na seção **2.1**.

**Proposição 2.7.** *Quaisquer dois vetores não nulos e não paralelos  $e_1$  e  $e_2$  são linearmente independentes.*

**Demonstração.** Por redução ao absurdo, suponha que os vetores  $e_1$  e  $e_2$  são linearmente dependentes.

Então pela definição de dependência linear temos que  $e_1 = \lambda e_2$  ou  $e_2 = \theta e_1$ . Onde, pelo **Corolário 1.10**, temos que  $e_1$  e  $e_2$  são paralelos, o que contradiz nossas hipóteses.

Logo  $e_1$  e  $e_2$  são linearmente independentes.

A partir da definição anterior podemos provar a seguinte caracterização:

**Proposição 2.8.** Os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são linearmente dependentes se e somente se existem  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  não todos nulos, tal que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0.$$

**Demonstração.** Para  $n = 1$  temos que se  $v$  é linearmente dependente então  $v = 0$  daí para  $\lambda = 1$ , por exemplo temos  $\lambda v = 0$ . Reciprocamente, se  $\lambda v = 0$  para algum  $\lambda \neq 0$  pela definição de multiplicação por escalar segue que  $v = 0$ , logo  $v$  é linearmente dependente.

Para  $n \geq 2$ , suponha que os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são linearmente dependentes. Sem perda de generalidade suponha que

$$v_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i v_i,$$

para  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ .

Somando  $(-1)v_1$  a ambos os lados da igualdade chegamos a:

$$(-1)v_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i v_i = 0.$$

Logo  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$  com  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  não todos nulos (pois  $\lambda_1 = -1$ ).

Reciprocamente, considere que existem  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  não todos nulos tal que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0.$$

Suponha, sem perda de generalidade que  $\lambda_1 \neq 0$ . Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $\frac{1}{\lambda_1}$  e isolando  $v_1$  chegamos a:

$$v_1 = \sum_{i=2}^n -\frac{\lambda_i}{\lambda_1} v_i.$$

Ou seja, o vetor  $v_1$  é combinação linear dos demais.

A contrapositiva da proposição anterior nos leva ao seguinte teorema:

**Teorema 2.9.** *Os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são linearmente independentes se e somente se*

$$\left( \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \right) \implies (\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0)$$

Ou seja, a única relação linear entre os vetores é a trivial, ou ainda, o vetor  $0$  pode ser escrito de modo único como combinação dos vetores  $v_i$  com  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Desse teorema é imediata a unicidade da representação de um vetor como combinação linear de vetores linearmente independentes:

**Proposição 2.10.** *Seja  $u$  um vetor que possa ser escrito como combinação linear do conjunto de vetores linearmente independente  $\{v_i\}_{i=1, \dots, n}$*

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

*então essa representação é única.*

**Demonstração.** Dadas duas representações de  $u$ , i.e, suporemos que  $u$  possa ser escrito como combinação linear de  $\{v_i\}_{i=1, \dots, n}$  de duas maneiras distintas:

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \tag{2.2}$$

e

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i \quad (2.3)$$

mostraremos que essas representações são iguais, isto é que  $\lambda_i = \lambda'_i$ .

Subtraindo a equação 2.3 da equação 2.3 obtemos:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^n \lambda'_i v_i = 0$$

e logo

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda'_i) v_i = 0$$

Finalmente, como os vetores  $\{v_i\}_{i=1, \dots, n}$  são linearmente independentes, temos que para cada  $i$ ,  $(\lambda_i - \lambda'_i) = 0$ , e assim  $\lambda_i = \lambda'_i$ . Dessa forma, temos que a representação é única.

A partir do Teorema 2.9 e da Proposição 2.8, estudar a dependência linear dos vetores  $v_1, \dots, v_n$  é uma tarefa simples. Basta estudar a equação:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0,$$

com incógnitas  $\lambda_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ). Se tal equação admitir apenas a solução  $\lambda_i = 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , então os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são linearmente independentes. Caso contrário, são linearmente dependentes.

**Exemplo 2.11.** *Suponha que os vetores  $u, v, w$  são linearmente independentes. Mostre que os vetores  $u + v, u - v$  e  $u + v + w$  também são linearmente independentes.*

**Solução:** Para demonstrar que os vetores  $u+v$ ,  $u-v$  e  $u+v+w$  são linearmente independentes, vamos estudar a equação:

$$au + v + bu - v + cu + v + w = 0$$

Expandindo e agrupando temos:

$$(a + b + c)u + (a - b + c)v + cw = 0$$

Como  $u, v, w$  são linearmente independentes temos que:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior temos que  $a = b = c = 0$ .

Consequentemente temos que

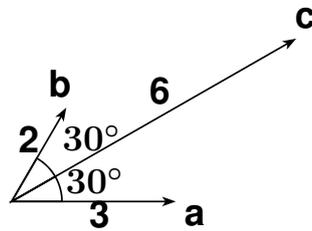
$$au + v + bu - v + cu + v + w = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$$

e logo os vetores  $u + v$ ,  $u - v$  e  $u + v + w$  são linearmente independentes.  $\square$

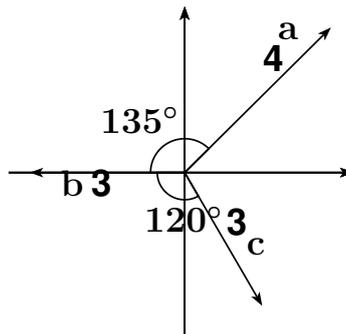
## Exercícios

**Ex. 2.1** — Dados os vetores  $a = \overrightarrow{OA}$ ,  $b = \overrightarrow{OB}$ ,  $c = \overrightarrow{OC}$  então se  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}c$  e  $\overrightarrow{BE} = \frac{5}{6}a$ . Escreva o vetor  $\overrightarrow{DE}$  em função de  $a, b, c$ .

**Ex. 2.2** — Dados os vetores  $a, b$  e  $c$  como na figura abaixo. Escreva o vetor  $c$  como combinação de  $a$  e  $b$ .



**Ex. 2.3 —** Dados os vetores  $a$ ,  $b$  e  $c$  como na figura abaixo. Escreva o vetor  $c$  como combinação de  $a$  e  $b$ .



**Ex. 2.4 —** Em um triângulo  $ABC$  o ponto  $M$  é tal que  $3\overrightarrow{BM} = 7\overrightarrow{MC}$ . Escreva o vetor  $\overrightarrow{AM}$  em função de  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ .

**Ex. 2.5 —** Se  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{0}$ , prove que os vetores  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OC}$  são linearmente dependentes para qualquer ponto  $O$ .

**Ex. 2.6 —** Suponha que os vetores  $u, v, w$  são linearmente independentes. Mostre que os vetores  $u+v$ ,  $-u-v+w$  e  $u+v+w$  também são linearmente independentes.

**Ex. 2.7 —** Suponha que os vetores  $u, v, w$  são linearmente independentes e seja

$$t = au + bv + cw.$$

Mostre que os vetores  $u + t, u + v$  e  $w + t$  são linearmente independentes se e somente se  $a + b + c \neq -1$ .

**Ex. 2.8 — Mostre que:**

- Se os vetores  $u, v$  são linearmente dependentes então os vetores  $u, v, w$  são linearmente dependentes.
- Se os vetores  $u, v, w$  são linearmente independentes então os vetores  $u, v$  são linearmente independentes.

**Ex. 2.9 —** Dados  $a, b$  vetores linearmente independentes, sejam  $\overrightarrow{OA} = a + 2b, \overrightarrow{OB} = 3a + 2b$  e  $\overrightarrow{OC} = 5a + xb$ . Determine  $x$  de modo que os vetores  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{BC}$  sejam linearmente dependentes.

**Ex. 2.10 —** Dado o tetraedro  $OABC$ , se denotarmos  $a = \overrightarrow{OA}$ ,  $b = \overrightarrow{OB}$  e  $c = \overrightarrow{OC}$ ,  $M$  o ponto médio de  $AB$ ,  $N$  o ponto médio de  $BC$  e  $Q$  o ponto médio de  $AC$  e  $P$  o ponto tal que  $\overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ . Calcule em função de  $a, b, c$ :

- $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}$
- $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PQ}$

## Caracterização Geométrica de Dependência e Independência Linear

Nas seções anteriores apresentamos uma série de caracterizações algébricas da dependência e independência linear de vetores de  $\mathbb{V}^2$  e  $\mathbb{V}^3$ , esses conceitos podem também ser carac-

terizados geometricamente, como nos mostra o enunciado do teorema a seguir:

**Teorema 2.12. (Caracterização Geométrica da Dependência e Independência Linear)** Para vetores em  $\mathbb{V}^2$  e  $\mathbb{V}^3$  temos:

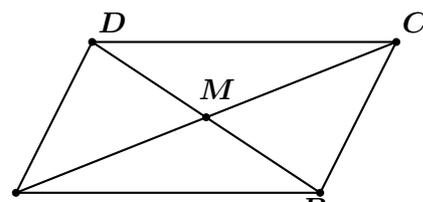
- 1 Um vetor  $v$  é linearmente dependente se e somente se  $v = 0$ .
- 2 Dois vetores  $u, v$  são linearmente dependentes se e somente se  $u$  e  $v$  são paralelos.
- 3 Três vetores  $u, v, w$  são linearmente dependentes se e somente se  $u, v$  e  $w$  são coplanares.
- 4 Quatro ou mais vetores são sempre linearmente dependentes.

A demonstração dessa teorema será feito na próxima seção após introduzirmos o conceito de base. Antes disso, porém, ilustraremos como utilizar essa caracterização para resolver problemas geométricos.

**Exemplo 2.13.** *Mostre que as diagonais de um paralelogramo se intersectam nos seus pontos médios.*

**Solução:**

Considere um paralelogramo  $ABCD$  de diagonais  $AC$  e  $BD$ . Seja  $M$  o ponto de intersecção de  $AC$  e  $BD$  (ponto que, a



*priori*, não é necessariamente ponto médio das diagonais).

Queremos mostrar que:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$$

Como  $A, M$  e  $C$  são colineares temos:

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC}. \quad (2.4)$$

Da mesma forma, como  $B, M$  e  $D$  são colineares:

$$\overrightarrow{BM} = \theta\overrightarrow{BD}. \quad (2.5)$$

Como  $ABM$  é um triângulo, temos:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}.$$

Usando então as equações (2.4) e (2.5) na equação acima segue que:

$$\lambda\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \theta\overrightarrow{BD}.$$

Escrevendo todos os vetores da equação acima em função de  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AD}$  (dois vetores não paralelos) obtemos:

$$\lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} + \theta(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).$$

Ou, reescrevendo convenientemente:

$$\lambda\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AD} = (1 - \theta)\overrightarrow{AB} + \theta\overrightarrow{AD}.$$

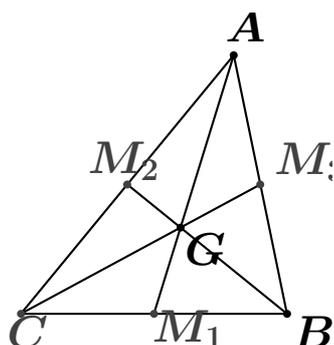
Usando então que  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AD}$  são linearmente independentes, segue da Proposição 2.10 que:

$$\begin{cases} \lambda = 1 - \theta \\ \lambda = \theta \end{cases}$$

donde temos  $\lambda = \theta = \frac{1}{2}$  como queríamos. □

**Observação 2.14.** Note que nas equações (2.4) e (2.5) usamos letras distintas para os escalares que multiplicam  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , pois, à princípio, não sabíamos se a proporção que  $AM$  guardava em relação a  $AC$  é a mesma que  $BM$  guardava em relação a  $BD$ .

**Exemplo 2.15.** Sejam  $M_1, M_2, M_3$  os pontos médios dos lados  $AB, BC$  e  $CA$  do triângulo  $\triangle ABC$ . Seja  $G$  o ponto de intersecção das medianas  $AM_1$  e  $BM_2$ . Mostre que  $G$  se divide  $AM_1$  e  $BM_2$  na razão 2 para 1.



**Solução:** Para mostrar que as medianas  $AM_1$  e  $BM_2$  se intersectam num ponto  $G$  que divide  $AM_1$  e  $BM_2$  na razão 2 para 1, devemos provar que:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_1} \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_2}.$$

De modo a tornar a notação da resolução mais limpa, chame-mos os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  de  $a$  e  $b$ , respectivamente. Observe que, como os vetores  $a, b$  não são paralelos pelo 2.12 eles são linearmente independentes. E expressaremos todos os demais vetores da figura em função desses vetores. Fixada a notação, passemos a cada uma das etapas:

Para estudarmos a intersecção  $G$  das medianas  $AM_1$  e  $BM_2$ , expressaremos os vetores  $\overrightarrow{AM_1}$  e  $\overrightarrow{BM_2}$  em função de  $a, b$ .

Observamos inicialmente que pela definição de subtração que  $\overrightarrow{CB} = a - b$ . E assim:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM_1} &= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ \overrightarrow{BM_2} &= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -a + \frac{1}{2}b\end{aligned}$$

Como os pontos  $A, G$  e  $M_1$  são colineares temos:

$$\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AM_1} = \frac{\lambda}{2}(a + b).$$

Analogamente:

$$\overrightarrow{BG} = \alpha \overrightarrow{BM_2} = \alpha \left(-a + \frac{1}{2}b\right).$$

Observamos que, nesse estágio, não sabemos ainda que  $G$  divide os segmentos  $AM_1$  e  $BM_2$  na mesma proporção. Assim sendo, usamos letras diferentes ( $\lambda$  e  $\alpha$ ) para os escalares das equações acima.

É fácil ver que uma equação envolvendo os vetores  $\overrightarrow{AG}$  e  $\overrightarrow{BG}$  é:

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}.$$

Donde temos:

$$\alpha \left(-a + \frac{1}{2}b\right) = -a + \frac{\lambda}{2}(a + b).$$

Isolando os vetores  $a, b$  temos então:

$$a \left(-\alpha + 1 - \frac{\lambda}{2}\right) + b \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) = 0.$$

Como  $a, b$  são linearmente independentes segue então que:

$$\begin{cases} -\alpha + 1 - \frac{\lambda}{2} = 0 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0 \end{cases}$$

Desse sistema obtemos então:

$$\alpha = \lambda = \frac{2}{3}.$$

Ou seja,  $G$  divide tanto o segmento  $AM_1$  quanto o segmento  $BM_2$  na razão 2 para 1.  $\square$

**Exemplo 2.16.** *Usando a mesma nomenclatura do exemplo anterior, prove que as três medianas do triângulo  $\triangle ABC$  têm um único ponto comum,  $G$ , que divide as três medianas  $AM_1$ ,  $BM_2$  e  $CM_3$  na razão 2 para 1.*

*$G$  é conhecido como baricentro do triângulo.*

$\triangleleft$

**Solução:** Para mostrar a afirmação acima nos falta apenas provar que  $C, G$  e  $M_3$  são colineares e que  $G$  divide  $CM_3$  na razão 2 para 1. Desse modo, nos basta provar a igualdade:

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_3}.$$

Mostremos então que a equação

$$\overrightarrow{CG} = \beta\overrightarrow{CM_3}$$

com incógnita em  $\beta$  admite solução real.

Continuemos, como na resolução do exemplo anterior, denotando os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  por  $a$  e  $b$ , respectivamente. Escrevamos  $\overrightarrow{CG}$  e  $\overrightarrow{CM_3}$  em função de  $a, b$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG} &= \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b, \\ \overrightarrow{CM_3} &= \overrightarrow{AM_3} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a - b.\end{aligned}$$

Temos assim a seguinte equação:

$$\left(\frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b\right) = \beta \left(\frac{1}{2}a - b\right).$$

Isolando  $a, b$  temos:

$$a \left(\frac{1}{3} - \frac{\beta}{2}\right) + b \left(-\frac{2}{3} + \beta\right) = 0$$

Como  $a, b$  são linearmente independentes:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{\beta}{2} = 0 \\ -\frac{2}{3} + \beta = 0 \end{cases}$$

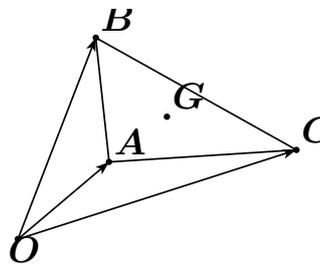
Tal sistema admite uma solução:

$$\beta = \frac{2}{3}.$$

Dessa forma temos que os pontos  $C, G$  e  $M_3$  são colineares e que  $G$  divide  $CM_3$  na razão 2 para 1.  $\square$

**Exemplo 2.17.** *Dado um triângulo  $\Delta ABC$  e  $O$  um ponto qualquer. Então o baricentro  $G$  do triângulo  $\Delta ABC$  é dado por:*

$$G = O + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$



**Solução:**

Seja

$$P = O + \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}.$$

Como  $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$  e  $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$ , temos que:

$$P = O + \frac{\vec{OA} + \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{OA} + \vec{AC}}{3}$$

que simplificando fica:

$$P = O + \vec{OA} + \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3}$$

E como  $A = O + \vec{OA}$ , a expressão anterior é equivalente a:

$$P = A + \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3}$$

No exercício 2.16 já provamos que  $\vec{AG} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3}$  ou na forma de soma de ponto com vetor que:

$$G = A + \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3}$$

E assim temos que  $G = P$ , ou seja, demonstramos que:

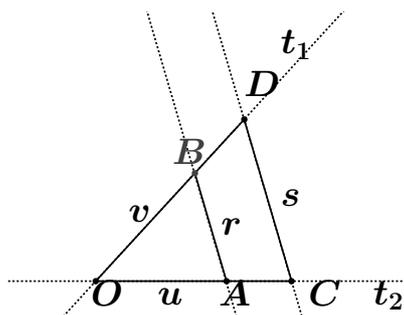
$$G = O + \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}.$$

□

**Exemplo 2.18.** Dado as retas  $r$  e  $s$  e um ponto  $O$  não pertencente as retas. Dadas duas retas  $t_1$  e  $t_2$ , que interceptam  $r$  e  $s$  nos pontos  $A, B, C, D$  conforme a figura abaixo. Mostre os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são paralelos se e somente se

$$\frac{\|OA\|}{\|AC\|} = \frac{\|OB\|}{\|BD\|}.$$

◁



### Solução:

Como os pontos  $O, A, B$  não são colineares, os vetores  $u = \overrightarrow{OA}$  e  $v = \overrightarrow{OB}$  não são paralelos e assim são linearmente independentes. Como os segmentos  $\overline{AB}, \overline{CD}$  são paralelos temos que

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$$

Como  $\overrightarrow{OC}$  é paralelo à  $\overrightarrow{OA}$  temos que

$$\overrightarrow{OC} = xu$$

De modo análogo temos que

$$\overrightarrow{OD} = yv$$

E assim

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = yv - xu$$

Consequentemente

$$\overrightarrow{AB} = v - u = \lambda(yv - xu)$$

e logo

$$(1 - \lambda x)u + (\lambda y - 1)v = 0$$

Como os vetores  $u, v$  são linearmente independentes, temos que

$$\begin{cases} 1 - \lambda x = 0 \\ \lambda y - 1 = 0 \end{cases}$$

e logo  $x = y = \frac{1}{\lambda}$ .

E finalmente temos que

$$\frac{\|OA\|}{\|AC\|} = \frac{\|OB\|}{\|BD\|}.$$

Faremos agora a recíproca. Se

$$\frac{\|OA\|}{\|AC\|} = \frac{\|OB\|}{\|BD\|}$$

então

$$\frac{\|AC\|}{\|OA\|} = \frac{\|BD\|}{\|OB\|}.$$

e assim

$$\frac{\|OA\| + \|AC\|}{\|OA\|} = \frac{\|OB\| + \|BD\|}{\|OB\|}.$$

$$\Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$$

e assim igualando a  $k$ , temos que  $\frac{\|OC\|}{\|OA\|} = \frac{\|OD\|}{\|OB\|} = k$

Como os segmentos  $OC$  e  $OA$  são paralelos temos que  $\vec{OC} = k\vec{OA}$ . De modo similar temos que  $\vec{OD} = k\vec{OB}$

E assim

$$\vec{AB} = \vec{OA} - \vec{OB}$$

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = k(\vec{OA} - \vec{OB})$$

Consequentemente os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{CD}$  são paralelos.

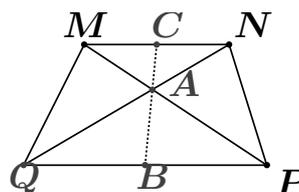
## Exercícios

Ex. 2.11 — Sejam  $B$  um ponto no lado  $ON$  do paralelogramo  $AMNO$  e  $C$  um ponto na diagonal  $OM$  tais que

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{n} \overrightarrow{ON}$$

e  $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{1+n} \overrightarrow{OM}$ . Prove que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão na mesma reta.

Ex. 2.12 — Dado um paralelogramo  $MNPQ$ , seja  $A$  o ponto de intersecção das diagonais e sejam  $B$  e  $C$  os pontos médios dos lados opostos  $MN$  e  $PQ$ . Prove que se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão sobre a mesma reta então  $MNPQ$  é um trapézio (um trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos).

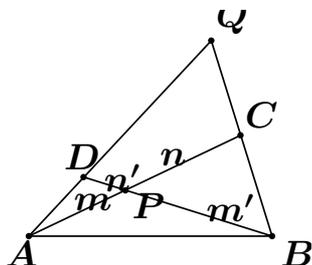


Ex. 2.13 — Os pontos  $P$  e  $Q$  dividem os lados  $CA$  e  $CB$  de um triângulo  $\Delta ABC$  nas razões

$$\frac{x}{1-x}, \frac{y}{1-y}$$

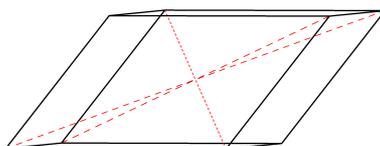
respectivamente. Prove que se  $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{AB}$  então  $x = y = \lambda$ .

**Ex. 2.14** — As diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  de um quadrilátero  $ABCD$  se interceptam no ponto  $P$ , que divide o segmento  $\overline{AC}$  na razão  $m : n$  e o segmento  $\overline{BD}$  na razão  $m' : n'$ . Dado  $Q$  o ponto de intersecção das retas contendo os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ . Encontre a razão  $AQ : DQ$  e  $BQ : CQ$ .



$$\frac{\|AQ\|}{\|DQ\|} = \frac{(n + m)m'}{(n' + m')n} \quad \frac{\|BQ\|}{\|CQ\|} = \frac{(n' + m')m}{(n + m)n'}$$

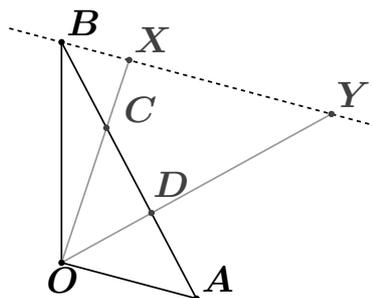
**Ex. 2.15** — Chama-se diagonal de um paralelepípedo a um segmento ligando dois vértices não pertencentes a uma mesma face. Demostre que as diagonais de um paralelepípedo dividem-se mutuamente ao meio.



**Ex. 2.16** — Dado um triângulo  $\Delta OAB$ , sejam  $C$  e  $D$  pontos sobre o lado  $AB$  dividindo esse segmento em três partes congruentes. Por  $B$  traçamos a reta paralela a  $OA$ , e sejam  $X$  e  $Y$  a intersecção dessa reta com as retas ligando  $OC$  e  $OD$  respectivamente.

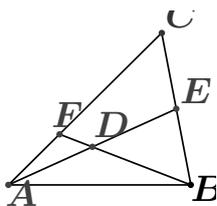
a) Expresse os vetores  $\overrightarrow{OX}$  e  $\overrightarrow{OY}$  em função de  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ .

- b) Determine as razões nas quais  $X$  divide  $BY$ ,  $C$  divide a  $OX$  e  $D$  divide a  $OY$ .



**Ex. 2.17** — Num quadrilátero  $ABCD$ , o  $Q$  o ponto de intersecção das diagonais  $AC$  e  $BD$  se interceptam dividem as diagonais nas razões  $\frac{4}{3}$  e  $\frac{2}{3}$  respectivamente. Em qual razão divide o ponto  $P$  determinado pelas intersecção os lados  $AB$  e  $CD$  a estes segmentos.

**Ex. 2.18** — Dado o ponto médio da mediana  $\overline{AE}$  do triângulo  $\triangle ABC$  se a reta  $BD$  corta o lado  $\overline{AC}$  no ponto  $F$ , determine a razão que  $F$  divide  $\overline{AC}$



Seja  $b = \overrightarrow{AB}$  e  $c = \overrightarrow{AC}$ , então temos:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AE}}{2} \mathbf{e} \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

e logo:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{4}$$

Também temos que:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC}}{1 + \lambda}$$

Como  $F$ ,  $D$  e  $B$  são colineares então:

$$\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AD} + (1 - \alpha) \overrightarrow{AB}$$

e assim

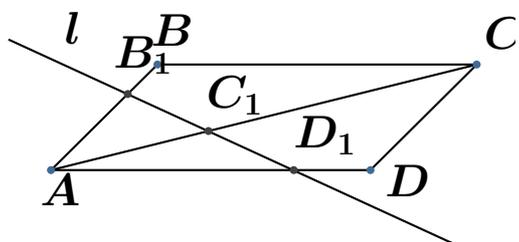
$$\overrightarrow{AF} = (1 - \frac{3}{4}\alpha) \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\alpha \overrightarrow{AC}$$

E conseqüentemente  $1 - \frac{3}{4}\alpha = 0$  e  $\frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{1 + \lambda}$  e assim  $\lambda = 2$ .

Logo  $F$  divide o segmento  $\overline{AC}$  na razão  $1 : 2$ .

**Ex. 2.19** — Dado um paralelogramo  $ABCD$ . Seja  $l$  uma linha reta que intercepta  $AB$ ,  $AC$  e  $AD$  nos pontos  $B_1$ ,  $C_1$  e  $D_1$  respectivamente. Prove que se  $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \overrightarrow{AD}$  e  $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3 \overrightarrow{AC}$  então:

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$



Assuma que  $\overrightarrow{AB} = a$ ,  $\overrightarrow{AD} = b$  e  $\overrightarrow{AC} = a + b$ . Então  $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 a$ ,  $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 b$  e  $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3 (a + b)$

Como os três pontos  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  estão na mesma reta então:

$$\overrightarrow{B_1C_1} = k \overrightarrow{B_1D_1} \tag{2.6}$$

Mas  $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AB_1} = (\lambda_3 - \lambda_1) a + \lambda_3 b$

e  $\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AB_1} = -\lambda_1 a + \lambda_2 b$

Substituindo as expressões acima em 2.6, obtemos:

$$(\lambda_3 - \lambda_1) a + \lambda_3 b = -k \lambda_1 a + k \lambda_2 b$$

Isolando  $a, b$ :

$$a(\lambda_3 - \lambda_1 + k\lambda_1) + b(\lambda_3 - k\lambda_2) = 0$$

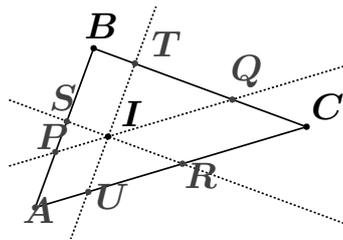
E logo  $\lambda_3 - \lambda_1 + k\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_3 - k\lambda_2 = 0$ .

Da segunda equação obtemos  $k = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$ . Substituindo  $k$  na primeira equação e dividindo a mesma por  $\lambda_1\lambda_3$  segue

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}.$$

**Ex. 2.20** — Dado um triângulo  $\triangle ABC$  e  $I$  um ponto interior ao triângulo. Passando por  $I$ , traçamos os segmentos  $\overline{PQ}, \overline{RS}, \overline{TU}$  paralelos respectivamente a  $\overline{AB}, \overline{BC}$  e  $\overline{CA}$  respectivamente. (Com os pontos  $P, S$  em  $\overline{AC}$ ,  $T, Q$  em  $\overline{BC}$  e  $U, R$  em  $\overline{AB}$ ). Demonstre que

$$\frac{\|PQ\|}{\|AB\|} + \frac{\|RS\|}{\|BC\|} + \frac{\|TU\|}{\|CA\|} = 2$$



## 2 Bases

Dizemos que um conjunto de vetores  $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$  gera o espaço (um dado plano) se qualquer vetor  $w$  do espaço (do plano) puder ser escrito como combinação linear dos vetores  $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$

$$w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

**Proposição 2.19.** *Dois vetores não paralelos de  $\mathbb{V}^2$  geram  $\mathbb{V}^2$ .*

*Ou seja, dados um vetor  $f \in \mathbb{V}^2$  e dois vetores não nulos e não paralelos  $e_1$  e  $e_2$  de  $\mathbb{V}^2$  temos que existem  $m$  e  $n \in \mathbb{R}$  tais que:*

$$f = me_1 + ne_2.$$

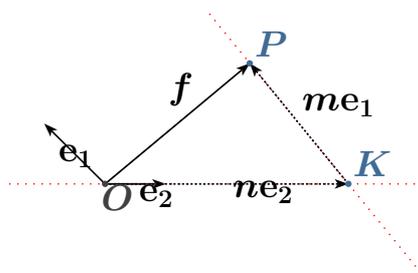


Fig. 2.7: Dois vetores não paralelos geram o plano

**Demonstração.** Considere um ponto arbitrário  $O$  do espaço. Primeiramente observe que  $f$  é paralelo ao plano determinado pelo ponto  $O$  e pelos vetores  $u, v$ .

Considere o representante de  $f$  que começa no ponto  $O$  e termina em  $P$ , i.e., seja  $f = \overrightarrow{OP}$ . Considere a reta paralela a  $u$  que passa pelo ponto  $P$  e a reta paralela a  $v$  que passa por  $O$ . Essas retas se encontram num ponto  $K$  (Por quê?). É fácil ver, então, que  $f = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$ .

Como  $\overrightarrow{KP}$  é paralelo a  $u$ , tal vetor é um escalar vezes  $u$ , ou seja,  $\overrightarrow{KP} = \lambda_1 u$ . De maneira análoga  $\overrightarrow{OK} = \lambda_2 v$ . Desta forma temos:

$$f = \lambda_1 u + \lambda_2 v.$$

**Proposição 2.20.** *Dados  $f$ , um vetor qualquer de  $\mathbb{V}^3$ , e  $e_1, e_2, e_3$  três vetores não nulos, não paralelos entre si e não paralelos ao mesmo plano, temos que existem  $l, m, n \in \mathbb{R}$  tais que:*

$$f = le_1 + me_2 + ne_3.$$

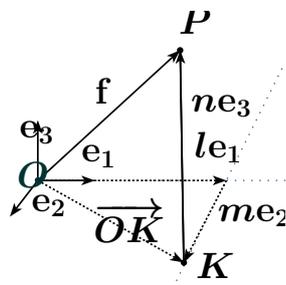


Fig. 2.8: Três vetores não coplanares geram espaço

**Demonstração.** A demonstração é análoga a da Proposição 2.19.

Começamos escolhendo representantes dos vetores  $f, u, v, w$  que começam no ponto  $O$  (veja a figura 2.8). Seja então a reta paralela a  $w$  passando por  $P$ . Essa reta intercepta o plano determinado por  $u, v$  no ponto  $K$ .

O vetor  $\overrightarrow{OK}$  estando no mesmo plano que  $u, v$ , pode ser escrito como combinação linear desses vetores:

$$\overrightarrow{OK} = lu + mv$$

O vetor  $\overrightarrow{KP}$  é paralelo a  $w$ , i.e.,  $\overrightarrow{KP} = nw$ . Finalmente como  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KP}$  temos que:

$$f = lu + mv + nw.$$

**Proposição 2.21.** *Quaisquer três vetores  $e_1, e_2, e_3$  não coplanares são linearmente independentes.*

**Demonstração.** Suponha que  $e_1, e_2, e_3$  são linearmente dependentes. Temos então que um dos vetores é combinação linear dos demais.

Suponha, sem perda de generalidade, que  $e_1 = \lambda e_2 + \theta e_3$ . Segue que o vetor  $e_1$  é paralelo ao plano determinado pelo

ponto  $O$  e pelos vetores  $e_2$  e  $e_3$  (Por quê?). Donde temos que os vetores  $e_1, e_2, e_3$  seriam coplanares.

**Definição 2.22.** *Uma base para o espaço (um dado plano) é um conjunto ordenado de vetores  $\{v_i\}$  linearmente independentes e que geram o espaço (o plano).*

**Teorema 2.23 (Teorema da Base para o Plano).** *Qualquer vetor  $f \in \mathbb{V}^2$  pode ser escrito de maneira única como combinação linear de dois vetores não nulos e não paralelos  $e_1$  e  $e_2$  de  $\mathbb{V}^2$ , isto é:*

$$f = me_1 + ne_2$$

*com  $m$  e  $n \in \mathbb{R}$  únicos.*

Ou seja, dois vetores não nulos e não paralelos de  $\mathbb{V}^2$  formam uma base para  $\mathbb{V}^2$ .

**Demonstração.** Consequência imediata das Proposições 2.19, 2.10 e 2.7.

**Corolário 2.24.** *Toda base para o plano tem exatamente dois vetores. Ou seja, o plano tem dimensão 2.*

**Teorema 2.25 (Teorema da Base para o Espaço).** *No espaço tridimensional, sejam três vetores não nulos  $e_1, e_2, e_3$ , não paralelos entre si e não paralelos ao mesmo plano. Então qualquer vetor  $f$  no espaço pode ser escrito como combinação*

**linear única de  $e_1, e_2, e_3$ , isto é:**

$$f = le_1 + me_2 + ne_3$$

**com  $l, m, n \in \mathbb{R}$ .**

**Ou seja, três vetores não nulos, não paralelos entre si e não paralelos ao mesmo plano formam uma base para  $\mathbb{V}^3$ ,**

***Demonstração.* A demonstração do Teorema segue diretamente das Proposições **2.20, 2.10 e 2.21.****

**Corolário 2.26. *Toda base para o espaço tem exatamente três vetores. Ou seja, o espaço  $\mathbb{V}^3$  tem dimensão 3.***

**Intimamente relacionado ao conceito de base está o conceito de dimensão de um plano/espaço. A dimensão é definida como o número de vetores numa base, ou seja, o número de vetores independentes a partir do qual podemos obter todos os outros. Como provamos o plano tem dimensão 2 e o espaço tem dimensão 3.**

**Agora demonstraremos o teorema de caracterização geométrica da dependência e independência linear, que enunciamos na seção anterior:**

**Teorema 2.27. (*Caracterização Geométrica da Dependência e Independência Linear*) Para vetores em  $\mathbb{V}^2$  e  $\mathbb{V}^3$  temos:**

- 1 Um vetor  $v$  é linearmente dependente se e somente se  $v = 0$ .**

- 2** *Dois vetores  $u, v$  são linearmente dependentes se e somente se  $u$  e  $v$  são paralelos.*
- 3** *Três vetores  $u, v, w$  são linearmente dependentes se e somente se  $u, v$  e  $w$  são coplanares.*
- 4** *Quatro ou mais vetores são sempre linearmente dependentes.*

**Demonstração.** **1** A demonstração segue de imediato a partir Definição **2.5**.

- 2** Se  $u$  é paralelo a  $v$ . Pelo Corolário **1.10**, ou  $u = \lambda v$  ou  $v = \theta u$  ( $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$ ). Logo, como um dos vetores é necessariamente combinação linear do outro, segue que  $u, v$  são linearmente dependentes.

A recíproca é a contrapositiva da Proposição **2.7**.

- 3** Se três vetores  $u, v, w$  são coplanares temos dois casos a considerar ou  $u, v$  são paralelos, ou  $u, v$  não são paralelos. Se  $u, v$  são paralelos, pela argumentação acima, um dos vetores é combinação linear do outro. Suponha, sem perda de generalidade, que  $u = \lambda v$ . Temos então que:

$$u = \lambda v + 0w.$$

Logo  $u$  é combinação linear dos demais vetores e, portanto,  $u, v, w$  são linearmente dependentes.

Se  $u, v, w$  são coplanares e  $u, v$  não são paralelos, pelo Teorema ?? temos que

$$w = \lambda_1 u + \lambda_2 v,$$

para  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Assim, os vetores  $u, v, w$  são linearmente dependentes.

A recíproca segue da Proposição 2.21.

4 Considere  $n$  vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , com  $n \geq 4$ . Duas coisas podem ocorrer: ou os  $v_1, v_2, v_3$  são coplanares ou não o são.

Se  $v_1, v_2, v_3$  são coplanares, um dos vetores é combinação linear dos demais. Suponha  $v_1 = \lambda v_2 + \theta v_3$ . Segue que:

$$v_1 = \lambda v_2 + \theta v_3 + \sum_{i=4}^n 0v_i.$$

Logo  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são linearmente dependentes.

Caso  $v_1, v_2, v_3$  não sejam coplanares, pelo Teorema ??,

$$v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3,$$

para  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ . Daí temos:

$$v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \sum_{i=5}^n 0v_i.$$

Logo,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são linearmente dependentes.

## Exercícios

Ex. 2.1 — Prove que:

a)  $(P + u) - u = P$

b)  $P + u = Q + v$  então  $u = PQ + v$

c)  $P + \overrightarrow{PQ} = Q$

**Ex. 2.2 —** Mostre que os vetores  $u, v, w$  são coplanares se, e somente se, um deles é combinação linear dos outros dois.

**Ex. 2.3 —** Prove que se o conjunto de vetores  $\{u, v\}$  é uma base para o plano, então o conjunto  $\{u + v, u - v\}$  também é uma base para o plano.

**Ex. 2.4 —** Prove que se o conjunto de vetores  $\{u, v, w\}$  formam uma base para o espaço, então o conjunto  $\{u + v, u - v, w - 2u\}$  também formam uma base para o espaço.

**Ex. 2.5 —** Dado um tetraedro  $ABCD$  explique por que os vetores  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  formam uma base para o espaço.

**Ex. 2.6 —** Descreva uma base para os planos  $xy, yz$  e  $xz$ .

**Ex. 2.7 —** Descreva uma base diferente da anterior para os planos  $xy, yz$  e  $xz$ .

**Ex. 2.8 —** Prove que as diagonais de um paralelogramo se dividem mutuamente ao meio.

**Ex. 2.9 —** Sendo  $A$  e  $B$  dois pontos, mostrar que  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$

**Ex. 2.10 —** Dados  $A, B$  dois pontos distintos e  $\lambda$  um número real, Determine vetorialmente o ponto  $M$  no segmento  $AB$  tal que  $\|AM\| = \lambda MB$ .

$$M = A + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \overrightarrow{AB}$$

**Ex. 2.11** — Seja  $ABCD$  um quadrilátero. Se  $E$  é o ponto médio do lado  $AB$  e  $F$  é o ponto médio do lado oposto  $DC$ , prove que  $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ .

**Ex. 2.12** — Seja  $G$  o baricentro (ou seja o ponto de encontro das medianas) do triângulo  $ABC$ . Prove que  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ .

**Ex. 2.13** — Prove que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo as bases, e sua medida é a semi-soma das medidas das bases.

**Ex. 2.14** — Prove que existe um único ponto comum as bissetrizes internas de um triângulo e que esse ponto, conhecido como incentro do triângulo é interior a ele.

**Ex. 2.15** — Dado  $ABCD$  um tetraedro, seja  $M$  o ponto de encontro das medianas do triângulo  $ABC$ . Exprima o vetor  $\overrightarrow{DM}$  em função dos vetores  $\overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{DB}$  e  $\overrightarrow{DC}$ .

**Ex. 2.16** — Prove que se os pontos  $A, B, C$  formam um triângulo equilátero então os pontos  $A + v, B + v, C + v$  formam um triângulo equilátero para qualquer  $v$ .

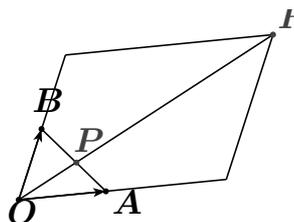
**Ex. 2.17** — Dado  $ABCD$  um quadrilátero, e  $O$  um ponto qual-

quer e seja  $P$  o ponto médio do segmento que une os pontos médios das diagonais  $AC$  e  $BD$ . Prove que

$$P = O + \frac{1}{4} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$$

**Ex. 2.18** — Demostre que o baricentro de um triângulo, é também o baricentro do triângulo cujos vértices são pontos que dividem os lados do primeiro na mesma razão.

**Ex. 2.19** — Mostre que dados os vetores  $m\vec{OA}$  e  $n\vec{OB}$ , sua soma é igual a  $(n + m)\vec{OP}$ , sendo  $P$  o ponto de intersecção do segmento  $AB$  com a reta  $OR$ , onde  $R = O + m\vec{OA} + n\vec{OB}$ .



**Ex. 2.20** — Dado  $O$  o circuncentro e  $H$  o ortocentro de um triângulo  $\Delta ABC$ , mostre que:

a)  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$

b)  $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$

### 3 Exercícios Complementares

#### Exercícios

**Ex. 2.1** — O objetivo desse exercício é definir formalmente quando dois segmentos orientados possuem o mesmo sentido. Dados dois segmentos orientados de reta e paralelos  $AB$  e  $CD$ . Dizemos que esses segmentos possuem o mesmo sentido se os segmentos  $AC$  e  $BD$  não se intersectam. Segmentos que não possuem o mesmo sentido são ditos de sentidos opostos

- Mostre que se os segmentos  $AB$  e  $CD$  possuem o mesmo sentido e  $CD$  e  $EF$  possuem o mesmo sentido então  $AB$  e  $EF$  possuem o mesmo sentido.
- Mostre que se os segmentos  $AB$  e  $CD$  possuem sentido opostos e  $CD$  e  $EF$  possuem sentidos opostos então  $AB$  e  $EF$  possuem o mesmo sentido.

**Ex. 2.2** — Prove que se  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$  então  $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$ .

**Ex. 2.3** — Dado um triângulo  $ABC$  e sejam  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pontos médios dos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  respectivamente. Mostre que

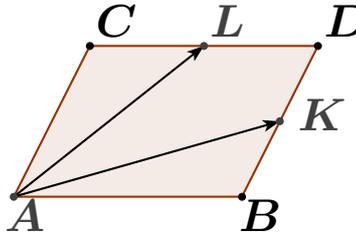
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CF} = 0$$

**Ex. 2.4** — Mostre que  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA}$  e  $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$  são colineares;  
Dica: Observe que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$$

$$= \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$$

**Ex. 2.5** — Dado um paralelogramo  $ABCD$  e sejam  $K, L$  os pontos médios dos lados  $BC$  e  $CD$ . Escreva o vetor  $BC$  como combinação de  $a = \overrightarrow{AK}$  e  $b = \overrightarrow{AL}$



$$\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}b - \frac{2}{3}a$$

**Ex. 2.6** — Mostre que as alturas de um triângulo  $\Delta ABC$  de ângulos  $\alpha, \beta, \gamma$  se interceptam num único ponto, denominado ortocentro cujo vetor posição é:

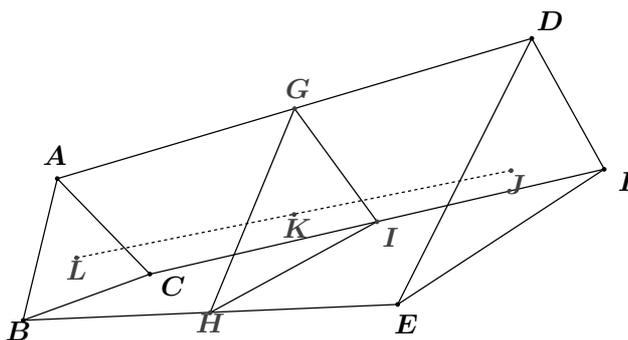
$$\frac{\operatorname{tg} \alpha a + \operatorname{tg} \beta b + \operatorname{tg} \gamma c}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}$$

**Ex. 2.7** — Mostre que a bissetriz de um triângulo  $\Delta ABC$  se interceptam num único ponto, denominado circuncentro cujo vetor posição é:

$$\frac{\operatorname{sen} 2\alpha a + \operatorname{sen} 2\beta b + \operatorname{sen} 2\gamma c}{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma}$$

**Ex. 2.8** — Num plano são dados dois triângulos  $\Delta ABC$  e  $\Delta CDE$ . Sejam  $G, H, I$  os pontos médios dos segmentos

$\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$  e  $\overline{CE}$  respectivamente. Mostre que os baricentros dos triângulos  $\triangle ABC$ ,  $\triangle DEF$  e  $\triangle GHI$  são colineares.



**Ex. 2.9 —** Mostre que para vetores não colineares  $a$  e  $b$  a igualdade:

$$m_1 a + n_1 b = m_2 a + n_2 b$$

equivale ao sistema de igualdades

$$m_1 = m_2 \quad n_1 = n_2$$

A igualdade equivale a

$$(m_1 - m_2)a + (n_1 - n_2)b = 0$$

Como os vetores são L.I. temos que  $(m_1 - m_2) = 0$  e  $(n_1 - n_2) = 0$

**Ex. 2.10 —** Dado um paralelogramo  $ABCD$  e sejam  $E$  e  $F$  pontos nos lados  $BC$  e  $CD$  de modo que

$$\frac{\|BF\|}{\|FC\|} = \mu \quad \frac{\|DE\|}{\|EC\|} = \lambda$$

sendo  $\mu, \lambda$  números reais positivos. Os segmentos  $FD$  e  $AE$  se intersectam no ponto  $O$ . Determine  $\frac{\|FO\|}{\|OD\|}$ .

$$\frac{1 + \lambda + \mu}{\lambda(1 + \mu)}$$

## Vetores em Coordenadas

No primeiro capítulo estudamos vetores de um ponto de vista totalmente geométrico. Porém, o ferramental geométrico se mostra ineficiente e quiçá insuficiente quando nos deparamos com problemas de maior complexidade. Neste capítulo introduziremos a representação algébrica dos vetores e do espaço Euclidiano. É essa representação que nos permite converter problemas geométricos em problemas algébricos e efetivamente realizar cálculos com vetores.

Os primeiros passos no sentido de encontrar tais representações já foram dados no capítulo anterior, ao estudarmos o conceito de base. Neste capítulo daremos continuidade a estas ideias e veremos como utilizar as propriedades geométricas estudadas até agora para encontrar representações algébricas não apenas para vetores, mas também para os pontos do espaço Euclidiano. Tais representações serão chamadas de *sistemas de coordenadas*, e serão o foco principal deste capítulo.

Mais precisamente, um sistema de coordenadas é uma identificação contínua do plano (espaço) euclideano com uma região de  $\mathbb{R}^2$  ( $\mathbb{R}^3$ ) que nos permita localizar pontos através de pares (triplos) de números reais.

Vejamos, por exemplo, como podemos relacionar vetores e pontos no espaço de modo a obter um sistema de coordenadas.

Se considerarmos  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  uma base de  $\mathbb{V}^3$ , pelo teorema da base para o espaço, temos que qualquer vetor  $v$  pode ser representado como:

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3,$$

onde os coeficientes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  são únicos.

Tal igualdade nos permite construir a seguinte bijeção entre  $\mathbb{V}^3$  e  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \iota_1 : \mathbb{V}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\longmapsto (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \end{aligned}$$

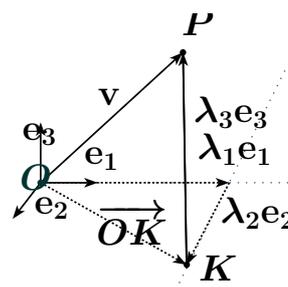
Lembramos ao leitor que bijeção é uma função que identifica univocamente os elementos do domínio com os do contradomínio. Mais precisamente uma função bijetora é uma aplicação simultaneamente injetora, isto é, que leva elementos distintos do domínio em elementos distintos da imagem, e sobrejetora, ou seja, tal que todo elemento do contra domínio é imagem de algum elemento do domínio.

Devido existência da bijeção descrita acima, definimos a seguinte notação:

$$v : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_{\mathcal{B}}.$$

E denominamos a tripla  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de coordenadas do vetor  $v$  na base  $\mathcal{B}$ .

Considere agora o espaço Euclidiano  $(\mathbb{E}^3)$ . O primeiro passo necessário para encontrarmos um sistema de coordenadas é



“localizar” os pontos no espaço. Observe que para isso não basta uma base de vetores, pois, como já dissemos anteriormente, vetores não são localizados no espaço. Assim torna-se necessária a escolha de um ponto qualquer para nos servir de referência. Fixemos então um ponto  $O \in \mathbb{E}^3$  a que chamaremos de *origem* do sistema de coordenadas. A partir de tal ponto as posições de todos os pontos de  $\mathbb{E}^3$  serão determinadas.

Observe que, fixado  $O$ , um ponto  $P$  qualquer em  $\mathbb{E}^3$  pode ser escrito como  $P = O + \overrightarrow{OP}$ . Tal igualdade nos permite identificar univocamente pontos de  $\mathbb{E}^3$  com vetores de  $V^3$ :

$$\begin{aligned} \iota_2 : \mathbb{E}^3 &\longrightarrow V^3 \\ P &\longmapsto \overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

O vetor  $\overrightarrow{OP}$  é denominado vetor posição de  $P$ .

Tomando a função composta  $\iota := \iota_1 \circ \iota_2$  obtemos uma bijeção entre os pontos de  $\mathbb{E}^3$  e os elementos de  $\mathbb{R}^3$ : a cada ponto  $P$  podemos associar a tripla  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

# 1 Sistemas de Coordenadas

Motivado pelo exposto acima, definimos

**Definição 3.1.** *Um sistema vetorial de coordenadas no espaço  $\Sigma$  é o conjunto formado por uma base de vetores  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  e um ponto  $O$ , chamado de origem do sistema de coordenadas. Denotaremos o sistema de coordenadas por*

$$\Sigma = (O, \mathcal{B}).$$

A bijeção entre  $\mathbb{E}^3$  e  $\mathbb{R}^3$  dada por  $\iota$  devido à  $\Sigma$  nos permite definir a seguinte notação:

$$P : (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_\Sigma,$$

onde  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  são as coordenadas do vetor posição  $\overrightarrow{OP}$  na base  $\mathcal{B}$ . Chamamos, nesse caso,  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de coordenadas do ponto  $P$  no sistema de coordenadas  $\Sigma$ .

**Observação 3.2.** *Fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma$ , é usual representar as coordenadas de um vetor  $v$  na base  $\mathcal{B}$  associada a  $\Sigma$  também por  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)_\Sigma$ .*

*Muitas vezes quando o sistema de coordenadas  $\Sigma$  e a base  $\mathcal{B}$  estão claros pelo contexto é comum, também, denotar tanto o ponto  $P$  quanto seu vetor posição  $\overrightarrow{OP}$  indistintamente por suas coordenadas:  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  (sem indicar os sub-índices  $\Sigma$  ou  $\mathcal{B}$ ). Nesse caso cabe ao leitor entender pelo contexto a quem se referem as coordenadas descritas, a um ponto ou a um vetor.*

Finalmente, observamos que podemos de forma totalmente análoga à descrita acima identificar pontos do plano euclidiano  $\mathbb{E}^2$  com vetores de  $\mathbb{V}^2$  e com elementos de  $\mathbb{R}^2$ . Para isso tudo que precisamos é de um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  onde  $\mathcal{B}$  é uma base de  $\mathbb{V}^2$ , ou seja, um conjunto formado por dois vetores linearmente independentes.

No que se segue apresentaremos os resultados apenas para  $\mathbb{V}^3$ , deixando implícita sua validade em  $\mathbb{V}^2$ .

Se  $i, j$  e  $k$  forem três vetores ortonormais, ou seja, ortogonais dois a dois e de norma 1, então o sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, \mathcal{B})$  onde  $\mathcal{B} = (i, j, k)$  é chamado de sistema cartesiano de coordenadas. Daqui em diante as letras  $i, j$  e  $k$  sempre denotarão vetores ortonormais.

Um sistema de coordenadas cujos vetores não são ortogonais é dito sistema de coordenadas oblíquo.

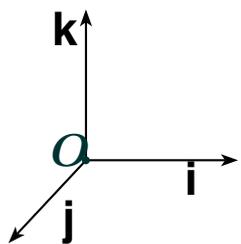


Fig. 3.1: Sistema de Coordenadas Ortonormais

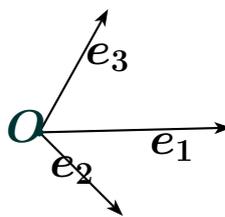


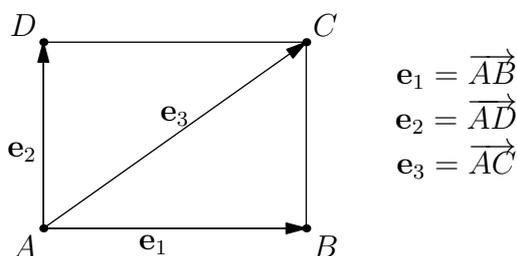
Fig. 3.2: Sistema de Coordenadas Oblíquo

**Exemplo 3.3.** *Dado um retângulo  $ABCD$  conforme a figura abaixo, vamos encontrar as coordenadas dos pontos  $A, B, C, D$  e dos vetores  $\overrightarrow{BD}$  e  $\overrightarrow{AC}$  nos seguintes sistemas de coordenadas:*

1  $\Sigma_1 = (A, \mathcal{B}_1)$  onde  $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$ .

2  $\Sigma_2 = (B, \mathcal{B}_2)$  onde  $\mathcal{B}_2 = (e_3, \frac{1}{2}e_1)$ .

◁



$$\begin{aligned} e_1 &= \overrightarrow{AB} \\ e_2 &= \overrightarrow{AD} \\ e_3 &= \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

**Solução:** (1) Vamos primeiro escrever as coordenadas de  $A, B, C, D$  no sistema  $\Sigma_1$ . Para isso devemos escrever os vetores  $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AD}$  como combinação linear de  $e_1$  e  $e_2$ . Por definição

$$\overrightarrow{AB} = e_1 \text{ e } \overrightarrow{AD} = e_2.$$

Temos também que

$$\overrightarrow{AC} = e_1 + e_2$$

e que  $\overrightarrow{AA}$ , sendo o vetor nulo, é igual a  $0e_1 + 0e_2$ . Assim as coordenadas são

$$A : (0, 0)_{\Sigma_1} \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AA} = 0e_1 + 0e_2$$

$$B : (1, 0)_{\Sigma_1} \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AB} = 1e_1 + 0e_2$$

$$C : (1, 1)_{\Sigma_1} \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AC} = 1e_1 + 1e_2$$

$$D : (0, 1)_{\Sigma_1} \quad \text{pois} \quad \overrightarrow{AD} = 0e_1 + 1e_2.$$

Para encontrar as coordenadas dos vetores  $\overrightarrow{BD}$  e  $\overrightarrow{AC}$  basta observar que

$$\overrightarrow{BD} = -e_1 + e_2 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = e_1 + e_2,$$

e portanto temos

$$\overrightarrow{BD} : (-1, 1)_{\Sigma_1}$$

$$\overrightarrow{AC} : (1, 1)_{\Sigma_1}$$

(2) Vamos agora escrever as coordenadas dos pontos  $A, B, C, D$  no sistema  $\Sigma_2 = \left( B, \left( e_3, \frac{1}{2}e_1 \right) \right)$ .

Para tanto devemos escrever os vetores  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{BC}$  e  $\overrightarrow{BD}$  como combinação de  $f_1$  e  $f_2$  sendo  $f_1 = e_3$  e  $f_2 = \frac{1}{2}e_1$ .

Observe que

$$\overrightarrow{BA} = -e_1 = -2 \left( \frac{1}{2}e_1 \right) = -2f_2,$$

$$\overrightarrow{BB} = 0f_1 + 0f_2 \quad (\text{vetor nulo}),$$

$$\overrightarrow{BC} = e_2 = -e_3 + e_1 = -1f_1 + 2f_2$$

$$\overrightarrow{BD} = e_3 - 2e_1 = f_1 - 4f_2.$$

E assim as coordenadas dos pontos são

$$A : (0, -2)_{\Sigma_2}$$

$$B : (0, 0)_{\Sigma_2}$$

$$C : (-1, 2)_{\Sigma_2}$$

$$D : (1, -4)_{\Sigma_2}$$

Calculando as coordenadas dos vetores  $\overrightarrow{BD}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , usando que  $e_2 = e_3 - e_1$  obtemos que

$$\overrightarrow{BD} = -e_1 + e_2 = e_3 - 2e_1 = f_1 - 4f_2$$

$$\overrightarrow{AC} = e_3 = f_1,$$

e portanto vale

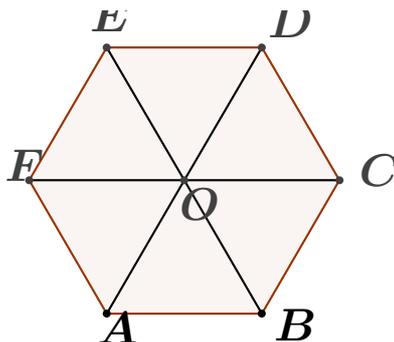
$$\overrightarrow{BD} : (1, -4)_{\Sigma_2}$$

$$\overrightarrow{AC} : (1, 0)_{\Sigma_2}.$$

□

## Exercícios

Ex. 3.1 — Dado o hexágono regular  $ABCDEF$  de centro  $O$ , conforme a figura abaixo:



Determine as coordenadas dos pontos  $O, A, B, C, D, E$  e  $F$  nos seguintes sistemas de coordenadas:

- a)  $(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$
- b)  $(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE})$
- c)  $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO})$
- d)  $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$

**Ex. 3.2 —** Encontre as coordenadas dos seguintes vetores nos sistemas de coordenadas do exercício anterior:

- a)  $\overrightarrow{CD}$
- b)  $\overrightarrow{BD}$
- c)  $\overrightarrow{AC}$
- d)  $\overrightarrow{BE}$

**Ex. 3.3 —** Dado o paralelogramo retângulo  $ABCDEFGH$  abaixo. Sejam  $e_1 = \overrightarrow{AB}$ ,  $e_2 = \overrightarrow{AC}$ ,  $e_3 = AF$ ,  $e_4 = AE$ .

Determine as coordenadas dos pontos  $A, B, C, D, E, F, G$  e  $H$  nos seguintes sistemas de coordenadas:

- a)  $(A; e_1; e_2; e_3)$
- b)  $(A; e_2; e_1; e_3)$
- c)  $(A; e_4; e_1; e_3)$
- d)  $(H; e_1; e_2; e_3)$
- e)  $(G; -e_3; \frac{1}{2}e_1; 3e_3)$
- f)  $(A; \frac{1}{2}e_1; \frac{1}{2}e_2; \frac{1}{2}e_3)$

Ex. 3.4 — Determine

as coordenadas dos vetores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AF}$ ,  $\overrightarrow{AG}$ ,  $\overrightarrow{EF}$ ,  $\overrightarrow{FG}$ ,  $\overrightarrow{EH}$  nos seguintes sistemas de coordenadas:

- a)  $(A; e_1; e_2; e_3)$
- b)  $(A; e_2; e_1; e_3)$
- c)  $(H; e_1; e_2; e_3)$
- d)  $(H; e_2; e_1; e_3)$
- e)  $(G; -e_3; \frac{1}{2}e_1; 3e_3)$

## Operações Vetoriais em Coordenadas

Agora que sabemos como representar vetores e pontos em coordenadas precisamos saber como operar com estas representações. A proposição abaixo nos diz como as operações com pontos e vetores vistas no capítulo anterior podem ser traduzidas para a representação que acabamos de apresentar.

**Proposição 3.4.** Se  $u : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$ ,  $v : (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$  e  $P : (p_1, p_2, p_3)_\Sigma$  **então:**

1  $u + v : (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_\Sigma$

2  $\lambda u : (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)_\Sigma$

3  $P + u : (a_1 + p_1, a_2 + p_2, a_3 + p_3)_\Sigma$

**Demonstração.**

1 Dado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (\mathcal{B}, O)$ , onde  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ , como  $u : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$  e  $v : (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$ , por

definição temos que:

$$u = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

$$v = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$$

E logo

$$\begin{aligned} u + v &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\ &= (a_1 + b_1)e_1 + (a_2 + b_2)e_2 + (a_3 + b_3)e_3 \end{aligned}$$

E desta forma as coordenadas de  $u + v$  no sistema de coordenadas  $\Sigma$  são

$$u + v : (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

**2** Como  $u : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$ , por definição temos que:

$$u = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$$

Desta forma temos que

$$\lambda u = \lambda(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3) \quad (3.1)$$

$$= \lambda a_1e_1 + \lambda a_2e_2 + \lambda a_3e_3 \quad (3.2)$$

E conseqüentemente:

$$\lambda u : (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

**3** Deixaremos como exercício para o leitor.

Considere fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (\mathcal{B}, O)$ . Observadas as operações com pontos e vetores em coordenadas, uma pergunta que resta ser respondida é: dados os pontos  $A : (a_1, a_2, a_3)$  e  $B : (b_1, b_2, b_3)$ , como podemos encontrar as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AB}$ ?

Observe que, pela definição de subtração de vetores, vale que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ . Então, como  $\overrightarrow{OA} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$  e  $\overrightarrow{OB} = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$ , temos:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)e_1 + (b_2 - a_2)e_2 + (b_3 - a_3)e_3$$

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Tal igualdade dá origem a notação de Grassmann que diz:

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

Observe que a igualdade acima é, no entanto, apenas uma notação já que em nenhum momento foi definida soma ou subtração de pontos.

**Exemplo 3.5.** *Dados os pontos  $A : (1, 3, 2)$ ,  $B : (1, 1, 1)$  e  $C : (1, 1, 0)$  determine as coordenadas*

1 *dos vetores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$*

2 *do vetor  $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$*

3 *do ponto  $C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$*

◁

**Solução:**

1  $\overrightarrow{AB} : (1 - 1, 1 - 3, 1 - 2) = (0, -2, -1)$

$$\overrightarrow{BC} : (1 - 1, 1 - 1, 0 - 1) = (0, 0, -1)$$

2  $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = (0, -2, -1) + \frac{1}{3}(0, 0, -1) = (0, -2, -1 - \frac{1}{3}) = (0, -2, -\frac{4}{3})$

$$\boxed{3} \quad C + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0) + \frac{1}{2}(0, -2, -1) = (1, 0, -\frac{1}{2})$$

□

**Exemplo 3.6.** *Determine o ponto médio  $M = (m_1, m_2, m_3)$  de um segmento com ponto inicial  $A = (a_1, a_2, a_3)$  e  $B = (b_1, b_2, b_3)$ , num sistema de coordenadas  $\Sigma = (\mathcal{B}, O)$ , onde  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ .*

◁

**Solução:** Primeiro observamos que  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$  pois os vetores possuem o mesmo sentido e o comprimento  $\|\overrightarrow{AB}\|$  é duas vezes o comprimento  $\|\overrightarrow{AM}\|$ .

Assim

$$(b_1 - a_1)e_1 + (b_2 - a_2)e_2 + (b_3 - a_3)e_3 = 2(m_1 - a_1)e_1 + 2(m_2 - a_2)e_2 + 2(m_3 - a_3)e_3$$

o que implica em

$$b_i - a_i = 2(m_i - a_i),$$

para todo  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Logo

$$m_i = \frac{b_i + a_i}{2},$$

para todo  $i$ , e

$$M : \left( \frac{b_1 + a_1}{2}, \frac{b_2 + a_2}{2}, \frac{b_3 + a_3}{2} \right).$$

□

De posse da representação dos vetores em coordenadas podemos agora fornecer critérios para a dependência e a independência linear de vetores:

**Teorema 3.7.** Os vetores  $u : (a_1, a_2, a_3)$ ,  $v : (b_1, b_2, b_3)$  e  $w : (c_1, c_2, c_3)$  são linearmente independentes se e somente se

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

**Demonstração.** Os vetores  $u, v, w$  são linearmente independentes se o sistema:

$$xu + yv + zw = 0 \quad (3.3)$$

possuir somente a solução trivial  $x = y = z = 0$

Em coordenadas podemos expressar a equação 3.4 como:

$$x(a_1, a_2, a_3) + y(b_1, b_2, b_3) + z(c_1, c_2, c_3) = 0 \quad (3.4)$$

E logo teremos o sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

Pela regra de Cramer (ver Apêndice C pág. C.3) o sistema anterior tem solução única se e somente se seu determinante for não nulo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

**Exemplo 3.8.** Considere fixada uma base de vetores  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ . Sejam  $f_1 = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$ ,  $f_2 = (1, 0, 1)_{\mathcal{B}}$  e  $f_3 = (0, -1, 1)_{\mathcal{B}}$ .

- 1 Mostre que  $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$  é uma base de  $\mathbb{V}^3$ .
- 2 Encontre as coordenadas do vetor  $u = (1, 2, 3)_{\mathcal{C}}$  na base  $\mathcal{B}$ .
- 3 Encontre as coordenadas do vetor  $v = (1, 2, 3)_{\mathcal{B}}$  na base  $\mathcal{C}$ .

◁

### Solução:

- 1 Pelo teorema da base, basta mostrarmos que  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  são linearmente independentes.

Como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

pele Teorema 3.7 temos que, de fato,  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_3$  são linearmente independentes.

- 2

$$\begin{aligned} u &= (1, 2, 3)_{\mathcal{C}} = 1f_1 + 2f_2 + 3f_3 = \\ &= 1(1, 1, 1)_{\mathcal{B}} + 2(1, 0, 1)_{\mathcal{B}} + 3(0, -1, 1)_{\mathcal{B}} = (3, -2, 6)_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

**3** Antes de escrevermos  $v$  na base  $\mathcal{C}$  precisamos obter as coordenadas dos vetores  $e_1, e_2$  e  $e_3$  na base  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{cases} f_1 = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3 \\ f_2 = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3 \\ f_3 = 0e_1 - 1e_2 + 1e_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3 \\ f_1 - f_2 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 \\ f_3 + (f_1 - f_2) = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1 - (f_1 - f_2) - [f_3 + (f_1 - f_2)] = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 \\ f_1 - f_2 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 \\ f_3 + (f_1 - f_2) = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 \end{cases}$$

**Donde temos:**

$$\begin{cases} e_1 = 1f_1 + 2f_2 - 1f_3 = (1, 2, -1)_\mathcal{C} \\ e_2 = 1f_1 - 1f_2 + 0f_3 = (1, -1, 0)_\mathcal{C} \\ e_3 = 1f_1 - 1f_2 + 1f_3 = (1, -1, 1)_\mathcal{C} \end{cases}$$

**Finalmente:**

$$\begin{aligned} v &= (1, 2, 3)_\mathcal{B} = 1e_1 + 2e_2 + 3e_3 = \\ &= 1(1, 2, -1)_\mathcal{C} + 2(1, -1, 0)_\mathcal{C} + 3(1, -1, 1)_\mathcal{C} = (6, -3, 2)_\mathcal{C}. \end{aligned}$$

□

**Observação 3.9.** *Mais detalhes sobre mudança de base podem ser encontrados no Capítulo 11.*

**Exemplo 3.10.** *Determine  $m$  de modo que os vetores  $u, v$  e  $w$  sejam linearmente dependentes, onde:*

$$v = (1, m + 1, m + 2) \quad w = (1, 0, m) \quad k = (0, 2, 3)$$

◁

**Solução:** Para que os vetores sejam linearmente dependentes, pelo teorema 3.7 o seguinte determinante deve se anular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 + m & 2 + m \\ 1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 + m & 2 + m \\ 1 & 0 & m \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 - 3m$$

E assim queremos determinar os valores de  $m$  para os quais  $1 - 3m = 0$  e assim  $m = \frac{1}{3}$ . □

## Exercícios

**Ex. 3.5** — Os pontos médios dos lados de um triângulo são  $(2, 5)$ ,  $(4, 2)$  e  $(1, 1)$ . Determine as coordenadas dos três vértices.

**Ex. 3.6** — Dados dois pontos  $P : (x_1, y_1, z_1)$  e  $Q : (x_2, y_2, z_2)$ , encontre a coordenada do ponto  $R$ , que se encontra sobre o segmento ligando os pontos  $P$  e  $Q$  e tal  $d(R, Q) = \lambda d(R, P)$ .

**Ex. 3.7** — Prove utilizando coordenada que o segmento de reta que une os pontos médios das laterais de um trapézio é paralelo às bases e sua medida é a média aritmética das medidas das bases.

**Ex. 3.8** — Prove que se  $u : (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$  e  $P : (p_1, p_2, p_3)_\Sigma$  então:

$$P + u : (a_1 + p_1, a_2 + p_2, a_3 + p_3)_\Sigma$$

**Ex. 3.9** — Determine quais dos conjuntos abaixo são L.I.

- a)  $\{(1, -1, 2), (1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$
- b)  $\{(1, -1, 1), (-1, 2, 1), (-1, 2, 2)\}$
- c)  $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (2, 0, 5)\}$

**Ex. 3.10** — Exprima o vetor  $w : (1, 1)$  como combinação linear de  $u : (2, -1)$  e  $v : (1, -1)$ .

**Ex. 3.11** — Sejam  $u = (2, 1)$  e  $B = (1, 3)$ . Mostre que todo vetor  $(c_1, c_2)$  pode ser expresso como combinação linear de  $u, v$

**Ex. 3.12** — Sejam  $u = (1, 1, 1)$ ,  $v = (0, 1, 1)$  e  $w = (1, 1, 0)$  vetores no espaço.

- a) encontre as componentes de um vetor  $z = (a, b, c)$  na base formada por  $u, v, w$ .
- b) Mostre que se  $z = 0$  então as componentes de  $z$  na base formada por  $u, v, w$  são todas iguais a zero.
- c) encontre as componentes de um vetor  $z = (1, 2, 3)$  na base formada por  $u, v, e w$ .

**Ex. 3.13 —** Mostre que dois vetores não nulos  $u : (a_1, a_2, a_3)$  e  $v : (b_1, b_2, b_3)$  são linearmente dependentes se e somente se existe  $\lambda$  tal que:

$$(a_1, a_2, a_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3)$$

Utilize esse critério para decidir se os vetores abaixo são linearmente independentes ou linearmente dependentes:

- a)  $u = (1, 2, 3)$        $v = (4, 5, 6)$
- b)  $u = (1, 0, 3)$        $v = (-2, 0, -6)$
- c)  $u = (1, 2, 5)$        $v = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}\right)$

**Ex. 3.14 —** Utilizando o exercício anterior, mostre que dois vetores não nulos  $u : (a_1, a_2, a_3)$  e  $v : (b_1, b_2, b_3)$  são linearmente independentes se e somente se ao menos um dos determinantes

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \text{ ou } \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

é não nulo.

**Ex. 3.15 —** Determine  $m, n$  de modo que os vetores  $u, v$  sejam linearmente dependentes, onde:

a)  $v = (1, m, n + 1)w = (m, n, 2)$

b)  $v = (1, m - 1, m)w = (m, n, 4)$

**Ex. 3.16** — Sejam  $u : (m, -1, m^2 + 1)$  e  $v : (m^2 + 1, m, 0)$  e  $w : (m, 1, 1)$ . Mostre que os vetores  $u, v$  e  $w$  formam uma base para o espaço independentemente do valor de  $m$ .

**Ex. 3.17** — Dado  $(e_1, e_2, e_3)$  uma base. Determine condições necessárias e suficientes sobre  $a, b$  de modo que os vetores  $(u, v, w)$  sejam linearmente independentes, com  $u, v, w$  dados por:

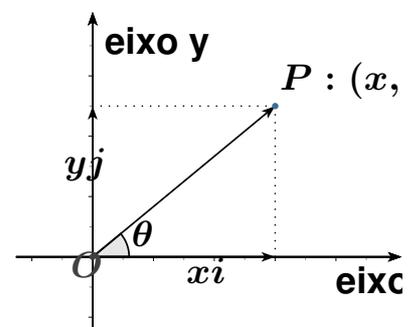
a)  $u = e_1 - e_2, v = e_1 + e_2 + e_3, w = ae_1 + be_2 + e_3$

b)  $u = e_1 - e_2 + e_3, v = e_1 + e_2 + 3e_3, w = ae_1 + be_2 + (b^2 + 2a)e_3$

**Ex. 3.18** — Dado um tetraedro  $ABCD$ , Determine a coordenada dos pontos médios dos lados  $AB, CD, BD, BC$  no sistema de coordenadas determinado pelo ponto  $A$  e pela base  $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ . (compare com o exemplo 2.5)

## 2 Bases Ortonormais e Coordenadas Cartesianas

Vamos agora explorar algumas das vantagens de se trabalhar com as chamadas *bases ortonormais* ou, mais geralmente, com *sistemas de coordenadas cartesianas*.



Lembrando, uma base é dita ortonormal se seus vetores são unitários (possuem norma 1) e perpendiculares dois a dois. Um sistema de coordenadas formado por uma base ortonormal é chamado de sistemas de coordenadas cartesianas. A partir deste ponto vamos fixar notação e utilizar  $(i, j)$  para denotar uma base ortonormal para o plano, e  $(i, j, k)$  para o espaço.

Seja  $\mathcal{B} = (i, j)$  uma base ortonormal para  $\mathbb{V}^2$ ,  $O$  um ponto no plano e  $\Sigma = (\mathcal{B}, O)$  o sistema de coordenadas cartesianas determinado por eles. Dado agora um ponto  $P$  no plano considere o vetor  $r = \overrightarrow{OP}$  e sua representação no sistema  $\Sigma$  dada por  $r : (x, y)$ , ou seja:

$$r = xi + yj.$$

Como a base em consideração é ortonormal, segue diretamente do Teorema de Pitágoras que

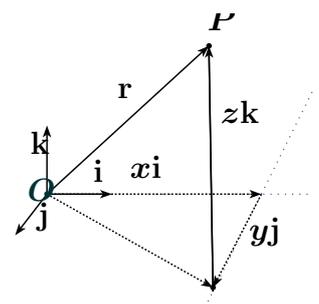
$$\begin{aligned} \|r\|^2 &= \|xi\|^2 + \|yj\|^2 \\ &= x^2 \|i\|^2 + y^2 \|j\|^2 \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Assim, se denotarmos por  $r$  o tamanho do vetor  $r$  temos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A mesma ideia pode ser generalizada para o espaço, onde obtemos que se  $r = xi + yj + zk$ , então

$$r = \|r\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Voltemos por momento para o caso planar e denote por  $\theta$  o ângulo entre o eixo  $OX$  e o vetor  $r$ . Neste caso, não é difícil ver

que

$$x = r \cos(\theta),$$

$$y = r \operatorname{sen}(\theta).$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos também que a distância entre os pontos  $P : (a_1, a_2)$  e  $Q : (b_1, b_2)$  é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

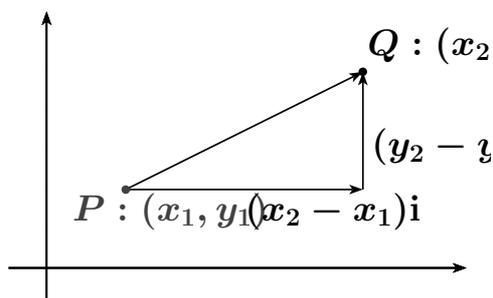


Fig. 3.3: Distância entre dois pontos no plano.

E no caso tridimensional distância entre os pontos  $P : (a_1, a_2, a_3)$  e  $Q : (b_1, b_2, b_3)$  é dada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

**Observação 3.11.** *É importante observar que para realizarmos os cálculos acima foi absolutamente necessário supor que o sistema de coordenadas considerado fosse cartesiano. Podemos calcular as mesmas quantidades utilizando outros sistemas de coordenadas, mas nesse caso as expressões obtidas serão diferentes e geralmente mais complicadas.*

**Exemplo 3.12.** *Suponha fixado um sistema de coordenadas cartesiano. Calcule a distância dos pontos  $A : (1, 0, 2)$  e  $B : (3, 2, 1)$ .*

**Solução:** Temos que  $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$ . Como  $\vec{AB} = B - A = (2, 2, -1)$ , segue que:

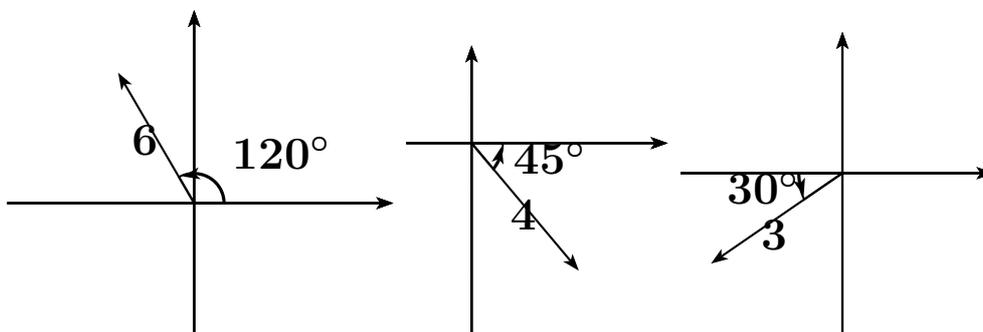
$$d(A, B) = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3.$$

□

## Exercícios

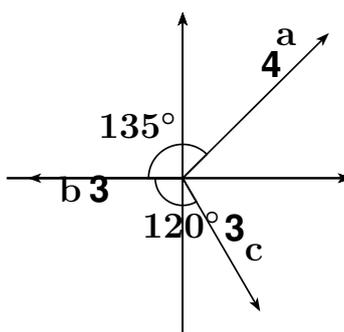
Nos próximos exercícios, as coordenadas são expressas num sistema cartesiano.

**Ex. 3.1** — Dados os vetores  $a, b, c$  conforme a figura abaixo. Determine as componentes dos vetores  $a, b, c$  e de  $a + b + c$



Vetores  $a, b, c$  respectivamente

**Ex. 3.2** — Dados os vetores  $a, b, c$  conforme a figura abaixo. Determine as componentes dos vetores  $a, b, c$  e de  $a + b + c$



**Ex. 3.3 — Dados  $A : (-3, 2)$ ,  $B : (3, 5)$  e  $C : (0, 3)$  desenhe o triângulo  $ABC$  e ache:**

- a) A distância entre os pontos  $A$  e  $B$ ;
- b) A distância entre os pontos  $B$  e  $C$ ;
- c) O vetor  $\overrightarrow{BA}$  e o vetor  $\overrightarrow{AC}$ ;
- d) O vetor  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
- e) O ponto médio do segmento  $\overline{AC}$
- f) O ponto na reta  $\overleftrightarrow{AB}$  que dista três vezes mais de  $A$  do que de  $B$ . (Duas respostas)

**Ex. 3.4 — Dados  $A : (4, 8, 11)$ ,  $B : (-3, 1, 4)$  e  $C : (2, 3, -3)$  desenhe o triângulo  $ABC$  e ache:**

- a) O comprimento dos três lados do triângulo;
- b) Os pontos médios dos três lados do triângulo;
- c) Os vetores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  e  $\overrightarrow{CA}$ ;
- d) A soma  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ . Porque essa soma deve ser zero?;
- e) Os ângulos entre  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$ . Dica: use a lei dos cossenos;
- f) A área do triângulo;
- g) O ponto  $D$  tal que  $ABCD$  é um paralelogramo (Três respostas)

**Ex. 3.5 — Qual o ponto do eixo  $x$  é equidistante dos pontos  $A = (1, -3)$  e  $B = (3, -1)$ ?**

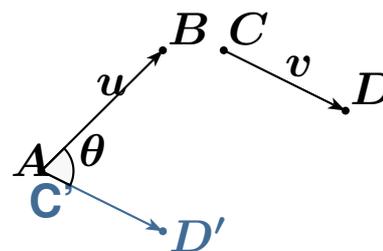
**Ex. 3.6** — O triângulo  $ABC$ , com  $A = (-a; 0)$   $B = (a; 0)$   $C = (0; y)$  é equilátero. Quais são os possíveis valores de  $y$ ?

**Ex. 3.7** — Três vértices de um retângulo são  $(2, -1)$ ,  $(7, -1)$  e  $(7; 3)$  : Determinar o quarto vértice e a área.

### 3 Produto Escalar: Ângulo entre dois Vetores

É de fundamental importância em toda geometria a determinação de medidas angulares. Veremos mais adiante que, além de diversas outras aplicações, ângulos entre vetores (ou entre vetores e retas) podem ser usados na definição de uma nova forma de representar pontos do espaço Euclidiano (coordenadas polares). Surge então a pergunta: como podemos utilizar os sistemas de coordenadas para determinar o ângulo entre dois vetores  $u$  e  $v$ ?

Conforme já vimos no início do Capítulo 1, entendemos por ângulo entre dois vetores  $u$  e  $v$  o ângulo  $\theta$ , com  $0 \leq \theta \leq \pi$ , formado por representantes de  $u$  e  $v$  com mesma origem.



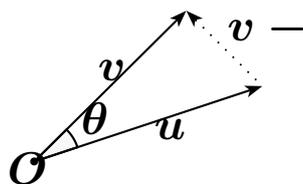
Para determinarmos uma expressão para ângulo entre dois vetores  $u$  e  $v$  o primeiro passo é escolher um sistema de coordenadas cartesiano  $\Sigma = (\mathcal{B}, O)$  com  $\mathcal{B} = (i, j, k)$  e escrever os vetores neste sistema:

$$u = a_1i + a_2j + a_3k$$

$$v = b_1i + b_2j + b_3k$$

Fig. 3.4: Ângulo entre  $u$  e  $v$

Utilizando a lei dos cossenos temos que:



$$\|v - u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos(\theta),$$

e conseqüentemente

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2\|u\|\|v\| \cos(\theta).$$

Assim

$$\cos(\theta) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\|u\|\|v\|}.$$

Ao termo  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$  daremos o nome de produto escalar de  $u$  por  $v$  e denotaremos por  $u \cdot v$ .

Resumindo:

**Definição 3.13.** Se  $\Sigma = (\mathcal{B}, O)$  com  $\mathcal{B} = (i, j, k)$  é um sistema de coordenadas cartesiano,  $u = (a_1, a_2, a_3)_\Sigma$  e  $v = (b_1, b_2, b_3)_\Sigma$ , então definimos o produto escalar (ou produto interno) de  $u$  e  $v$  como:

$$u \cdot v := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Além disso, os argumentos apresentados anteriormente provam que:

**Proposição 3.14.** *Dados dois vetores  $u$  e  $v$  temos que:*

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \theta,$$

*e assim o ângulo  $\theta$  entre esses vetores satisfaz:*

$$\theta = \arccos \left( \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \right).$$

Como consequência imediata da definição de produto escalar temos:

**Proposição 3.15.** *Dois vetores  $u$  e  $v$  são perpendiculares se e somente se  $u \cdot v = 0$ .*

**Observação 3.16.** *Dado um vetor  $v = (x, y)$  num sistema cartesiano no plano, é interessante notar que o vetor  $n = (-y, x)$  é ortogonal a  $v$  e tem mesma norma de  $v$ . Note:*

$$\begin{aligned} v \cdot n &= -xy + xy = 0 \\ \|n\| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \|v\|. \end{aligned}$$

*De fato, veremos no Capítulo 10, Seção 10.3 que  $n_1 = (-y, x)$  é obtido rotacionado de  $90^\circ$  o vetor  $v$  no sentido anti-horário, e  $n_2 = (y, -x)$  é obtido rotacionado de  $90^\circ$  o vetor  $v$  no sentido horário.*

**Exemplo 3.17.** *Determine o ângulo entre  $u = i + 2j + k$  e  $v = -i + j + 2k$ .*



### Solução:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \theta &= \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ\end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.18.** *Mostre que os vetores  $u = 3i + 4j + k$  e  $v = 2i - 3j + 6k$  são ortogonais.*

◁

### Solução:

$$u \cdot v = (3, 4, 1) \cdot (2, -3, 6) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 = 6 - 12 + 6 = 0.$$

Logo  $u$  e  $v$  são ortogonais.

□

**Proposição 3.19.** *O produto escalar possui as seguintes propriedades:*

1  $u \cdot v = v \cdot u$

2  $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$

3  $u \cdot u = \|u\|^2 \geq 0$

4  $u \cdot u = 0$  se e somente se  $u = 0$

5  $u \cdot (\lambda v) = \lambda u \cdot v$

**Demonstração.** Se  $u : (a_1, a_2, a_3)$  e  $v : (b_1, b_2, b_3)$  e  $w : (c_1, c_2, c_3)$

1

$$u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = v \cdot u$$

2

$$\begin{aligned} u \cdot (v + w) &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\ &= u \cdot v + u \cdot w \end{aligned}$$

3

$$u \cdot u = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \|u\|^2 \geq 0$$

4 Se  $u \cdot u = 0$  então  $\|u\| = 0$  e conseqüentemente  $u = 0$ .

Reciprocamente, se  $u = 0$  temos  $u = (0, 0, 0)$ , e então

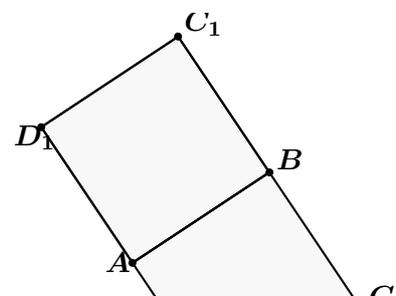
$$u \cdot u = 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0.$$

5 A demonstração desse item é deixada como exercício ao leitor.

**Exemplo 3.20.** Num quadrado ABCD tem se  $A = (3, -4)$  e  $B = (5, 6)$ . Quais são as coordenadas dos vetores  $C$  e  $D$ ?

◁

**Solução 1:** Denotando as coordenadas de  $C$  e  $D$  por  $C = (c_1, c_2)$  e  $D = (d_1, d_2)$ , temos que  $\overrightarrow{AB} = (2, 10)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (c_1 -$



$5, c_2 - 6)$ ,  $\overrightarrow{CD} = (d_1 - c_1, d_2 - c_2)$  e  $\overrightarrow{DA} = (d_1 - 3, d_2 + 4)$ .

O vetor  $\overrightarrow{BC}$  é perpendicular ao vetor  $\overrightarrow{AB}$  logo o produto escalar entre eles é nulo, ou seja,

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Isto implica que  $2(c_1 - 5) + 10(c_2 - 6) = 0$ , que simplificando resulta em

$$2c_1 + 10c_2 = 70 \quad (3.5)$$

Temos ainda que  $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{104}$ , logo

$$(c_1 - 5)^2 + (c_2 - 6)^2 = 104 \quad (3.6)$$

Substituindo (3.5) em (3.6) teremos que  $(c_2 - 6)^2 = 4$  e logo  $c_2 = 8$  ou  $c_2 = 4$

Quando  $c_2 = 8$  por (3.5)  $c_1 = -5$  e quando  $c_2 = 4$  então  $c_1 = 15$ , ou seja,  $C = (-5, 8)$  ou  $C = (15, 4)$ .

O cálculo de  $D$  é análogo. □

**Solução 2:** Uma segunda solução para o exemplo acima faz uso da Observação 3.16. Temos que  $\overrightarrow{AB} = (2, 10)$  e daí, rotacionando  $\overrightarrow{AB}$  de  $90^\circ$  no sentido anti-horário, temos  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (-10, 2)$ . Logo:

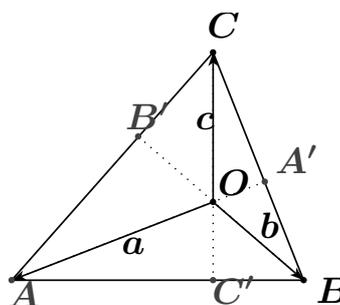
$$\begin{aligned} C &= B + \overrightarrow{BC} = (-5, 8) \\ D &= A + \overrightarrow{AD} = (-7, -2). \end{aligned}$$

Finalmente, se rotacionamos  $\overrightarrow{AB}$  de  $90^\circ$  no sentido horário, temos  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = (10, -2)$ . Assim:

$$\begin{aligned} C &= B + \overrightarrow{BC} = (15, 4) \\ D &= A + \overrightarrow{AD} = (13, -6). \end{aligned}$$



**Exemplo 3.21.** *Mostre que as três alturas de um triângulo são concorrentes em único ponto.*



**Solução:** Dado um triângulo  $\Delta ABC$ , então as alturas  $BB'$  e  $CC'$  se interceptam num ponto  $O$ . Sejam então os vetores:  $a = \overrightarrow{OA}$ ,  $b = \overrightarrow{OB}$  e  $c = \overrightarrow{OC}$ .

Como as retas  $OB$  e  $CA$  são perpendiculares:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow b \cdot (a - c) = 0 \Rightarrow b \cdot a = b \cdot c$$

De modo análogo, como as retas  $OC$  e  $AB$  são perpendiculares:

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow c \cdot (b - a) = 0 \Rightarrow c \cdot b = c \cdot a$$

E logo  $b \cdot a = c \cdot a$ , ou seja,

$$a \cdot (c - b) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

Desta forma a reta  $OA$  é perpendicular ao lado  $BC$ , sendo assim a altura relativa ao vértice  $A$ . Essa reta intercepta as outras alturas no ponto  $O$ , e assim as três retas se interceptam num único ponto, que é denominado ortocentro do triângulo  $\Delta ABC$ .



## Projeção Ortogonal

Passemos agora a um novo problema. Dados dois vetores  $v$  e  $u$ , com  $u$  não nulo, queremos decompor o vetor  $v$  em dois vetores  $p, q$  tais que  $p$  é paralelo a  $u$  e  $q$  é perpendicular a  $u$ , ou seja, queremos encontrar  $p, q$  tais que

$$v = p + q, \quad p = \lambda u \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } q \cdot u = 0.$$

Reescrevendo as condições acima temos que

$$(v - p) \cdot u = 0$$

e logo

$$\begin{aligned} (v - \lambda u) \cdot u &= 0 \\ v \cdot u - \lambda \|u\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

Desta forma

$$\lambda = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2}$$

e

$$p = \left( \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} \right) u$$

Do mesmo modo podemos ver que o vetor  $p$  assim determinado é único. Tal vetor é chamado de projeção ortogonal de  $v$  sobre  $u$  e é denotado por  $\text{Proj}_u v$ .

Demostramos assim o seguinte resultado.

**Proposição 3.22.** *Dado  $u$  um vetor não nulo, e  $v$  um vetor qualquer, então a projeção ortogonal  $\text{Proj}_u v$  de  $v$  em  $u$  existe e é única:*

$$\text{Proj}_u v = \left( \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} \right) u \quad (3.7)$$

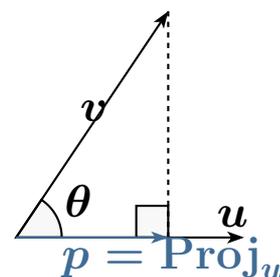


Fig. 3.6: Projeção de  $v$  sobre  $u$

**Observação 3.23.** *Veja que um modo fácil de lembrar da projeção é observar a Figura 3.6 e ver que esta é um vetor  $p$  tal que seu comprimento obedece:*

$$\|p\| = (\|v\| \cos \theta) = \left( \frac{\|u\| \|v\| \cos \theta}{\|u\|} \right) = \left( \frac{u \cdot v}{\|u\|} \right),$$

*e tem mesma direção e sentido que  $u$ , donde temos:*

$$\text{Proj}_u v = \left( \frac{u \cdot v}{\|u\|} \right) \left( \frac{u}{\|u\|} \right) = \left( \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} \right) u.$$

*Note também que o vetor  $p = \text{Proj}_u v$  não depende do comprimento de  $u$ . Tal fato encontra-se expresso no lado direito da Equação 3.7 se observamos que o vetor  $u$  aparece duas vezes no seu numerador e “ao quadrado” no denominador.*

**Exemplo 3.24.** *Determine a área do triângulo  $\triangle ABC$  cujos vértices num sistema de coordenadas cartesiano são  $A = (1, 2)$ ,  $B = (3, 1)$  e  $C = (2, 5)$*

◁

**Solução:** Temos que  $\overrightarrow{AB} = (2, -1)$  e  $\overrightarrow{AC} = (1, 3)$ . Além disso,  $n = (1, 2)$  é um vetor ortogonal a  $\overrightarrow{AB}$ .

A área do triângulo  $\triangle ABC$  é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\| h,$$

onde  $h = \|\text{Proj}_n \overrightarrow{AC}\| = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot n|}{\|n\|}$ , é a altura do triângulo  $\triangle ABC$  relativa ao lado  $AB$ .

Como  $\|n\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ , temos que  $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \cdot n|$ . Logo:

$$S = \left( \frac{1}{2} \right) |1 + 6| = \frac{7}{2}.$$

## Exercícios

**Ex. 3.1 —** Pela fórmula do  $\cos$  ache os três ângulos do triângulo cujos vértices são

a)  $(2, -1)$ ,  $(7, -1)$  e  $(7, 3)$  (use uma calculadora)

b)  $(4, 7, 11)$ ,  $(-3, 1, 4)$  e  $(2, 3, -3)$

**Ex. 3.2 —** Se  $u = (2, 1, -1)$  e  $v = (1, -1, 2)$ , encontre um vetor não nulo  $w$  tal que  $u \cdot w = v \cdot w = 0$ .

**Ex. 3.3 —** Se  $u = (2, -1, 2)$  e  $v = (1, 2, -2)$ , encontre escalares  $a, b$  tais que  $w = au + bv$  e  $w \cdot v = 0$ .

**Ex. 3.4 —** Prove que os vetores  $u = 7i - 3j + 6k$ ,  $v = 3i + 3j - 2k$  e  $w = 6i - 16j - 15k$  são dois a dois perpendiculares.

**Ex. 3.5 —** Determine os três ângulos de um triângulo cujos vértices são  $(3, 1)$ ,  $(5, -2)$  e  $(6, 3)$ . Encontre também a área do triângulo.

**Ex. 3.6 —** Dados vetores  $a, b$  e  $c$  tais que  $a + b + c = 0$  com  $\|a\| = 3$ ,  $\|b\| = 5$  e  $\|c\| = 7$ . Calcule o ângulo entre  $a$  e  $b$ . Dado que  $a + b + c = 0$ , calculando o produto de ambos os

lados da equação sucessivamente com  $a$ ,  $b$  e  $c$  temos:

$$a \cdot a + a \cdot b + a \cdot c = 0 \Rightarrow a \cdot b + a \cdot c = -9$$

$$b \cdot a + b \cdot b + b \cdot c = 0 \Rightarrow b \cdot a + b \cdot c = -25$$

$$c \cdot a + c \cdot b + c \cdot c = 0 \Rightarrow c \cdot a + c \cdot b = -49$$

Resolvendo o sistema anterior temos  $a \cdot b = \frac{15}{2}$  e assim  $\cos \theta =$

$$\frac{1}{2} \text{ e logo } \theta = \frac{\pi}{3}$$

**Ex. 3.7 — Prove que**  $v \cdot w = \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$

**Ex. 3.8 — Mostre que se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares então ele é um losango.**

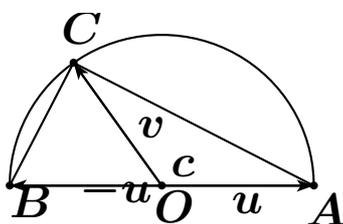
**Ex. 3.9 — Decomponha o vetor**  $u = -i - 3j + 2k$  **como a soma de dois vetores**  $v_1$  **e**  $v_2$ , **com**  $v_1$  **paralelo ao vetor**  $j + 3k$  **e**  $v_2$  **ortogonal a este último.**

**Ex. 3.10 — Suponha que**  $\overrightarrow{AB}$  **seja o diâmetro de um círculo e seja**  $C$  **outro ponto qualquer desse círculo. Mostre que os vetores**  $\overrightarrow{CA}$  **e**  $\overrightarrow{CB}$  **são ortogonais.**

**Denotando**  $u = \overrightarrow{OA}$ ,  $-u = \overrightarrow{OB}$  **e**  $v = \overrightarrow{OC}$  **temos**  $\|u\| = \|-u\| = \|v\| = r$ .

**E assim:**

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (v + u)(v - u) = v \cdot v - u \cdot u = 0$$



**Ex. 3.11 — Prove que:**

- a)  $\text{Proj}_u \lambda v = \lambda \text{Proj}_u v$
- b)  $\text{Proj}_u (v + w) = \text{Proj}_u v + \text{Proj}_u w$
- c)  $\text{Proj}_u (\text{Proj}_u v) = \text{Proj}_u v$
- d)  $v \cdot \text{Proj}_u w = \text{Proj}_u v \cdot w$

**Ex. 3.12 — Calcule o cosseno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.**

**Ex. 3.13 — Prove que  $|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$  e que  $|u \cdot v| = \|u\| \|v\|$  se e somente se um vetor é múltiplo do outro (Desigualdade de Schwarz).**

**Ex. 3.14 — Prove que  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  (Desigualdade Triangular).**

**Ex. 3.15 — Mostre que  $\|u + v\| = \|u - v\|$  se e somente se  $u \cdot v = 0$ .**

**Ex. 3.16 — Prove que se  $u \cdot v = 0$  para todo vetor  $v$  então  $u = 0$ .**

**Ex. 3.17 — Num triângulo retângulo, a altura relativa a hipote-**

nusa é a média geométrica das projeções ortogonais dos catetos sobre essa hipotenusa. Prove esse fato escolhendo um sistema de coordenadas no qual a hipotenusa esta sobre o eixo  $OX$  e o vértice do ângulo reto sobre o eixo  $OY$ .

**Ex. 3.18** — Mostre que o ângulo entre as projeções  $\text{Proj}_w u$  e  $\text{Proj}_w v$  é igual ao ângulo entre os vetores  $u$  e  $v$ .

## 4 Produto Vetorial: Vetor Perpendicular a dois Vetores Dados

Voltemos nossa atenção agora para um novo problema: dado dois vetores não paralelos  $u$  e  $v$  como podemos encontrar um novo vetor  $w$  perpendicular aos dois vetores dados? Note que, ao contrário do que ocorre com a projeção, este problema não possui uma única solução. De fato, se encontrarmos um vetor  $w$  satisfazendo as condições acima, qualquer vetor  $\lambda w$  também satisfará.

Passemos à solução. Como sempre, tomemos primeiro uma base ortonormal  $(i, j, k)$  e façamos  $u = a_1i + a_2j + a_3k$  e  $v = b_1i + b_2j + b_3k$ . Vamos denotar por  $w = xi + yj + zk$  o vetor que queremos determinar. Como queremos que o vetor  $w$  seja perpendicular aos vetores  $u$  e  $v$ , precisamos então que  $w \cdot u = 0$  e que  $w \cdot v = 0$ .

Temos assim o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = -a_3z \\ b_1x + b_2y = -b_3z \end{cases}$$

Como  $u$  e  $v$ , pelo exercício 3.14, podemos supor sem perda de generalidade que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

e, usando a regra de Cramer, concluimos que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_3z & a_2 \\ -b_3z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = z \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

e

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -a_3z \\ b_1 & -b_3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -z \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = z \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Escolhendo

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

temos que

$$w = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

Motivados pelos cálculos acima, definimos:

**Definição 3.25.** O produto vetorial de  $u = (a_1, a_2, a_3)$  e  $v = (b_1, b_2, b_3)$  (num sistema de coordenadas cartesianas), denotado por  $u \times v$ , é o vetor obtido pelo seguinte determinante formal:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Antes de continuar apresentaremos algumas propriedades do produto vetorial.

**Teorema 3.26.** Dados os vetores  $u = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $v = (b_1, b_2, b_3)$  e  $w = (c_1, c_2, c_3)$  o produto vetorial possui as seguintes propriedades:

1 **Anti-simetria**  $u \times w = -w \times u$

2 **Distributiva:**  $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$

3 **Produto misto**  $u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

4  $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - |u \cdot v|^2$

5  $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \text{sen}(\theta)$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $u$  e  $v$ .

**Demonstração.** A demonstração dos três primeiros itens é direta e será deixada como exercícios:

Para demonstrarmos a quarta propriedade basta observar que

$$\begin{aligned}
 & \|u\|^2 \|v\|^2 - |u \cdot v|^2 = \\
 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
 &= (a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2) \\
 &\quad - a_1^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - a_2^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3 - a_3^2b_3^2 \\
 &= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_1^2 + \\
 &\quad a_3^2b_2^2 (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + a_1b_2 - a_2b_1 \\
 &= \|u \times v\|^2.
 \end{aligned}$$

A quinta propriedade decorre facilmente da anterior, bastando para isso lembrar que

$$|u \cdot v|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \cdot \cos^2(\theta)$$

e portanto

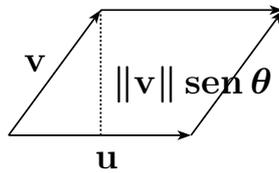
$$\begin{aligned}
 \|u \times v\|^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - |u \cdot v|^2 \\
 &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \cdot \cos^2(\theta) \\
 &= \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2(\theta)) = \\
 &= \|u\|^2 \|v\|^2 \operatorname{sen}^2(\theta)
 \end{aligned}$$

Vamos agora explorar algumas consequências geométricas do produto vetorial.

## Área de um Paralelogramo e de um Triângulo

Primeiro considere o paralelogramo determinado por dois vetores não paralelos  $u$  e  $v$ , como na figura abaixo

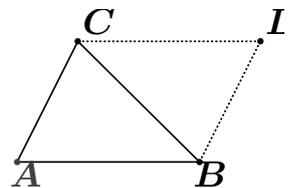
A altura do paralelogramo é dada por  $\|v\| \operatorname{sen}(\theta)$  e portanto, da propriedade 5 do produto vetorial, concluimos facilmente



que sua área é dada por  $\|u\| \|v\| \text{sen}(\theta) = \|u \times v\|$ . Em resumo, mostramos que a área do paralelogramo de lados  $u$  e  $v$  é igual ao comprimento do produto vetorial destes vetores.

$$A = \|u \times v\|$$

A partir da expressão anterior podemos encontrar uma expressão para a área de um triângulo  $\triangle ABC$ . Para isso considere o paralelogramo determinado pelos vetores  $AB$  e  $BC$ , como na figura abaixo. A diagonal  $BC$  desse paralelogramo divide este em dois triângulos de áreas iguais. Logo a área do triângulo será metade da área do paralelogramo:



$$A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\|$$

## Volume de um Paralelepípedo

A seguir vamos calcular o volume de um paralelepípedo, em função dos vetores  $u = \overrightarrow{AB}$ ,  $v = \overrightarrow{AD}$  e  $w = \overrightarrow{AE}$ .

Sabemos que o volume do paralelepípedo é dado pelo produto  $V = A_b h$  da área  $A_b$  da base pela altura  $h$ . Como já vimos a área da base pode ser calculada por  $A_b = \|u \times v\|$ . Já a altura é dada pela norma da projeção do vetor  $w$  sobre o vetor  $u \times v$ . Como

$$\text{Proj}_{u \times v} w = \frac{(u \times v) \cdot w}{\|u \times v\|^2} (u \times v),$$

segue que

$$\begin{aligned}\|\text{Proj}_{u \times v} w\| &= \frac{|(u \times v) \cdot w|}{\|u \times v\|^2} \|u \times v\| \\ &= \frac{|(u \times v) \cdot w|}{\|u \times v\|}.\end{aligned}$$

Segue portanto que

$$V = A_b h = \|u \times v\| \frac{|(u \times v) \cdot w|}{\|u \times v\|} = |(u \times v) \cdot w|.$$

**Exemplo 3.27.** *Sejam*  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $C = (c_1, c_2)$  *pontos no plano. Então a área do*  $\triangle ABC$  *é dada por*

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

◁

**Demonstração.** Considere os vetores  $a$ ,  $b$  e  $c$  de coordenadas  $a = (a_1, a_2, 1)$ ,  $b = (b_1, b_2, 1)$  e  $c = (c_1, c_2, 1)$ .

É fácil ver que eles são arestas de um tetraedro de altura 1 que tem como base um triângulo congruente ao triângulo  $\triangle ABC$ . Se  $S_{\triangle ABC}$  é a área do triângulo  $\triangle ABC$ , o volume  $V_T$  desse tetraedro é:

$$V_T = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}. \quad (3.8)$$

Por outro lado, temos que, se  $V_P$  é o volume do paralelepípedo de arestas  $a$ ,  $b$  e  $c$ , também vale:

$$V_T = \frac{1}{6} V_P. \quad (3.9)$$

Igualando as equações (3.8) e (3.9) segue:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}V_P = \frac{1}{2}|a \times b \cdot c| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

O resultado anterior nos dá um critério simples para que três pontos no plano sejam colineares.

**Proposição 3.28.** *Sejam  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$ ,  $C = (c_1, c_2)$  pontos no plano. Então eles são colineares se a área do triângulo formado por eles for zero, ou seja se:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

## Exercícios

**Ex. 3.1** — Calcule o produto vetorial entre

- a)  $7i - 3j + 6k$  e  $5i - 15j - 13k$
- b)  $6i - 16j - 15k$  e  $3i + 3j - 2k$
- c)  $3i + 3j$  e  $5i + 4j$

**Ex. 3.2** — Se  $u = (3, 4, 1)$ ,  $v = (2, 3, 2)$  e  $w = (4, 2, 3)$  encontre

- a)  $2u + 3v - 7w$
- b)  $u \cdot w$
- c)  $v \cdot w$ ,
- d)  $u \cdot v$ ,
- e)  $u \times v$ ,

f)  $v \times u$

g)  $w \cdot (v \times u)$

**Ex. 3.3 —** Dados os vetores  $u = (1, 2, -1)$  e  $v = (2, 1, 0)$ . Exprese o vetor  $a = (2, 2, 3)$  como combinação de  $u, v, u \times v$ ;

$$a = -\frac{9}{14}u + \frac{12}{7}v - \frac{11}{14}u \times v$$

**Ex. 3.4 —** Dado  $b = 1, 2, 1$ , determine  $a$  tal que  $a$  é ortogonal ao eixo  $z$  e

$$a \times b = (1, -1, 1)$$

$$a = (1, 1, 0)$$

**Ex. 3.5 —** Determine  $v = (x, y, z)$  tal que

$$(x, y, z) \times (1, 2, -1) = (1, 1, 3)$$

$$(x, y, z) \cdot (3, 1, 1) = 3$$

$$v = \left( \frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right)$$

**Ex. 3.6 —** Sejam os pontos  $P = (1, 1, 2)$ ,  $Q = (1, 2, 0)$  e  $R = (3, 1, 2)$  pontos médios dos lados de um triângulo  $\Delta ABC$ . Calcule a área do triângulo  $\Delta ABC$ .

**Ex. 3.7 —** Prove que  $u \times v = -v \times u$

**Ex. 3.8 — Prove que  $u \cdot v = v \cdot u$**

**Ex. 3.9 — Prove que  $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$**

**Ex. 3.10 — Prove que  $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$**

**Ex. 3.11 — Prove que  $u \times v$  pode ser escrito como o determinante formal**

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

**Ex. 3.12 — Prove que  $u \cdot (u \times v) = v \cdot (u \times v) = 0$  de dois modos: primeiro calculando diretamente e segundo utilizando as propriedades de  $u \times v$ .**

**Ex. 3.13 — Mostre que dois vetores  $u$  e  $v$  são paralelos se, e somente se,  $u \times v = 0$**

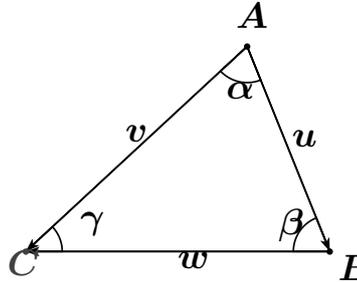
**Ex. 3.14 — Prove que em geral  $u \cdot (v \times w)$  pode ser escrito como o determinante da matriz que tem como componentes**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

**[Dica: *Escreva o determinante em termos dos menores da primeira linha e compare com  $u \cdot (v \times w)$ . Isto também prova que  $u \cdot (v \times w) = v \cdot (w \times u)$ . Porque? ]***

**Ex. 3.15 —** Dado um triângulo  $\triangle ABC$  como na figura a seguir. Usando o produto vetorial demonstre a lei dos senos:

$$\frac{\alpha}{\|w\|} = \frac{\beta}{\|v\|} = \frac{\gamma}{\|u\|}$$



A área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \|u \times v\| = \frac{1}{2} \|u \times w\| = \frac{1}{2} \|v \times w\|$$

e assim temos que

$$\|u \times v\| = \|u \times w\| = \|v \times w\|$$

**Mas**  $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin \alpha$ ,  $\|u \times w\| = \|u\|\|w\| \sin \beta$  e  $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin \gamma$

**E logo:**

$$\frac{\alpha}{\|w\|} = \frac{\beta}{\|v\|} = \frac{\gamma}{\|u\|}$$

**Ex. 3.16 —** Dado um triângulo  $\triangle ABC$  e  $O$  um ponto qualquer, mostre que a área  $A$  do triângulo  $\triangle ABC$  é:

$$A = \frac{1}{2} \|a \times b + b \times c + c \times a\|$$

sendo  $a = \overrightarrow{OA}$ ,  $b = \overrightarrow{OB}$  e  $c = \overrightarrow{OC}$

## 5 Escolha do Sistema de Coordenadas

Um sistema de coordenadas cartesianas do plano pode ser escolhido tomando qualquer ponto  $O$  como origem e qualquer duas retas perpendiculares como os eixos. Em geral resultados geométricos não dependem de como escolhemos nosso sistema de coordenadas, mas ao fazermos a escolha correta podemos simplificar significativamente a resolução de um problema. É possível, por exemplo, fazer com que as coordenadas dos vértices de certas figuras geométricas fiquem mais simples, aumentando a quantidade de zeros em suas coordenadas, simplificando assim a manipulação algébrica.

Considere, por exemplo, um triângulo  $\triangle ABC$ . Vamos descrever esse triângulo através de coordenadas  $A : (x_1, y_1)$ ,  $B : (x_2, y_2)$  e  $C : (x_3, y_3)$  em um sistema de coordenadas  $\Sigma$ .

Consideraremos o seguinte sistema de coordenadas: escolha como eixo  $x$  a reta  $AB$ , e como eixo  $y$  a reta perpendicular a  $AB$  passando por  $C$ . Determine o sistema de coordenadas colocando a origem no ponto  $O$  dado pela intersecção dos dois eixos, e escolhendo uma base ortonormal  $(i, j)$  formada por vetores unitários paralelos a estes eixos. Neste sistema o vértice  $A$  tem então coordenadas do tipo  $(a, 0)$  e o ponto  $B$  coordenadas do tipo  $(b, 0)$ , já que ambos estão sobre o eixo  $x$ . Já o ponto  $C$ , que está posicionado sobre o eixo  $y$ , tem coordenadas do tipo  $(0, c)$ .

Veja que com a escolha adequada do sistema de coordena-

das conseguimos reduzir o número de variáveis de 6 para apenas 3.

A seguir apresentamos exemplos onde a escolha de um sistema de coordenadas adequado facilita a demonstração de propriedades geométricas. Você consegue demonstrar estas propriedades usando um sistema de coordenadas arbitrário?

**Exemplo 3.29.** *Se um triângulo é isósceles, as medianas dos dois lados de mesmo comprimento possuem o mesmo tamanho.*



**Solução:** Consideremos o mesmo sistema de coordenadas descrito acima. Neste sistema temos  $A : (a, 0)$ ,  $B : (b, 0)$  e  $C : (0, c)$ .

Supondo que segmentos  $\overline{CA}$  e  $\overline{CB}$  possuem o mesmo comprimento, concluímos que

$$\sqrt{a^2 + c^2} = |\overline{CA}| = |\overline{CB}| = \sqrt{b^2 + c^2}$$

e logo  $a^2 = b^2$ . Segue que  $a = b$  ou  $a = -b$ . Se  $a = b$  não temos um triângulo já que dois vértices coincidem, de onde segue que  $a = -b$ .

Seja  $M_1$  o ponto médio de  $\overline{AC}$ . Pelo exemplo 3.6 temos que as coordenadas de  $M_1 = \left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right) = \left(\frac{-b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ . Analogamente, o ponto médio  $M_2$  de  $\overline{BC}$  tem coordenadas  $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ .

Como a mediana de  $\overline{CA}$  é dada pelo segmento  $\overline{BM_1}$  e a de  $\overline{CB}$  é dada pelo segmento  $\overline{AM_2}$ , segue que

$$|\overline{BM_1}| = \left\| \left(-\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) - (b, 0) \right\| = \sqrt{\frac{9b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

e

$$|\overline{AM_2}| = \left\| \left( \frac{b}{2}, \frac{c}{2} \right) - (-b, 0) \right\| = \sqrt{\frac{9b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}$$

e as medianas relativas aos vértices  $A$  e  $B$  possuem o mesmo tamanho. □

**Exemplo 3.30.** *Num triângulo retângulo o ponto médio da hipotenusa é equidistante dos três vértices.* ◁

**Solução:** Para um triângulo retângulo  $\triangle ABC$  com hipotenusa  $AB$  um sistema de coordenadas adequado é o que toma como origem o vértice  $C = O$  e como eixos as retas que ligam  $C$  a  $A$  e  $C$  a  $B$ .

Neste Sistema de coordenadas temos que  $A : (a, 0)$ ,  $B : (0, b)$  e  $C : (0, 0)$ . O comprimento da hipotenusa é

$$|AB| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Já o ponto médio  $M$  da hipotenusa tem coordenadas  $M : \left( \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$  e logo o comprimento da mediana é

$$|CM| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} |AB|$$

Logo temos que a distância do vértice  $C$  a  $M$  é metade da distância entre os vértices  $A$  e  $B$ , e logo  $M$  está equidistante dos três vértices. □

## Exercícios

**Ex. 3.1** — Mostrar que  $(-5, 0)$ ,  $(0, 2)$  e  $(0, -2)$  são os vértices de um triângulo isósceles e achar sua área.

**Ex. 3.2** — Sejam  $A = (a, 0)$  e  $B = (0, a)$ , com  $a \neq 0$ . Determine  $x$  de modo que o ponto  $C = (x, x)$  seja o terceiro vértice do triângulo equilátero  $ABC$ .

**Ex. 3.3** — Dado um paralelogramo  $ABCD$ , escolha um sistema de coordenadas adequado e mostre que  $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$  (ou seja, a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das suas diagonais).

**Ex. 3.4** — Num triângulo retângulo, a altura relativa a hipotenusa é a média geométrica das projeções ortogonais dos catetos sobre essa hipotenusa. Prove esse fato escolhendo um sistema de coordenadas no qual a hipotenusa esta sobre o eixo  $OX$  e o vértice do ângulo reto sobre o eixo  $OY$ .

**Ex. 3.5** — Se no triângulo  $ABC$  as medianas que partem dos vértices  $A$  e  $B$  são iguais, prove que os lados  $AC$  e  $BC$  são iguais, logo o triângulo é isósceles.

**Ex. 3.6** — Enunciar e demonstrar a recíproca do teorema de Pi-

tágoras.

**Ex. 3.7** — Se as diagonais de um paralelogramo são iguais então ele é um retângulo.

**Ex. 3.8** — Determine a soma dos quadrados (dos comprimentos) das medianas do triângulo  $\Delta ABC$ , sabendo que os lados do  $\delta ABC$  medem  $a, b$  e  $c$ .

## 6 O Problema do Lugar Geométrico

Até este ponto estudamos como representar algebricamente o espaço euclidiano, e como podemos usar tais representações na resolução de alguns problemas geométricos. Nesta seção vamos dar um passo além, e iniciar os estudos sobre um dos problemas fundamentais da geometria analítica: o problema do lugar geométrico. Em poucas palavras, dada uma figura ou condição geométrica queremos determinar uma equação ou condições algébrica que a represente. Ou ainda, de modo contrário, dada uma equação ou condição algébrica determinar sua representação geométrica.

### O lugar geométrico de uma equação

Dada uma equação (por simplicidade, em duas  $x, y$  ou três variáveis  $x, y, z$ )

$$f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad g(x, y, z) = 0 \quad (3.10)$$

cada par ou tripla de números reais que satisfizer a equação acima é dito solução da equação e o conjunto de pontos cujas

coordenadas satisfazem a equação (3.10) acima é chamado de lugar geométrico da equação.

É importante ressaltar que o lugar geométrico, como definido acima, depende do sistema de coordenados escolhidos. Em outras palavras, uma certa figura ou condição geométrica pode ser descrita algebricamente de várias formas distintas, dependendo, dentre outros fatores, do sistema de coordenadas escolhido. Por esta razão, buscaremos dentre as possíveis representações aquela que proporcione a maior simplicidade algébrica.

Durante esse processo (e em vários outros) podemos substituir uma certa equação por outra que possua as mesmas soluções, ou seja, que defina o mesmo lugar geométrico. Neste sentido, duas equações algébricas são ditas equivalentes se definem o mesmo lugar geométrico.

**Exemplo 3.31.** *Analise a equação*

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

*Observe que tomando  $C = (2, 3)$  a distância  $r$  de um ponto qualquer  $(x, y)$  no plano euclidiano até  $C$  é dada por*

$$r = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2},$$

*ou de modo equivalente*

$$r^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2.$$

*Deste modo vemos que um ponto  $(x, y)$  no plano satisfaz a equação acima se, e somente se, sua distância para o ponto  $C : (2, 3)$  for igual a 5.*

**Em outras palavras, escolhido o sistema de coordenadas descrito acima, o lugar geométrico da equação**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

**é um círculo de raio  $r$  e centro no ponto de coordenadas  $(a, b)$ .**

◁

**Exemplo 3.32. Generalizando o exemplo anterior, um círculo de centro  $C$  e raio  $r$  é definido como o conjunto dos pontos cuja distância ao centro é igual a  $r$ . Esta é a condição geométrica que descreve o círculo. Busquemos agora uma representação algébrica. Se escolhermos um sistema de coordenadas cartesiano no qual  $C : (a, b)$ , então todo ponto  $P : (x, y)$  no círculo deve satisfazer**

$$|CP| = r,$$

**ou seja,**

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r,$$

**ou ainda a equação algébrica equivalente**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

◁

**É importante observar que um ponto pertence ao círculo (ou seja esse ponto dista  $r$  do centro) se e somente se satisfizer a equação  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .**

**Em geral, sempre que tivermos este tipo de relação entre uma curva e uma equação diremos que esta é a equação da curva.**

**Definição 3.33.** *Diremos que uma equação  $f(x, y) = 0$  é a equação de um dado lugar geométrico se todo ponto que satisfaz a equação pertence ao lugar geométrico e todo ponto que pertence ao lugar geométrico satisfaz a equação.*

**Exemplo 3.34.** *Dado um sistema de coordenadas cartesiano, lugar geométrico conhecido descrito pelo eixo  $x$  é formado por todos os pontos cuja segunda coordenada ( $y$ ) é zero, ou seja, a equação do eixo  $x$  é  $y = 0$ .*

◁

**Exemplo 3.35.** *Como vimos  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  é a equação do círculo de raio  $r$  e centro em  $P : (a, b)$ .*

◁

**Exemplo 3.36.** *Determinar a equação do lugar geométrico formado por todos os pontos cuja a distância a um ponto fixo  $F$  é igual a distância a uma reta fixa  $d$ .*

◁

**Solução:** Dados uma reta fixa  $d$ , chamada diretriz, e um ponto fixo  $F$  chamado foco, a parábola é o conjunto dos pontos  $P$  equidistantes do foco e da diretriz, ou seja, o ponto  $P$  tal que

$$\|\overrightarrow{PD}\| = \|\overrightarrow{PF}\|,$$

onde  $D$  é o ponto de  $d$  mais próximo de  $P$ .

A reta passando por  $F$  perpendicular a  $d$  é chamada eixo da parábola. O ponto de intersecção entre o eixo da parábola e a parábola é chamado vértice da parábola. Observe que o vértice está localizado na metade da distância do foco a diretriz.

Escolheremos como sistema de coordenadas os eixos formados pelo eixo da parábola e a reta passando pelo vértice da parábola, perpendicular ao eixo. Essa última reta é paralela a diretriz da parábola.

Seja  $2m$  a distância entre o foco e a diretriz  $d$ . No sistema de coordenadas que adotamos  $F$  tem coordenadas  $(m, 0)$  e a equação da diretriz é  $x = -m$ . Como  $P$  satisfaz  $\|\overrightarrow{PD}\| = \|\overrightarrow{PF}\|$  temos que

$$\sqrt{(x - m)^2 + y^2} = x + m.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade concluímos que

$$\begin{aligned}(x - m)^2 + y^2 &= (x + m)^2 \\ m^2 - 2mx + x^2 + y^2 &= (m^2 + 2mx + x^2) \\ y^2 &= 4mx\end{aligned}$$

é a equação satisfeita pelos pontos da parábola neste sistema de coordenadas. □

### Intersecção Dadas duas equações

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0,\end{aligned}$$

os pontos que pertencem ao lugar geométrico de ambas as equações é chamados de pontos de intersecção. Analiticamente as coordenadas de tal ponto satisfazem ambas as equações.

A intersecção de duas equações pode ser vazia, neste caso diremos que os seus lugares geométrico não se interceptam.

**Exemplo 3.37.** *Determinar analítica e graficamente os pontos de intersecção de*

$$x - 12 = 0$$

$$y^2 - 3x = 0$$

◁

**Solução:** Primeiro observemos que  $x - 12 = 0$  é a equação de uma reta paralela ao eixo  $y$ , enquanto  $y^2 - 3x = 0$  é a equação de uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo  $y$ . Assim o conjunto dos pontos de intersecção dos dois lugares geométricos é formado de no máximo dois pontos.

Analiticamente, concluimos da primeira equação que todo ponto de intersecção  $(x, y)$  deve ter  $x = 12$ . Substituindo na equação da parábola encontramos que

$$y^2 = 36,$$

e portanto

$$y = \pm 6.$$

De modo que os pontos de intersecção são  $(12, 6)$  e  $(12, -6)$ .

□

## Exercícios

**Ex. 3.1 —** Escrever a equação do lugar geométrico dos pontos no plano que satisfazem a condição:

- O conjunto dos pontos  $P$  tal que  $P$  está sempre duas unidades a esquerda do eixo  $Y$
- O conjunto dos pontos  $P$  tal que  $P$  dista sempre duas unidades do eixo  $X$
- O conjunto dos pontos  $P$  tal que a abscissa de  $P$  é igual ao inverso da sua ordenada
- O conjunto dos pontos  $P$  tal que  $P$  está a distância igual do eixo  $x$  e do eixo  $y$ .

**Ex. 3.2 —** Determine a equação do lugar geométrico de um ponto que se move de modo de modo que a soma das distâncias a dois pontos  $F : (c, 0)$  e  $F':(-c, 0)$  é constante igual a  $2a$ .

**Ex. 3.3 —** Determinar a equação do lugar geométrico de um ponto no espaço que se move de modo que a soma das distâncias a dois pontos  $F : (c, 0, 0)$  e  $F':(-c, 0, 0)$  é constante igual a  $2a$ .

**Ex. 3.4 —** Dados dois pontos dois pontos  $F : (c, 0, 0)$  e  $F':(-c, 0, 0)$ , determinar a equação do lugar geométrico de um ponto  $P$  que se move no espaço de modo que

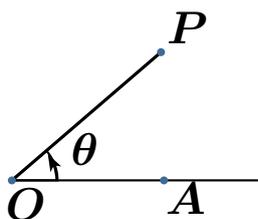
$$||PF|| - ||PF'|| = 2a$$

Ex. 3.5 — Determinar a equação do lugar geométrico de um ponto que se move de modo que a distância ao ponto  $(1, 0, 0)$  é sempre igual a distância ao plano  $YZ$ .

## 7 Coordenadas Polares

Nesta seção estudaremos uma nova forma de descrever a localização de pontos no plano euclidiano  $\mathbb{E}^2$ : as coordenadas polares. A principal motivação para a utilização desse sistema de coordenadas é que, neste sistema, curvas com algum tipo de simetria em relação a origem  $O$  do plano, como por exemplo o círculo e a elipse, podem ser descritas de maneira mais simples que nos sistemas de coordenadas vetoriais.

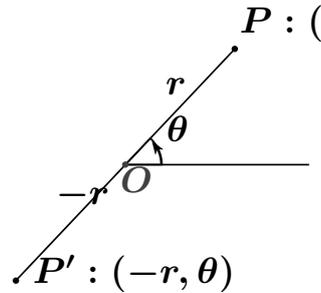
Num sistema de coordenadas polares um ponto  $P$  é localizado no plano em relação a uma semi-reta  $\overrightarrow{OA}$ . A origem  $O$  dessa semi-reta é denominada origem do sistema de coordenadas polares ou polo e a semi-reta  $\overrightarrow{OA}$  é dito eixo polar.



As coordenadas de um ponto  $P$  num sistema de coordenadas polares é um par  $(r, \theta)$ , onde  $r$  é a distância do ponto ao polo, isto é,  $r = d(O, P)$  e  $\theta$  é o ângulo orientado que a semi-reta  $\overrightarrow{OP}$  faz com a semi-reta  $\overrightarrow{OA}$ . Claramente a posição do ponto fica bem determinada se conhecemos  $r$  e  $\theta$ . O par  $(r, \theta)$  é denominado coordenadas polares do ponto  $P$ , e neste caso escreveremos simplesmente  $P : (r, \theta)$

Fig. 3.7: Coordenadas polares

Como  $\theta$  é o ângulo orientado entre o eixo  $OA$  e a reta  $OP$  seus valores podem ser positivo ou negativo conforme a orientação no sentido anti-horário ou horário do ângulo.



Por outro lado, o raio  $r$ , sendo a distância de  $P$  a origem, é naturalmente um número real positivo, porém podemos estender seu significado de modo a termos raios negativos. Para isso convencionamos que o ponto  $(-r, \theta)$  com  $r > 0$  deve ser construído do seguinte modo: construímos uma semi-reta faz uma ângulo  $\theta$  com o eixo polar e estendemos essa semi-reta. marcamos o ponto  $(-r, \theta)$  como sendo o ponto sobre a extensão da semi reta que dista  $r$  do polo  $O$ .

Uma diferença fundamental entre os sistemas de coordenadas cartesianas e o sistema de coordenadas polares é que em coordenadas polares um ponto  $P$  pode ser descrito por uma infinidade de coordenadas. Por exemplo, a origem  $O$  é descrita por todas as coordenadas da forma  $(0, \theta)$  ., enquanto que um ponto  $P : (r, \theta)$  distinto da origem é descrito por todas as coordenadas da forma  $(r, \theta + 2\pi n)$  e  $(-r, \theta + \pi(2n + 1))$ .

Todo ponto distinto da origem possui pelo menos uma coordenada na qual o raio é positivo e o angulo  $\theta$  esteja entre  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Denominamos esse par como o conjunto principal

de coordenadas polares do ponto em questão.

## Relação entre Coordenadas Cartesianas e Polares

A cada sistema de coordenadas polares podemos associar um sistema cartesiano escolhendo como a origem o polo, o eixo  $x$  como o eixo polar e o eixo  $y$  como a reta perpendicular ao eixo polar passando pela origem. Esse sistema de coordenadas é chamado sistema cartesiano associado. Quando, ao tratarmos de coordenadas polares, nos referirmos as coordenadas  $x$ ,  $y$ , eixos  $x$  ou  $y$ , etc. de um sistema cartesiano este sempre será o sistema cartesiano associado.

Observe a Figura 3.8:

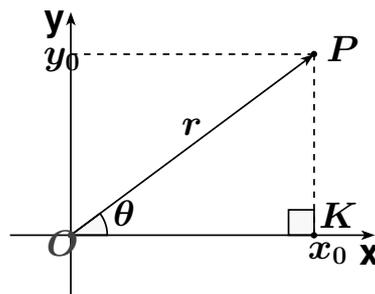


Fig. 3.8: Coordenadas polares

É fácil ver que:

$$\begin{aligned}x_0 &= r \cos(\theta) \\y_0 &= r \operatorname{sen}(\theta) \\r &= \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{y_0}{x_0}\end{aligned}$$

Assim temos que as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas do sistemas associado se relacionam segundo a seguinte tabela:

<b>Coordenadas Cartesianas</b>	<b>Coordenadas Polares</b>
$(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ $(x, y)$	$(r, \theta)$ $(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}))$

**Exemplo 3.38.** *Determinar as coordenadas retangulares do ponto  $P$  cujas coordenadas polares são  $(3, 120^\circ)$*

◁

**Solução:** Neste caso  $r = 3$  e  $\theta = 120^\circ$  logo as coordenadas são:

$$x = r \cos(\theta) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \quad (3.11)$$

$$y = r \operatorname{sen}(\theta) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (3.12)$$

Ou seja,  $P : \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

□

**Exemplo 3.39.** *Determinar as coordenadas polares do ponto cujas coordenadas retangulares são  $(1, -1)$ .*

◁

**Solução:** Temos que  $r = \pm\sqrt{1+1} = \pm\sqrt{2}$  e que  $\theta = \operatorname{arctg}(-1)$ . Para  $0 \leq \theta < 2\pi$ . temos que  $\theta = \frac{7}{4}\pi$ .

Logo o conjunto principal de coordenadas do ponto é  $\left(1, \frac{7}{4}\pi\right)$ .

Outras coordenadas possíveis para o ponto são  $\left(1, \frac{7}{4}\pi + 2\pi n\right)$  e  $\left(-1, \frac{7}{4}\pi + \pi(2\pi n + 1)\right)$ .

□

**Exemplo 3.40.** Determinar a equação retangular do lugar geométrico cuja equação polar é

$$r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$$

◁

**Solução:** A equação dada é equivalente a  $r - r \cos \theta = 2$ . Substituindo  $r$  e  $r \cos \theta$  temos:

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} - x = 2$$

Transpondo  $x$  e elevando ao quadrado temos

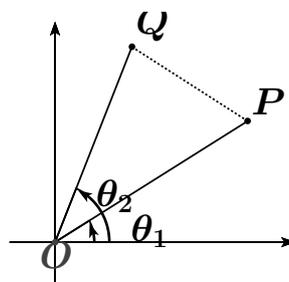
$$x^2 + y^2 = (2 + x)^2$$

que simplifica para  $y^2 = 4(x + 1)$  (uma parábola). □

**Exemplo 3.41.** Mostre que a distância  $d$  entre os pontos  $(r_1, \theta_1)$  e  $(r_2, \theta_2)$  em coordenadas polares é

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

◁



**Solução:** Usando a lei dos cossenos temos:

$$\|PQ\|^2 = \|OP\|^2 + \|OQ\|^2 - 2\|OP\|\|OQ\| \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.13)$$

$$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (3.14)$$

**E conseqüentemente a distância do ponto  $P$  ao ponto  $Q$  é:**

$$\|PQ\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

□

## Retas e Planos

Dando continuidade ao nosso estudo sobre lugares geométricos e suas equações, vamos nos concentrar agora no estudo de dois elementos geométricos fundamentais da geometria as retas e os planos.

Ressaltamos, que em todo este capítulo utilizaremos um sistema de coordenadas cartesiano  $(i, j, k, O)$ .

### 1 Equações da Reta

Um dos postulados da geometria Euclidiana nos diz que, dados dois pontos no espaço existe uma única reta contendo estes pontos. Isso nos leva ao seguinte problema dados dois pontos  $A$  e  $B$ , determinar a equação da reta  $r$  que passa por estes dois pontos.

Para isto, observe que dado um ponto  $X$  em  $r$ , o vetor  $\overrightarrow{AX}$  é paralelo ao vetor  $\overrightarrow{AB}$ , e portanto existe um escalar  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$ . Assim, temos que

$$X = A + \overrightarrow{AX} = A + t\overrightarrow{AB},$$

e considerando  $A : (a, b, c)$  e  $v = \overrightarrow{AB} = v_1i + v_2j + v_3k$ , vemos que um ponto  $X : (x, y, z)$  pertence a reta  $r$  se e somente se  $\overrightarrow{AX} = vt$ , ou ainda

$$r : X = A + vt. \quad (4.1)$$

Expandindo obtemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} t, \quad (4.2)$$

ou de forma mais simplificada:

$$r : \begin{cases} x = a + v_1t \\ y = b + v_2t \\ z = c + v_3t \end{cases} \quad (4.3)$$

A equação **4.1** é conhecida como equação vetorial da reta  $r$ , e nestas condições o ponto  $A$  é chamado ponto inicial e o vetor  $v$  é dito vetor diretor da reta  $r$ . As equações em **4.3** são chamadas as equações paramétricas da reta  $r$ .

Heuristicamente, pensando no parâmetro  $t$  como tempo, podemos entender esta equação como a trajetória de um ponto que se move no espaço tendo o ponto  $A$  como o ponto inicial e o vetor  $v$  como a velocidade, e assim para cada valor de  $t$  obtemos um ponto no espaço.

Outra forma de representar a reta  $r$  pode ser obtida ao isolarmos o parâmetro  $t$  nas equações paramétricas. Assim, se em **4.3** tivermos  $v_1 \neq 0$ ,  $v_2 \neq 0$  e  $v_3 \neq 0$ , podemos eliminar o parâmetro  $t$  e obter

$$\frac{x - a}{v_1} = \frac{y - b}{v_2} = \frac{z - c}{v_3},$$

chamadas de equações da reta  $r$  na forma simétrica.

É importante observar que a equação de uma reta, em qualquer uma de suas formas, não é única. De fato, as equações dependem fundamentalmente da escolha do ponto inicial e do vetor diretor, gerando assim uma infinidade de equações para representar um mesma reta. Para entender esta afirmativa, consideremos uma reta  $r : X = A + vt$ . Escolhendo um ponto  $B$  em  $r$ , podemos trocar o ponto inicial por  $B$  e assim representar  $r$  por  $r : X = B + vt$ . Do mesmo modo, trocando o vetor diretor  $v$  por outro vetor  $v'$  paralelo, obtemos que  $X = A + v't$  é também uma equação vetorial para  $r$  (veja exercício ??).

**Exemplo 4.1.** *Encontre as equações da reta que passa pelos pontos  $A : (0, 1, 1)$  e  $B : (1, 3, 0)$ .*

◁

**Solução:** Escolhendo  $v = \overrightarrow{AB} : (1, 2, -1)$  como vetor diretor e  $A$  como ponto inicial obtemos a equação vetorial

$$r : X = A + vt$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t$$

As equações paramétricas ficam então  $x = t, y = 1 + 2t, z = 1 - t$ .

As equações simétricas para essa reta são obtidas isolando o parâmetro  $t$  nas equações anteriores, ou seja,

$$x = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{-1}.$$

**Exemplo 4.2.** Dada a reta  $r$  de equação paramétricas  $r : X = (1, 3, 2) + (1, 1, 2)t$ .

- 1** Encontre três pontos pertencentes a essa reta.
- 2** Encontre um conjunto de equações vetoriais para essa reta na qual o ponto inicial seja distinto.
- 3** Encontre um conjunto de equações vetoriais para essa reta na qual o vetor diretor seja distinto



### **Solução:**

- 1** Claramente o ponto  $(1, 3, 2)$  pertence a essa reta. Para obter outros pontos desta reta bastam que escolhamos valores distintos para o parâmetro  $t$ . Assim, se  $t = 1$  temos que  $(1, 3, 2) + (1, 1, 2) = (2, 4, 4)$  pertence a reta. Tomando  $t = -2$  temos que  $(1, 3, 2) - 2(1, 1, 2) = (-1, 1, -2)$  pertence a reta.
- 2** Substituindo o ponto inicial por outro ponto pertencente a reta obtemos equações com as propriedades exigidas. Escolhendo, por exemplo, o ponto  $(-1, 1, -2)$  obtemos a equação vetorial

$$r : X = (-1, 1, -2) + (1, 1, 2)t.$$

- 3** Substituindo o vetor diretor por um de seus múltiplos não nulos obtemos equações com as propriedades exigidas.

Se, por exemplo, multiplicarmos o vetor diretor por  $\frac{1}{2}$  encontramos a equação vetorial

$$r : X = (-1, 1, -2) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)t.$$

□

**Exemplo 4.3.** *Verifique se os pontos  $A : (4, 1, 5)$  e  $B : (0, 0, 0)$  pertencem a reta  $r : (1, 1, 2) + (1, 0, 1)t$ .*

◁

**Solução:** Para que o ponto  $A$  pertença a reta  $r$  é necessário que exista  $t \in \mathbb{R}$  tal que:

$$(4, 1, 5) = (1, 1, 2) + (1, 0, 1)t$$

Ou seja, deve existir  $t$  tal que o sistema de equações

$$\begin{cases} 4 = 1 + t \\ 1 = 1 + 0t \\ 5 = 2 + t \end{cases}$$

tenha solução.

O sistema acima possui solução,  $t = 3$ , e logo o ponto  $A$  pertence à reta  $r$ .

De modo análogo, para que o ponto  $B$  pertença a reta  $r$  é necessário que exista  $t \in \mathbb{R}$  tal que

$$(0, 0, 0) = (1, 1, 2) + (1, 0, 1)t,$$

ou seja, deve existir  $t$  tal que o sistema de equações

$$\begin{cases} 0 = 1 + t \\ 0 = 1 + 0t \\ 0 = 2 + t \end{cases}$$

tenha solução.

Como sistema acima não possui solução, o ponto  $B$  não pertence à reta  $r$ .

□

**Exemplo 4.4.** *Identifique o lugar geométrico dado pelas equações*

$$\frac{2 - 3x}{7} = \frac{2y - 2}{3} = \frac{5z - 1}{2}$$

◁

**Solução:** Dividindo os numeradores e os denominadores de cada fração pelo coeficiente das variáveis, obtemos

$$\frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{y - 1}{\frac{3}{2}} = \frac{z - \frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}.$$

Esta são as equações na forma simétrica de uma reta. E portanto o lugar geométrico é uma reta passando pelo ponto  $(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{5})$  com vetor diretor  $(\frac{7}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{5})$ . □

**Exemplo 4.5.** *Verifique se as retas  $r : X = (1, 1, 1) + (1, 0, 1)t$  e  $s : X = (0, 4, 3) + (-1, 1, 0)t$  se interceptam.*

◁

**Solução:** Para que um ponto  $P$  pertença simultaneamente as retas  $r$  e  $s$ , devem existir números reais  $t_1$  e  $t_2$  tais que

$$P = (1, 1, 1) + (1, 0, 1)t_1 \quad \text{e} \quad P = (0, 4, 3) + (-1, 1, 0)t_2.$$

De onde encontramos que

$$(1, 1, 1) + (1, 0, 1)t_1 = (0, 4, 3) + (-1, 1, 0)t_2$$

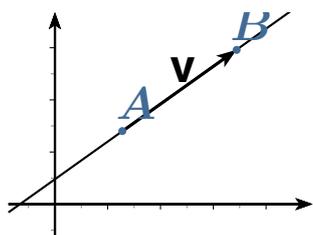
Resolvendo o sistema acima encontramos  $t_1 = 2, t_2 = -3$ . Como o sistema possui solução, concluímos que as retas  $r$  e  $s$  se interceptam.

Para determinar o ponto de intersecção substituímos  $t \rightarrow t_1$  na equação  $P = (1, 1, 1) + (1, 0, 1)t_1$  e obtemos

$$P : ((3, 1, 3)).$$

É importante observar que para determinarmos se as retas interceptam, usamos parâmetros distintos para cada reta. Isso é fundamental, pois o ponto  $P$  apesar de pertencer a ambas as retas, é descrito em cada conjunto de equações por um valor distinto de  $t$ . □

## Equações da reta no plano



No caso bidimensional, as equações que descrevem as linhas retas podem ser descritas de modo mais simplificado. Começamos observando que, de modo análogo ao caso tridimensional, escolhidos um ponto inicial  $A$  e um vetor diretor  $v$ , esta reta pode ser descrita vetorialmente como:

$$r : X = A + vt \tag{4.4}$$

Nesse caso a expressão em coordenadas fica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} t \tag{4.5}$$

Se  $v_1, v_2 \neq 0$  podemos escrever a forma simétrica das equações da reta no plano

$$\frac{x - a}{v_1} = \frac{y - b}{v_2},$$

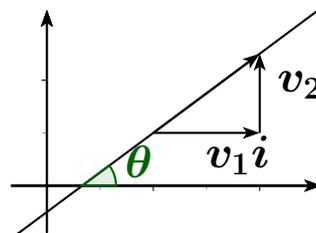
ou ainda,

$$y - b = \frac{v_2}{v_1}(x - a).$$

O número real  $m = \frac{v_2}{v_1}$  é denominado coeficiente angular da reta  $r$ , e admite uma interpretação geométrica muito simples: o coeficiente angular é a tangente do ângulo entre a reta e o eixo  $x$ . Com essa definição é fácil ver que, para as retas não paralelas ao eixo  $y$ , podemos escolher o vetor diretor como  $i + mj$ , e assim obter equação afim ou reduzida da reta bidimensional

$$y = mx + n,$$

onde  $n = b - ma$ .



As retas paralelas aos eixos coordenados ( $v_1 = 0$  ou  $v_2 = 0$ ) são especiais. Para as retas paralelas ao eixo  $y$ , ou seja, retas com vetor diretor  $j$ , o coeficiente angular não está definido já que  $m = \frac{v_2}{v_1}$ . Para obter uma equação para este tipo de reta, basta observar que todos os pontos possuem a primeira coordenada (coordenada  $x$ ) iguais. Ou seja, se a reta passa pelo ponto  $A : (a, b)$  então todo ponto  $(x, y)$  em  $r$  é do tipo  $(a, y)$ , e portanto sua equação será dada por  $x = a$ .

Do mesmo modo, se a reta é paralela ao eixo  $x$  e passa por um ponto  $A : (a, b)$ , então sua equação é dada por  $y = b$ .

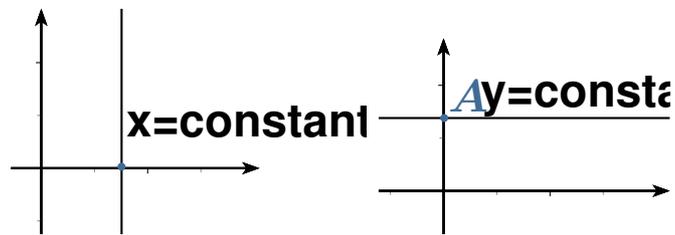


Fig. 4.1: Retas paralelas aos eixos coordenados

**Observação 4.6.** *É fácil ver que a equação de toda reta no plano pode ser escrita na forma:*

$$ax + by + c = 0,$$

*com  $a, b, c$  constantes reais. Tal forma é conhecida como forma canônica ou equação cartesiana da reta no plano.*

*A equação na forma canônica é única a menos de uma constante multiplicativa, isto é  $ax + by + c = 0$  e  $a'x + b'y + c' = 0$  representam uma mesma reta se e somente se existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $a = \lambda a', b = \lambda b'$  e  $c = \lambda c'$  (Por quê?).*

**Exemplo 4.7.** *Encontre a equação da reta que passa pelo ponto  $(1, 1)$  e que faz ângulo de  $60^\circ$  com o eixo  $x$ .*

◁

**Exemplo 4.8.** *Seja  $r$  a reta que passa pelos pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ . Mostre que o coeficiente angular da reta  $r$  é:*

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

◁

**Solução:** O vetor diretor dessa reta é:

$$(x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j$$

E conseqüentemente  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .

□

**Exemplo 4.9.** *Mostre que a equação da reta passando pelos pontos  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$ , pode ser escrita como:*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

◁

**Solução:** Seja  $P : (x, y)$  um ponto qualquer. O ponto  $P$  pertence a reta determinada pelos pontos  $A$  e  $B$  se e somente se  $A, B, P$  forem colineares, e o resultado segue do critério da proposição 3.28. □

## Exercícios

**Ex. 4.1 —** Desenhe a reta que passa por  $(-1, 3)$  e  $(3, 0)$ . Determine sua equação e onde ela intercepta os eixos.

$r : 3x + 4y - 9 = 0$ . Intersecções:  $0, \frac{9}{4}$  e  $(3, 0)$ .

**Ex. 4.2 —** Determine as equações paramétricas e na forma canônica das retas que passam pelos pontos  $A$  e  $B$ .

a)  $A = (3, 5)$  e  $B = (-2, 3)$

b)  $A = (0, 1)$  e  $B = (1, 0)$

a.) Equações paramétricas:  $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$

Equações na forma canônica:  $2x - 5y + 19 = 0$

b.) Equações paramétricas:  $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases}$

Equações na forma canônica:  $x + y - 1 = 0$

**Ex. 4.3 —** Determine as equações paramétricas e na forma simétrica (se existirem) das retas que passam pelos pontos  $A$  e  $B$ .

a)  $A = (3, 5, 1)$  e  $B = (-2, 3, 2)$

b)  $A = (0, 1, 0)$  e  $B = (1, 0, 0)$

c)  $A = (0, 1, 1)$  e  $B = (0, 0, 0)$

d)  $A = (3, 2, 1)$  e  $B = (6, 1, 4)$

**Ex. 4.4 —** Escreva as equações do movimento do ponto  $P : (x, y, z)$  que começa em  $(3, -1, -5)$  e que se move retilineamente e uniformemente na direção do vetor  $(-2, 6, 3)$  com velocidade  $v = 14$ .

**Ex. 4.5 —** Escreva as equações do movimento do ponto  $P : (x, y, z)$  que se move retilineamente e uniformemente e percorreu a distância distância entre os pontos  $(-7, 12, 5)$  e  $(9, -4, -3)$  no intervalo de tempo  $t_1 = 1$  e  $t_2 = 4$ .

**Ex. 4.6 —** Duas partículas  $P_1$  e  $P_2$  se movem retilineamente e uniformemente. A primeira partícula inicia seu movimento em  $A : (-5, 4, -5)$  e se move com velocidade  $v = 14$  na direção do vetor  $(3, -6, 3)$ , a segunda partícula começa no ponto  $B : (-5, 16, -6)$  e se move com velocidade  $v = 13$  na direção oposta ao vetor  $(-4, 12, -3)$ .

a) Escreva as equações de movimento para cada partícula.

b) Mostre que suas trajetórias se interceptam e ache o ponto  $P$  de intersecção.

c) Determine o tempo que a primeira partícula gasta para ir

de  $A$  até  $P$ .

- d) Determine o tempo que a segunda partícula gasta para ir de  $B$  até  $P$ .

**Ex. 4.7 —** Dados  $A = (1, 2, 3)$  e  $B = (4, 5, 6)$  determine a equação paramétrica da reta que passa por  $A$  e  $B$ . Determine também os pontos onde essa reta corta os planos coordenados  $XY$ ,  $XZ$  e  $YZ$ .

**Ex. 4.8 —** Os lados de um triângulo estão sobre as retas  $y = 2x + 1$ ,  $y = 3x - 2$  e  $y = 1 - x$ . Determine os vértices desse triângulo.

**Ex. 4.9 —** Dado  $A : (1, 2)$ . Determine o ponto  $B$  tal que o triângulo  $OAB$  seja equilátero.

**Ex. 4.10 —** Determine a equação das três medianas de um triângulo com vértices  $(a, 0)$ ,  $(b, 0)$ ,  $(0, c)$ .

**Ex. 4.11 —** Os pontos  $A = (2, 5)$  e  $B = (14, 1)$  são simétricos em relação a uma reta. Determine a equação padrão e paramétrica dessa reta.

**Ex. 4.12 —** Chama-se baricentro de um triângulo o ponto de encontro das três medianas. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo  $ABC$  nos seguintes casos.

a)  $A = (1, 5)$ ,  $B = (3, 2)$  e  $C = (2, 4)$

b)  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$  e  $C = (x_3, y_3)$

**Ex. 4.13 —** Determine as coordenadas do ponto de trisseccção de uma mediana (o ponto que está a  $\frac{2}{3}$  do caminho do vértice ao ponto médio do lado oposto) e prove que não somente ele satisfaz a equação das outras duas medianas, mas que também ele é o ponto de trisseccção das outras duas medianas. Conclua que as três medianas são concorrentes, i.e, elas passam pelo mesmo ponto.

**[Dica: Para triângulo genérico as coordenadas podem ser escolhidas de modo que os vértices sejam  $(0, 0)$ ,  $(0, a)$  e  $(b, c)$  ]**

**Ex. 4.14 —** O ponto em que duas retas não paralelas se encontram deve satisfazer ambas equações. Determine o ponto de intersecção de  $3x - 4y = 1$  e  $4x + 6y = 14$ .

**Ex. 4.15 —** Determine a inclinação, o ponto de intersecção com o eixo  $y$  e desenhe. Quando a inclinação ou o ponto de intersecção não existir, diga.

a)  $3x - 4y = 6$

b)  $2x + 3y = 6$

c)  $7y + 9 = 0$

d)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

e)  $y = mx + b$

f)  $bx + ay = 0$

g)  $4x^2 = 9$

h)  $xy(2x - 3y + 4) = 0$

i)  $x \cos(\alpha) + y \operatorname{sen}(\alpha) = h$  (indique  $h$  e  $\alpha$  em sua figura).

j)  $x = 3 + 2t, y = -1 - 3t$

Nos próximos exercícios ache a equação da reta e desenhe uma figura de cada.

**Ex. 4.16** — A linha que passa por  $(-5, 7)$  perpendicular a  $4x - 5y = 10$ .

**Ex. 4.17** — Duas retas por  $(-2, 3)$ , uma paralela e outra perpendicular a  $3x + 2y + 5 = 0$

**Ex. 4.18** — A reta que passa por  $(a, 0)$  perpendicular a  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

**Ex. 4.19** — No triângulos de vértice  $(a, 0)$ ,  $(b, 0)$ ,  $(0, c)$ :

- ache as equações das três alturas;
- ache as equações das três medianas;
- prove que as três alturas se encontram num ponto  $H$  chamado ortocentro do triângulo.
- prove que as três medianas se encontram num ponto  $O'$ , chamado circuncentro do triângulo.

**Ex. 4.20** — Encontre duas linhas retas de inclinação  $\frac{2}{3}$  que fazem com os eixos coordenados um triângulo de área  $\frac{4}{3}$

**Ex. 4.21** — Mostre que para quaisquer valores de  $s$  e  $t$  as retas  $(2s + 3t)x + (3s - 2t)y = 5s + 4t$  passam pelo mesmo ponto. Determine esse ponto e mostre também que toda reta

que passa por esse ponto é representada por uma equação da forma acima para uma escolha conveniente de  $s$  e  $t$ .

**Ex. 4.22** — Determine  $a$  e  $b$  de modo que as equações  $x = at + 1$  e  $y = bt + 5$  sejam uma representação paramétrica da reta  $y = 2x + 3$ .

**Ex. 4.23** — Identifique a linha cujas equações são  $2x - 1 = 4y + 8 = 3z - 5$ . Determine o vetor diretor e três pontos que pertençam a essa reta.

**Ex. 4.24** — Faça o mesmo para a reta  $2x = 3$  e  $4y = 5$ .

**Ex. 4.25** — Determine a equação padrão da reta  $3x - 2y + 5z = 6$ ,  $2x + y - 3z = 0$ . Escreva a equação da reta na forma paramétrica.

**Ex. 4.26** — Encontre a equação da reta perpendicular ao plano que passa pelos pontos  $(3, 4, 2)$ ,  $(-1, 5, 3)$ ,  $(2, 1, 4)$  e que passe pela origem.

**Ex. 4.27** — Sejam  $P = (1, 0, 1)$  e  $Q = (0, 1, 1)$ . Em cada um dos casos a seguir ache um ponto  $C$  da reta  $PQ$  tal que a área do triângulo  $ABC$  seja  $\frac{1}{2}$ .

- a)  $A = (1, 2, 1)$ ,  $B = (1, 2, 3)$ .
- b)  $A = (1, 3, 2)$ ,  $B = (2, 2, 2)$ .
- c)  $A = (3, 0, 2)$ ,  $B = (2, 1, 2)$ .
- d)  $A = (3, -2, 1)$ ,  $B = (0, 0, 1)$ .

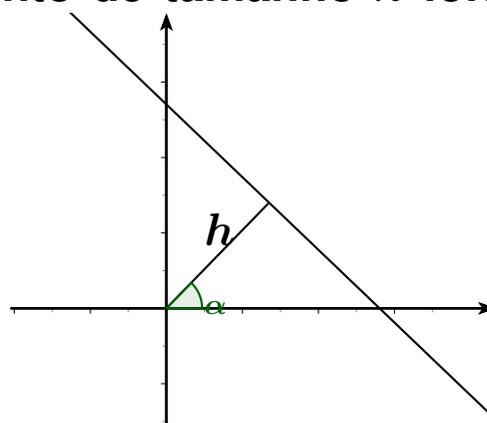
**Ex. 4.28 —** A reta que intercepta o eixo  $x$  no ponto  $(a, 0)$  e o eixo  $y$  no ponto  $(0, b)$  sendo ambos os pontos distintos da origem. Mostre que a equação dessa reta pode ser escrita como:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

**Ex. 4.29 —** a) Considere uma reta  $r$  contida no plano de equação  $ax + by + c = 0$ . Mostre que o vetor  $n = (a, b)$  é normal a todo vetor diretor de  $r$ .

b) Mostre que toda reta  $r$  contida no plano normal ao vetor  $n = (a, b)$  tem uma equação na forma  $ax + by + c = 0$  para algum  $c \in \mathbb{R}$ .

**Ex. 4.30 —** Determine a equação da reta que passa a uma distância  $h$  da origem e cujo segmento de tamanho  $h$  forma um

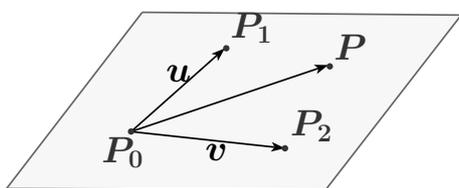


ângulo  $\alpha$  como o eixo  $x$  (veja ??)

[Dica: Determine os pontos onde a reta intercepta o eixo  $x$  e o eixo  $y$  em termos de  $h, \alpha$  e use o resultado do item a. ]

## 2 Equações do Plano

### Equações Paramétricas e Vetoriais do Plano



Passemos agora a um novo problema: determinar uma equação (ou conjunto de equações) que representem um dado plano no espaço euclidiano. Primeiro, lembremos que dados três pontos  $P_0, P_1$  e  $P_2$  não colineares existe um único plano  $\pi$  passando por esses pontos.

Seguindo então as mesmas ideias utilizadas no caso da reta, para determinar as equações de  $\pi$  utilizaremos um ponto inicial (por exemplo  $P_0$ ) em conjunto com vetores  $u = \overrightarrow{P_0P_1}$ , determinados pelos pontos escolhidos. Tome agora um ponto  $P$  qualquer deste plano, e observe que o vetor  $\overrightarrow{P_0P}$  é paralelo ao plano  $\pi$ , e portanto coplanar aos vetores  $u$  e  $v$ . Como os pontos  $P_0, P_1$  e  $P_2$  são não colineares, concluímos que os vetores  $u$  e  $v$  são linearmente independentes, e assim, pelo Teorema da Base, podemos escrever o vetor  $\overrightarrow{P_0P}$  como combinação linear de  $u$  e  $v$ , isto é, existem escalares  $s, t \in \mathbb{R}$  tais que

$$\overrightarrow{P_0P} = us + vt,$$

e portanto

$$P = P_0 + us + vt. \quad (4.6)$$

Assim como no caso das retas, a equação (4.6) é chamada de equação vetorial do plano.

Escrevendo  $P : (x, y, z)$ ,  $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ ,  $u : (u_1, u_2, u_3)$  e  $v : (v_1, v_2, v_3)$  obtemos

$$x = x_0 + u_1s + v_1t$$

$$y = y_0 + u_2s + v_2t$$

$$z = z_0 + u_3s + v_3t,$$

encontrando assim equações paramétricas do plano. Vale comentar que, assim como no caso das retas, as equações apre-

sentadas acima não são únicas pois dependem do ponto e dos vetores considerados.

**Exemplo 4.10.** *Encontre as equações vetorial e paramétricas do plano  $\pi$  determinado pelos pontos  $P_0 : (1, 0, 1)$ ,  $P_1 : (-1, 2, 3)$  e  $P_2 : (3, 1, 0)$ .*

◁

**Solução:** Definindo  $u = \overrightarrow{P_0P_1} : (-2, 2, 2)$  e  $v = \overrightarrow{P_0P_2} : (2, 1, -1)$ , a equação vetorial de  $\pi$  fica

$$\pi : P = (1, 0, 1) + (-2, 2, 2)s + (2, 1, -1)t.$$

A forma paramétrica é encontrada ao olharmos coordenada por coordenada, ou seja,

$$x = 1 - 2s + 2t$$

$$y = 2s + t$$

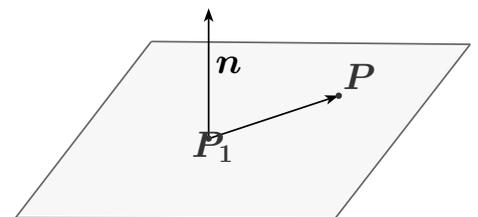
$$z = 1 + 2s - t.$$

□

## Equação Geral de um Plano

Na seção anterior vimos como encontrar a equação de um plano a partir das coordenadas de três pontos não colineares neste plano. Mas a geometria Euclidiana nos dá uma outra forma de encontrarmos

a equação de um plano. Para isso vamos primeiro lembrar que, dada uma reta e um ponto  $P_1$  podemos encontrar um único



plano  $\pi$  que contenha o ponto  $P_1$  e que seja ortogonal a reta dada. Observe que, neste resultado, a reta serve apenas para determinar uma direção. Isso nos permite portanto substituir esta reta por um vetor paralelo a ela. Neste sentido, dado um plano  $\pi$ , dizemos que um vetor  $n$  não nulo é normal a  $\pi$  se  $n$  é ortogonal a todos os vetores paralelos a  $\pi$ . É fundamental notar que todo plano possui uma infinidade de vetores normais (veja o exercício ??).

Sejam dois pontos  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $P = (x, y, z)$  no plano  $\pi$ . Como o vetor  $\overrightarrow{P_1P}$  é perpendicular a  $n : (a, b, c)$ , calculando o produto interno, obtemos que

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

e assim

$$ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1$$

e assim, definindo  $d = ax_1 + by_1 + cz_1$ , encontramos que  $ax + by + cz = d$  para qualquer ponto  $P : (x, y, z)$  pertencente ao plano. Em resumo, determinamos que se um ponto  $P = (x, y, z)$  pertence ao plano  $\pi$ , então suas coordenadas satisfazem  $ax + by + cz = d$ .

Reciprocamente, se as coordenadas do ponto  $P = (x, y, z)$  satisfazem a relação  $ax + by + cz = d$  tomando  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  teremos, pela definição de  $d$ , que  $d = ax_1 + by_1 + cz_1$  e subtraindo obtemos que

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Ou seja o vetor  $\overrightarrow{P_1P}$  é ortogonal ao vetor  $n$  e conseqüentemente paralelo a  $\pi$ .

**Observe que, para que o plano fique bem determinado, o vetor  $n : (a, b, c)$  deve ser não nulo, ou seja, é necessário que  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ .**

**A equação  $ax + by + cz = d$  é chamada de equação geral do plano, e dada esta equação é fácil recuperarmos um vetor normal ao plano. Mais precisamente teremos  $n : (a, b, c)$ .**

## Posições Relativas

Nosso objetivo nesta seção é entender a posição relativa entre duas retas, dois planos e ou uma reta e um plano, isto é, se estes se interseccionam, se são paralelos, etc.

### 1 Posição Relativas entre Retas

#### Posição Relativas entre Retas no Plano

Começaremos com o estudo da posição relativa de duas retas no plano. Lembremos primeiro que duas retas em um mesmo plano podem ser:

- coincidentes, i.e., são a mesma reta;
- paralelas;
- concorrentes, ou seja, se interceptam em um único ponto.

Tomemos então duas retas dadas em forma vetorial como  $r : A + vt$  e  $s : B + ut$ .

Como a direção de uma reta é dada pelo seu vetor direcional, temos que as retas  $r$  e  $s$  são paralelas se seus vetores diretores  $v$  e  $u$  são paralelos, ou seja, se um é múltiplo do outro.

Duas retas coincidentes  $r$  e  $s$  são coincidentes se possuem o mesmo lugar geométrico, isto é, o mesmos pontos. Assim, um primeiro requisito para coincidência é, claramente, paralelismo. Uma vez estabelecido o paralelismo basta agora que localizemos um ponto comum as duas retas. Podemos, por exemplo, verificar se o ponto inicial de  $r$  (ponto  $A$ ) pertence à reta  $s$ . Caso as retas não possuam pontos em comum, então elas serão paralelas não coincidentes.

Como as retas estão em um mesmo plano, uma vez que não sejam paralelas e ou coincidentes elas claramente só podem possuir um ponto em comum.

Resumindo,

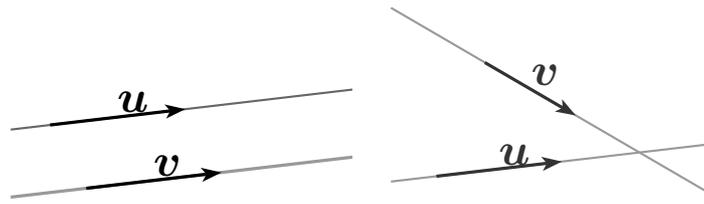
**Proposição 5.1.** *Duas retas em um mesmo plano são:*

- *Paralelas se e somente se seus vetores diretores são múltiplos um do outro.*

*Neste caso elas podem ser:*

- *Coincidentes: se o lugar geométrico de  $r$  e de  $s$  são o mesmo. Neste casos as retas são paralelas e passam pelo mesmo ponto. Para verificar se suas retas paralelas são coincidentes é suficiente verificar se elas possuem um ponto em comum. Por exemplo se o ponto  $B$  pertence a reta  $r$ .*
- *Paralelas não coincidentes, se não possuem pontos em comum.*

- **Concorrentes, ou seja, se interceptam em um único ponto. Neste caso os vetores diretores não são paralelos.**



**Exemplo 5.2. Determine a posição relativa entre as retas:**

1  $r : (1, 2) + (3, -1)t$  e  $s : (4, 1) + (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})t$

2  $r : (1, 2) + (3, -1)t$  e  $s : (2, 2) + (1, -\frac{1}{3})t$

3  $r : (1, 2) + (3, -1)t$  e  $s : (2, 2) + (0, 1)t$



**Solução:**

- 1 **Coincidentes. Os vetores diretores são paralelos, i.e., múltiplos um do outro e o ponto  $(4, 1)$  pertence a  $r$ .**
- 2 **Paralelas não coincidentes. Os vetores diretores são paralelos, i.e., múltiplos um do outro e o ponto  $(2, 2)$  pertence a  $r$ .**
- 3 **Concorrente, pois os vetores diretores não são paralelos.**



**As condições acima valem apenas para equações vetoriais, e conseqüentemente para equações paramétricas. Mas no caso**

bidimensional as equações ficam mais simples e podemos representar uma reta através de uma única equação linear. Seria interessante então que tivéssemos uma maneira de comparar equações nesta forma.

Tome então duas retas  $r : ax + by + c = 0$  e  $s : a'x + b'y + c' = 0$ . Vamos supor por um instante que  $b \neq 0$  e  $b' \neq 0$  ( $r$  e  $s$  não são paralelas ao eixo  $y$ ). Não é difícil se convencer que  $r$  e  $s$  são paralelas se, e só se, seus coeficientes angulares forem os mesmos. Ou seja, precisamos que  $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ . Mas isto é equivalente a dizer que  $a' = \lambda a$  e  $b' = \lambda b$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Observe que se ambas forem paralelas ao eixo  $y$ , então  $b = b' = 0$  e a mesma condição vale.

Se  $r$  e  $s$  forem coincidentes então, pela condição dada acima, temos que

$$0 = a'x + b'y + c' = \lambda(ax + by) + c' = \lambda(ax + by + c) - \lambda c + c' = -\lambda c + c'$$

e portanto  $c' = \lambda c$ .

Resumindo, obtemos o seguinte resultado.

**Teorema 5.3.** *Dadas duas retas no plano descritas pelas equações  $r : ax + by + c = 0$  e  $s : a'x + b'y + c' = 0$ , então:*

- 1** *Se o vetor  $(a, b, c)$  é múltiplo de  $(a', b', c')$  as retas são coincidentes.*
- 2** *Se o vetor  $(a, b)$  é múltiplo de  $(a', b')$ , ou equivalentemente os coeficientes angulares são iguais então as retas são paralelas.*

- 3 Se o vetor  $(a, b)$  não é múltiplo de  $(a', b')$ , ou equivalentemente os coeficientes angulares são distintos então as retas são paralelas.

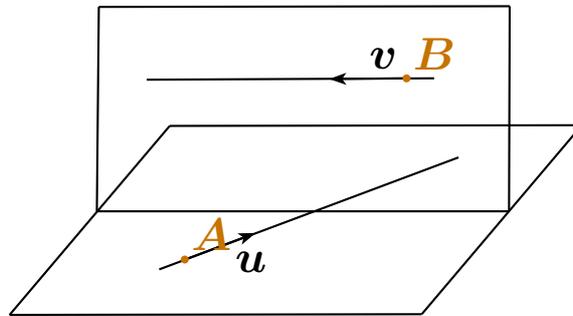


Fig. 5.1: Retas Reversas

## Posição Relativas entre Retas no Espaço

Passemos agora para a análise do caso espacial. Quando consideramos duas retas no espaço elas podem estar ou não num mesmo plano. Caso elas estejam num um mesmo plano serão ditas retas coplanares, e podemos para essas retas aplicar a análise de posição relativa que fizemos na seção anterior. Ressaltamos que se duas retas são paralelas elas são necessariamente coplanares. Por outro lado, retas não coplanares recebem o nome de reversas. Em resumo, duas retas no espaço podem ser

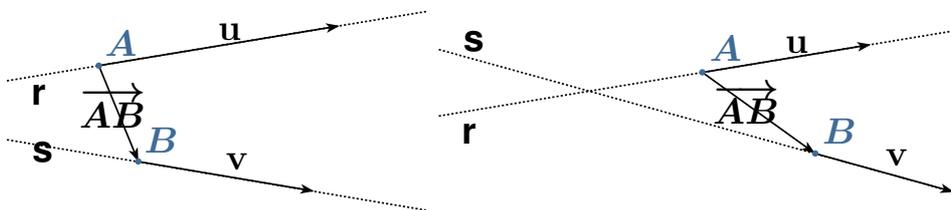
- Reversas, se as duas retas não estiverem contidas num mesmo plano.
- Coplanares, se as duas retas estiverem contidas num mesmo plano. Neste caso, valem as classificações vistas até agora, e as retas podem ser:

- Coincidentes;
- Paralelas;
- Concorrentes.

Precisamos então encontrar um critério para determinar se duas retas são ou não coplanares. Para tanto, considere duas retas  $r : A + vt$  e  $s : B + us$ , com  $A \neq B$ . Se  $r$  e  $s$  forem coplanares, então necessariamente o vetor  $\overrightarrow{AB}$  deve ser coplanar aos vetores  $u$  e  $v$ , ou seja, os vetores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $u$  e  $v$  são linearmente dependentes. Do mesmo modo, se  $\overrightarrow{AB}$ ,  $u$  e  $v$  forem coplanares então a reta  $s$  está contida no mesmo plano determinado pela reta  $r$  e pelo ponto  $B$ . Isso nos dá o seguinte resultado.

**Teorema 5.4.** *Duas retas  $r : A + vt$  e  $s : B + us$  são coplanares se e somente se os vetores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $u$ ,  $v$  forem linearmente dependentes, ou seja se:*

$$\left| (u \times v) \cdot \overrightarrow{AB} \right| = 0.$$



**Exemplo 5.5.** *Determine a posição relativa entre as seguintes retas:*

a)  $r : (1, 2, 0) + t(2, 2, 2)$  e  $s : (1, 3, 3) + t(2, 2, 3)$

b)  $r : (1, 0, 0) + t(2, 2, 2)$  e  $s : (2, 3, 0) + t(1, -1, 2)$

$$\text{c) } r : (1, 0, 0) + t(1, 1, 1) \quad e \quad s : (2, 3, 0) + t(1, 1, 1)$$

$$\text{d) } r : (1, 0, 0) + t(1, 1, 1) \quad e \quad s : (2, 1, 1) + t(1, 1, 1)$$



### Solução:

a) Para determinar se  $r$  e  $s$  são coplanares precisamos estudar a dependência linear dos vetores  $(2, 2, 2)$ ,  $(2, 2, 3)$  e  $(0, 1, 3) = (1, 3, 3) - (1, 2, 0)$ . Como o determinante formado pelas coordenadas destes vetores vale

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

concluimos que as retas não são coplanares, sendo portanto reversas.

b) Como o determinante formado pelas coordenadas dos vetores  $(2, 2, 2)$ ,  $(1, -1, 2)$  e  $(1, 3, 0)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

as retas são coplanares. Como os vetores diretores não são múltiplos, as retas são concorrentes.

c) As retas acima possuem o mesmo vetor diretor, de onde concluimos que são coplanares e paralelas. Como o ponto  $(1, 0, 0)$  não pertence a  $s$ , as retas são paralelas e não coincidentes.

d) Assim como no item anterior, as retas são coplanares e paralelas. Como o ponto  $(1, 0, 0)$  pertence a reta  $s$  (basta fazer  $t = -1$  na equação de  $s$ ) obtemos que  $r$  e  $s$  são de fato coincidentes.

□

## Exercícios

**Ex. 5.1** — Sejam  $r$  a reta representada parametricamente por  $x = at + b$  e  $y = ct + d$  e  $s$  a reta cuja equação é  $\alpha x + \beta y = c$ .

a) Quando  $r$  intercepta  $s$ ?

b) Se  $r$  interceptar  $s$  determine o ponto  $P$  de intersecção entre as duas retas:

**Ex. 5.2** — Verifique se as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes e, se forem, obtenha o ponto de intersecção.

a)  $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 3); s : X = (2, 3, 3) + \mu(3, 2, 1)$ .

b)  $r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}, s : \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 6\lambda \end{cases}$

c)  $r : \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = 11 \end{cases}, s : \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{-2} = z$ .

d)  $r : \frac{x - 2}{3} = \frac{y + 2}{4} = z, s : \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z - 3}{2}$ .

**Ex. 5.3** — A altura e a mediana relativas ao vértice  $B$  do triângulo  $ABC$  estão contidas, respectivamente, em  $r : X = (-6, 0, 3) + \lambda(3, 2, 0)$  e  $s : X = (0, 0, 3) + \mu(3, -2, 0)$ . Sendo  $C = (4, -1, 3)$ , determine  $A$  e  $B$ .

**Ex. 5.4** — Mostre que duas retas

$$r : \begin{cases} x = mz + ay = nz = b \end{cases}$$

e

$$s : \begin{cases} x = m'z + a'y = n'z = b' \end{cases}$$

se interceptam se e somente se  $(a - a')(n - n') = (b - b')(m - m')$

**Ex. 5.5** — Estude a posição relativa das retas  $r$  e  $s$ .

a)  $r : (1, 4, 4) + (1, 2, 3)t$  e  $s : (2, 5, 1) + (2, 4, 6)t$

b)  $r : (1, 4, 4) + (1, 2, 3)t$  e  $s : (2, 5, 1) + (1, 4, 1)t$

c)  $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$  e  $s : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$ .

d)  $r : X = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3)$  e  $s : X = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$ ;

e)  $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$  e  $s : x = -y = \frac{z-1}{4}$

f)  $r : x + 3 = \frac{2y-4}{4} = \frac{z-1}{3}$  e  $s : X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$ .

**Ex. 5.6** — Sejam  $r : X = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, 3)$  e  $s : X = (0, 1, -1) + \lambda(1, m, 2m)$ . Estude, segundo os valores de  $m$ , a posição relativa de  $r$  e  $s$ .

**Ex. 5.7 —** Dadas as retas  $r : X = (0, 1, 0) + \lambda(1, 0, 0)$  e  $s : X = (-1, 2, -7) + \lambda(2, 1, -3)$ , obtenha uma equação vetorial da reta  $t$ , concorrente com  $r$  e  $s$  e paralela a  $\vec{u} = (1, -5, -1)$ .

**Ex. 5.8 —** Determine o ponto de intersecção entre a reta que passa pelos pontos  $(1, 2, 3)$  e  $(3, 2, 1)$  e a reta que passa pelos pontos  $(2, 1, 1)$  e  $(1, 2, 1)$ .

**Ex. 5.9 —** Determine  $a, b$  de modo que as retas sejam paralelas:

$$r : \begin{cases} ax + 3y - 7z - 1 = 0 \\ 5x + 6y - bz = 0 \end{cases}$$

e

$$s : \begin{cases} ax + by = 5 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$$

## 2 Posição relativas entre retas e planos

Passemos agora para o estudo da posição de uma reta e um plano. Dado um plano  $\pi$  e uma reta  $r$  temos três possibilidades:

- a intersecção de  $r$  e  $\pi$  é vazia. Nesse caso a reta  $r$  é dita paralela a  $\pi$ .
- a intersecção de  $\pi$  e  $r$  é um único ponto. Nesse caso dizemos que a reta  $r$  é transversal a  $\pi$ .
- a intersecção de  $\pi$  e  $r$  tem pelo menos dois pontos. Nesse caso temos que todos os pontos da reta  $r$  pertencem ao plano  $\pi$  e dizemos que a reta  $r$  está contida em  $\pi$ .

**Não é difícil ver que uma reta  $r$  é transversal ao plano  $\pi$  se, e somente se, o vetor diretor dessa reta não é paralelo ao plano  $\pi$ . Ou, equivalentemente, se o vetor diretor dessa reta não é ortogonal ao vetor normal ao plano.**

**Colocando em coordenadas, obtemos que o plano  $\pi$  de equação geral  $ax + by + cz = d$  e a reta  $r$  de equação paramétrica**

$$(x, y, z) = (x_0, y_0 + z_0) + (v_1, v_2, v_3)t$$

**são transversais se, e somente se,**

$$(a, b, c) \cdot (v_1, v_2, v_3) \neq 0,$$

**ou seja, num sistema de coordenadas ortogonais:**

$$av_1 + bv_2 + cv_3 \neq 0.$$

**Reescrevendo esta condição utilizando o vetor normal ao plano  $n = (a, b, c)$  e o vetor diretor  $v = (v_1, v_2, v_3)$  obtemos o seguinte critério.**

**Proposição 5.6. A reta  $r : X = P + vt$  é transversal ao plano  $\pi$  de vetor normal  $n$  se, e somente se,**

$$v \cdot n \neq 0.$$

**Caso a reta  $r$  não seja transversal ao plano  $\pi$ , nos restam duas opções: ou  $r$  é paralela disjuntas ou está contida em  $\pi$ . Para decidirmos qual é o caso basta tomarmos um ponto qualquer da reta e verificarmos se este pertence ao plano. Se isso ocorrer a reta está contida no plano, caso contrário a reta é paralela.**

**Exemplo 5.7.** *Determine a posição relativa entre o plano*

$$\pi : X = (1, 2, 1) + (1, -1, 1)t_1 + (0, 1, 2)t_2$$

*e a reta*

$$r : X = (1, 3, 4) + (1, 1, 1)s.$$



**Solução:** O vetor normal ao plano é dado por:

$$(1, -1, 1) \times (0, 1, 2) = (-3, -2, 1)$$

E como  $(-3, -2, 1) \cdot (1, 1, 1) = -4 \neq 0$ , a reta é transversal ao plano.

O ponto de intersecção ocorre quando:

$$(1, 2, 1) + (1, -1, 1)t_1 + (0, 1, 2)t_2 = (1, 3, 4) + (1, 1, 1)s$$

cuja solução é  $s = \frac{1}{4}, t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{3}{2}$ .

Substituindo  $s = \frac{1}{4}$  na equação da reta obtemos o ponto  $(\frac{5}{4}, \frac{13}{4}, \frac{17}{4})$ , que é portanto o ponto de intersecção de  $r$  com  $\pi$ .  
□

## Exercícios

**Ex. 5.1** — Mostre que a reta

$$x = 3t - 2, y = -4t + 1, z = 4t - 5$$

é paralelo ao plano  $4x - 3y - 6z - 5 = 0$

**Ex. 5.2 —** Determine a equação do plano contendo a reta

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 2x - 5y + 2z = 6 \end{cases}$$

e paralela a reta  $x = -\frac{y}{6} = \frac{z}{7}$

**Ex. 5.3 —** Mostre que a reta

$$\frac{1}{3}(x - 7) = -(y + 3) = z - 4$$

intersecciona os planos  $\pi_1 : 6x + 4y - 5z = 4$  e  $\pi_2 : x - 5y + 2z = 12$  no mesmo ponto. Conclua que essa reta é coplanar com a reta determinada pela intersecção desses planos.

**Ex. 5.4 —** Encontre o ponto de intersecção da reta dada com o plano dado:

a)  $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{6}, \quad 2x + 3y + z - 1 = 0$

b)  $\frac{x + 3}{3} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 1}{-5}, \quad x - 2y + z - 15 = 0$

c)  $\frac{x + 2}{-2} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 3}{2}, \quad x + 2y + 2z + 6 = 0$

**Ex. 5.5 —** Escreva as equações do plano que passa por  $(1, 2, -3)$  e é paralelo as retas:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{-3} = \frac{z - 7}{3}, \quad \frac{x + 5}{3} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z + 3}{-1}$$

**Ex. 5.6 —** Mostre que as equações do plano que passa pelo ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  e é paralelo as retas:

$$\frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - b_1}{l_2} = \frac{z - c_1}{l_3}, \quad \frac{x - a_2}{m_1} = \frac{y - b_2}{m_2} = \frac{z - c_2}{m_3}$$

pode ser escrita como:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**Ex. 5.7 —** Mostre que a equação do plano que passa pelos pontos  $(x_0, y_0, z_0)$  e  $(x_1, y_1, z_1)$  e é paralelo a reta:

$$\frac{x - a_1}{l_1} = \frac{y - b_1}{l_2} = \frac{z - c_1}{l_3}$$

pode ser escrita como:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**Ex. 5.8 —** Prove que as retas:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{-3} = \frac{z - 5}{4} \quad \text{e} \quad (x, y, z) = (3t - 7, 2t + 2, -2t + 1)$$

são coplanares e determine a equação desse plano.

### 3 Posição relativas entre planos

Queremos agora estudar a posição de dois planos no espaço. Para começar analisemos quais as possíveis posições relati-

vas, para depois determinar condições algébricas que as determinem. Dados então dois planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  temos três possibilidades:

- a intersecção de  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é vazia. Nesse caso, os planos são ditos paralelos distintos.
- a intersecção de  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é não vazia, e dois sub-casos são possíveis:
  - a intersecção de  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é uma reta, e os planos são ditos transversais.
  - $\pi_1$  e  $\pi_2$  são coincidentes.

Assim como no caso *reta*  $\times$  *plano*, para estudar a posição relativa entre dois planos utilizaremos intensamente os vetores normais a estes planos. Para dois planos serem paralelos, por exemplo, precisamos que seus vetores normais sejam paralelos entre si.

A seguinte proposição caracteriza a posição relativa de dois planos. Sua demonstração é simples e fica como exercício para o leitor.

**Proposição 5.8.** *Sejam  $\pi_1$  e  $\pi_2$  dois planos de equações  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  e  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$  respectivamente. então:*

- *Os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são paralelos se os seus vetores normais forem paralelos, isto é, se*

$$(a_2, b_2, c_2) = \lambda(a_1, b_1, c_1).$$

**Nesse caso se:**

- $(a_1, b_1, c_1, d_1)$  for proporcional a  $(a_2, b_2, c_2, d_2)$ , então os planos são coincidentes
- $(a_1, b_1, c_1, d_1)$  não for proporcional a  $(a_2, b_2, c_2, d_2)$ , então os planos são paralelos distintos.

- Os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são transversais se os seus vetores normais não forem paralelos, isto é, se  $(a_1, b_1, c_1)$  e  $(a_2, b_2, c_2)$  não são proporcionais.

É interessante observar que se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  forem transversais, então a reta  $r$  determinada pela interseção dos dois planos deve ser perpendicular aos vetores normais  $n_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $n_2 = (a_2, b_2, c_2)$ , e podemos tomar o vetor  $n_1 \times n_2$  como vetor diretor de  $r$ . Assim, escolhendo um ponto  $P$  qualquer na interseção de  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , obtemos

$$r : X = P + (n_1 \times n_2)t.$$

### Exemplos 5.9

- Os planos  $\pi_1 : 2x + 3y + 4z = 5$  e  $\pi_2 : 6x + 2y + 2z = 3$  são transversais. E assim a sua intersecção, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

determina uma reta.

- Os planos  $\pi_1 : 2x + 3y + 4z = 5$  e  $\pi_2 : 4x + 6y + 8z = 2$  são paralelos e não coincidentes. E assim a sua intersecção é o conjunto vazio. Ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x + 6y + 8z = 2 \end{cases}$$

não possui soluções.

- Os planos  $\pi_1 : 2x + 3y + 4x = 5$  e  $\pi_2 : 4x + 6y + 8x = 10$  são coincidentes. E assim a sua intersecção é o plano  $\pi_1 = \pi_2$ . Ou seja, o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4x = 5 \\ 4x + 6y + 8x = 10 \end{cases}$$

tem como solução um plano.

**Exemplo 5.10.** A reta  $r$  é dada como intersecção de dois planos

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - z = 1 \end{cases} . \quad (5.1)$$

Escreva as equações paramétricas para essa reta.



**Solução:** Um modo de obter as equações paramétricas da reta é escolher uma das variáveis e fazê-la igual ao parâmetro  $t$ . Assim por exemplo, fazendo  $z = t$ . A equação  $x - z = 1$ , nos diz que  $x = 1 + t$ . Substituindo esse valores na equação  $x + y + 2z = 0$ , temos  $y = -1 - t$ . E assim obtemos que as equações paramétricas da reta são:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases} .$$

Outro modo de obter a equação vetorial é encontrando dois pontos que satisfazem a equação. Assim por exemplo tomando  $z = 0$ , o sistema de equações **5.1** fica

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x = 1 \end{cases} .$$

Cujas soluções são as soluções alternativas. 100

Cuja solução é o ponto  $(1, -1, 0)$ , que pertence a reta determinada pela intersecção dos dois planos. Similarmente tomando  $z = -1$ , temos que o ponto  $(0, 2, -1)$  pertence a reta.

De posse dos pontos podemos escrever a equação vetorial dos planos:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases} .$$

□

## Exercícios

**Ex. 5.1** — Mostre que os planos  $bx - ay = n$ ,  $cy - bz = 1$  e  $az - cx = m$  se interceptam numa reta se e somente se  $al + bm + cn = 0$ .

**Ex. 5.2** — Mostre que a reta:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

está contida no plano  $4x + 3y + 7z - 7$ .

**Ex. 5.3** — Determine os valores de  $a$  e  $b$  de modo que os planos  $x + 2y + z = b$  e  $3x - 5y + 3z = 1$  e  $2x + 7y + az = 8$  se interceptem:

- um ponto
- uma reta
- três retas distintas e paralelas

## Ângulos e Distância

### 1 Ângulos

No capítulo anterior nos concentramos no estudo da posição relativa entre dois objetos no espaço. Tal estudo nos permitiu determinar se dois objetos são ou não paralelos, e neste capítulo vamos aprofundar um pouco mais o estudo de posição relativa, definindo e estudando uma “medida de posição relativa” entre estes, o que denominaremos por medida angular ou ângulo entre dois objetos no espaço.

#### Ângulo entre duas Retas

O ângulo entre duas retas é definido como o ângulo entre seus vetores diretores.

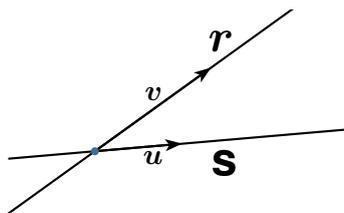


Fig. 6.1: Ângulo entre as retas  $r$  e  $s$ .

Assim se  $r : A + vt$  e  $s : B + ut$  então o ângulo  $\theta$  entre  $r$  e

$s$  será dado por

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}, \quad (6.1)$$

e conseqüentemente

$$\theta = \arccos \left( \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \right)$$

Lembramos que a função  $\arccos(x)$ , retorna um ângulo  $x$  tal que  $0 \leq x < \pi$ . Como  $\cos(x) = \cos(-x)$ , o ângulo que obtemos acima é não orientado, ou seja obtemos apenas o valor absoluto do ângulo. Em outras palavras, nesta definição, o ângulo entre a reta  $r$  e a reta  $s$  é o mesmo que o ângulo entre a reta  $s$  e a reta  $r$ .

Observamos também que entre duas retas não paralelas sempre existem dois ângulos possíveis, e o ângulo que encontramos não é necessariamente o menor deles, ou seja, o ângulo agudo. Em algumas situações é desejável conhecermos o ângulo agudo entre as retas  $r$  e a reta  $s$ . Para isto, observe que se  $u \cdot v \geq 0$  então  $\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \geq 0$ . Portanto

$$\arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \leq \frac{\pi}{2},$$

e o objetivo foi alcançado.

Caso contrário, se  $u \cdot v < 0$ , temos que

$$\frac{\pi}{2} < \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} < \pi,$$

e estamos interessados portanto no ângulo suplementar  $\pi - \theta$ .

Mas note que  $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ , e portanto, substituindo em (6.1) obtemos que se  $u \cdot v < 0$ , então

$$\cos(\pi - \theta) = -\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|} \quad (6.2)$$

Desta forma se, denotarmos por  $\alpha$  o ângulo agudo entre as retas  $r$  e  $s$  temos que

$$\cos \alpha = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|} \quad \text{com } 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

**Exemplo 6.1.** *Encontre o ângulo entre as retas  $r : X = (1, 2, 1) + (1, 1, 0)t$  e  $s : \frac{x-2}{1/2} = \frac{y+3}{1/2} = \frac{z+7}{1/\sqrt{2}}$ .*

◁

**Solução:** A reta  $r$  tem vetor diretor  $(1, 1, 0)$  e a reta  $s$  tem vetor diretor  $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$ . E assim

$$\cos \theta = \frac{(1, 1, 0)(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})}{\|(1, 1, 0)\| \|(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e logo  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

□

É importante observar que para medir o ângulo entre duas retas não é necessário que estas se interceptem, já que a nossa definição de ângulos entre retas é, na verdade, o ângulo entre os vetores diretores das retas. Observamos também que o ângulo entre duas retas paralelas (coincidentes ou não) é sempre 0.

Também neste sentido, duas retas são ditas ortogonais se seus vetores diretores são perpendiculares. E duas retas são ditas perpendiculares se elas se interceptam e são ortogonais.

Fig. 6.2: As retas  $AB$  e  $FG$  são ortogonais mas não perpendiculares.

**Exemplo 6.2.** Verifique se as retas  $r : (1, 2, 1) + (1, 1, 0)t$  e  $s : (1, 3, 4) + (1, -1, 3)t$  são ortogonais e/ou se são perpendiculares.

◁

**Solução:** Como  $(1, 1, 0) \cdot (1, -1, 3) = 0$  elas são ortogonais.

Para verificar se elas se interceptam, basta resolvemos o sistema linear:

$$(1, 2, 1) + (1, 1, 0)t_1 = (1, 3, 4) + (1, -1, 3)t_2$$

Como o sistema acima, não possui soluções, as retas não se interceptam e assim elas não são perpendiculares.

□

No caso bidimensional, lançando mão da representação por equações lineares, podemos redefinir as fórmulas para o ângulo entre duas retas, e colocá-las em função da inclinação das retas estudadas.

Tome então duas retas  $r : y = m_1x + d$  e  $s : y = m_2x + d$  e lembre-se que podemos expressar seus vetores diretores respectivamente por  $v = i + m_1j$  e  $u = i + m_2j$ . Assim obtemos que

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{1 + m_1m_2}{\sqrt{1 + m_1^2} \sqrt{1 + m_2^2}}$$

A expressão acima, assim como no caso tridimensional, nos permite calcular o ângulo  $\theta$  não orientado entre as retas. Esse ângulo está entre 0 e  $\pi/2$  se  $1 + m_1m_2$  é positivo, e entre  $\pi/2$  e  $\pi$  se  $1 + m_1m_2$  é negativo. Se  $1 + m_1m_2 = 0$  o ângulo é igual a  $\pi/2$  e assim as retas são perpendiculares.

De modo análogo, podemos encontrar

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1 + m_1^2} \sqrt{1 + m_2^2}}$$

ou equivalentemente

$$\theta = \operatorname{arcsen} \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1 + m_1^2} \sqrt{1 + m_2^2}}.$$

Neste caso, como  $0 \leq \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1 + m_1^2} \sqrt{1 + m_2^2}} \leq 1$ , temos que  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Outro modo de determinar o ângulo entre duas retas no plano é lembrando que o coeficiente angular é a tangente do ângulo orientado (no sentido anti-horário) entre a reta e a parte positiva do eixo  $x$ . Assim dadas duas retas de coeficiente angulares  $m_1 = \operatorname{tg} \phi_1$  e  $m_2 = \operatorname{tg} \phi_2$ . Pela figura 6.3 temos que  $\theta = \phi_2 - \phi_1$  e logo:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\operatorname{tg} \phi_2 - \operatorname{tg} \phi_1}{1 + \operatorname{tg} \phi_1 \operatorname{tg} \phi_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

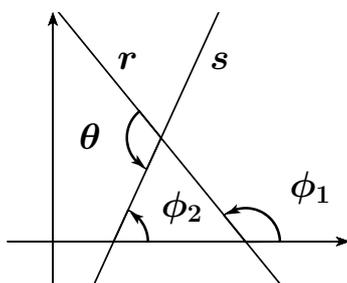


Fig. 6.3

Uma vantagem da expressão

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

é que o ângulo determinado por esta é o ângulo orientado entre as retas  $r_1$  e  $r_2$ .

Dadas duas retas de coeficientes angulares  $m_1, m_2$ , então o ângulo entre elas é dado por:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{1 + m_1 m_2}{\sqrt{1 + m_1^2} \sqrt{1 + m_2^2}} \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{|m_2 - m_1|}{\sqrt{1 + m_1^2} \sqrt{1 + m_2^2}} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\end{aligned}$$

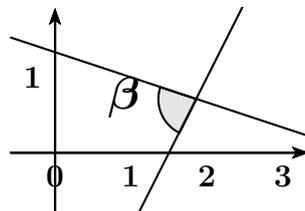
**Exemplo 6.3.** Ache o ângulo entre as retas  $2x - y = 3$  e  $x + 3y = 4$ .



**Solução:** Neste caso temos que:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{1}{3} - 2}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right) 2} = -7$$

E assim  $\theta = \operatorname{arctg}(-7) \approx -81.8699^\circ$ .



**Exemplo 6.4.** Ache duas retas que passe pelo ponto  $(2, 2)$  e que faça um ângulo de  $45^\circ$  com a reta  $2x - 3y = 4$

**Solução:** Inicialmente vamos encontrar o coeficiente angular dessas retas. Para isso, observamos que:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \frac{\frac{2}{3} - m}{1 + \frac{2}{3}m}$$

E dessa forma  $1 + \frac{2}{3}m = \frac{2}{3} - m$  e logo  $\frac{5}{3}m = -\frac{1}{3}$  e assim  $m = -\frac{1}{5}$ . Logo a equação da reta é  $y - 2 = -\frac{1}{5}(x - 2)$

No caso

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \frac{m - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}m}$$

E dessa forma  $m = 5$ . Logo a equação da reta é  $y - 2 = 5(x - 2)$

□

## Exercícios

**Ex. 6.1** — Ache o ângulo agudo entre as retas  $3x - 4y + 2 = 0$  e  $2x + 3y = 7$

**Ex. 6.2** — Qual o ângulo entre o eixo  $x$  e  $5x + 12 = 3$ ?

**Ex. 6.3** — Ache duas retas passando por  $(1, -1)$  que faz um ângulo de  $45^\circ$  com  $3x - 4y = 7$ .

**Ex. 6.4 —** Ache os três ângulos de um triângulo cujos vértices são  $(2, 1)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(3, -2)$ . Veja se eles somam  $180^\circ$

**Ex. 6.5 —** Seja  $\alpha$  um dos ângulos formados pelas retas  $ax + by = c$  e  $y = px + q$ . Dê uma expressão para  $|\cos \alpha|$ .

**Ex. 6.6 —** Escreva a equação da reta que passa pela origem e faz um ângulo de  $45^\circ$  com a reta  $\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} = 1$ .

**Ex. 6.7 —** Mostrar que os quatro pontos  $(2, 2)$ ,  $(5, 6)$ ,  $(9, 9)$  e  $(6, 5)$  são os vértices de um losango e que suas diagonais se cortam mutuamente ao meio e uma é perpendicular a outra.

**Ex. 6.8 —** O segmento retilíneo que une os pontos médios de dois lados opostos de qualquer quadrilátero e o segmento retilíneo que une os pontos médios das diagonais do quadrilátero cortam-se mutuamente ao meio.

**Ex. 6.9 —** Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto  $(1, -2, 1)$  e é perpendicular às retas  $r : (1, -3, 0) + (1, 2, 1)t$  e  $s : (-2, 1, 0) + (1, -1, 1)t$ .

**Ex. 6.10 —** Determine as equações paramétricas da reta perpendicular às retas:

$$x = 3t - 7, \quad y = -2t + 4, \quad z = 3t + 4$$

e

$$x = t + 1, \quad y = 2t - 9, \quad z = -t - 12$$

## Ângulo entre uma Reta e um Plano

O ângulo  $\theta$  entre uma reta  $r$  e um plano  $\pi$  é definido como o ângulo complementar ao ângulo agudo entre o vetor diretor a essa reta e o vetor normal ao plano (ver figura 6.4).

Se  $v$  é um vetor diretor da reta  $r$  e  $n$  é um vetor normal ao plano  $\pi$  então

$$\text{sen}(\theta) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

e logo

$$\text{sen}(\theta) = \frac{|v \cdot n|}{\|v\| \|n\|}$$

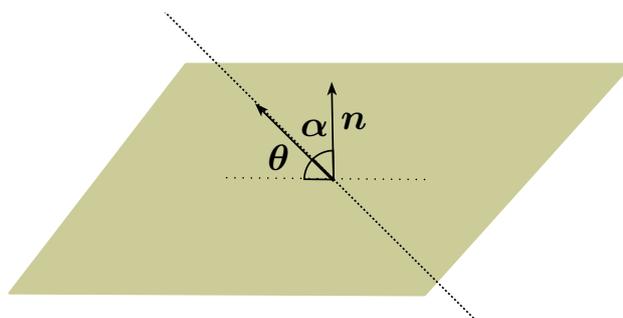


Fig. 6.4: Ângulo  $\theta$  entre uma reta e um plano.

Dizemos que um plano  $\pi$  com vetor normal  $n$  e uma reta  $r$  com vetor diretor  $v$ , são ortogonais se o ângulo entre eles é  $\frac{\pi}{2}$ , ou equivalentemente se os vetores  $v$  e  $n$  são paralelos.

**Exemplo 6.5.** *Determine o ângulo entre a reta  $X = (6, 7, 0) + (1, 1, 0)t$  e o plano de equação vetorial  $X = (8, -4, 2) + (-1, 0, 2)t + (1, -2, 0)s$ .*

◁

**Solução:** Vamos encontrar inicialmente um vetor normal a esse plano:

$$n = (-1, 0, 2) \times (1, -2, 0) = (4, 2, 2)$$

Logo o ângulo entre a reta e o plano é dado por:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{(1, 1, 0) \cdot (4, 2, 2)}{\sqrt{2}\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e assim  $\theta = \frac{\pi}{3}$  □

**Exemplo 6.6.** *Determine a equação geral do plano que passa pelo ponto  $(1, 2, 1)$  e que é perpendicular a reta  $X = (1, 0, 0) + (1, 3, -1)t$*  ◁

**Solução:** O vetor normal ao plano pode ser escolhido como  $(1, 3, -1)$  e assim a equação geral desse plano é:  $x + 3y - z = d$ . Como o ponto  $(1, 2, 1)$  pertence ao plano, ele satisfaz a equação do plano, i.e,  $1 + 3 \cdot 2 - 1 = d$ . Logo  $d = 6$  e a equação geral do plano é  $x + 3y - z = 6$ . □

## Ângulo entre dois Planos

O ângulo entre dois planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é definido como o ângulo agudo entre os vetores normais  $n_1$  e  $n_2$

$$\cos(\theta) = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\| \|n_2\|}$$

Dois planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  com vetores normais  $n_1$  e  $n_2$  respectivamente, são ditos ortogonais se o ângulo entre eles é  $\frac{\pi}{2}$ , o que implica que seus vetores diretores são perpendiculares, i.e,

$$n_1 \cdot n_2 = 0$$

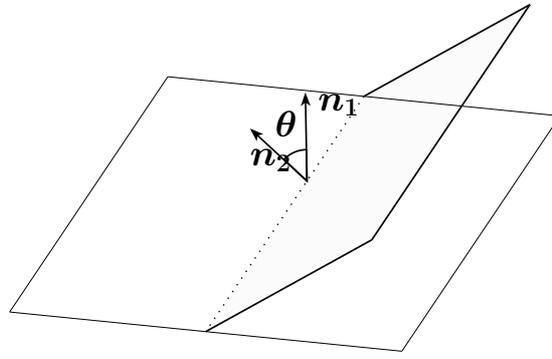


Fig. 6.5

**Exemplo 6.7.** *Determine a equação do plano que contém o ponto  $(1, 0, 1)$  e que é perpendicular aos planos  $2x + y + z = 2$  e  $-x + z = 7$ .*



**Solução:** O vetor  $n$  normal ao plano, será ortogonal aos vetores  $(2, 1, 1)$  e  $(-1, 0, 1)$ . E assim

$$n = (2, 1, 1) \times (-1, 0, 1) = (1, -3, 1)$$

Logo a equação geral do plano é da forma  $x - 3y + z = d$ . Como o ponto  $(1, 0, 1)$  pertence ao plano:

$$d = 1 + 3 \cdot 0 + 1 = 2$$

E a equação geral é  $x - 3y + z = 2$ .



## Exercícios

**Ex. 6.11 —** Ache os ângulos entre os planos:

a)  $3x - y + z = 2$  e  $x - y = 6$

b)  $x + 2y - 3z = 8$  e  $2x + 4y - 6z + 31 = 0$

c)  $x = 0$  e  $y = 0$

d)  $x = 1$  e  $x + y = 1$

**Ex. 6.12** — Escreva a equação vetorial do plano que passa pelo ponto  $P$  e é perpendicular as planos:

$$rn_1 + D1 = 0 \quad rn_1 + D1 = 0.$$

Escreva também a equação geral desse plano dado que:

$$P : (x_0, y_0, z_0) \quad n_1 = (a_1, b_1, c_1) \quad n_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

**Ex. 6.13** — Ache a equação do plano perpendicular ao plano  $xz$ , que contem o ponto  $(1, 2, 3)$  e que faz um ângulo de  $\frac{\pi}{4}$  com  $3x + 2y + z = 1$ .

## 2 Distâncias

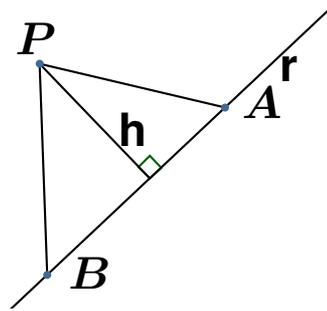
Passemos agora a um novo problema: definir e determinar a distância entre dois objetos (ponto, reta ou plano) no espaço.

Sabemos facilmente como determinar a distância entre dois pontos no espaço. Bastando para isso medir o tamanho do vetor determinado por estes pontos. Mas como medir a distância entres outros dois objetos? Este será nosso objetivo nesta seção.

### Distância de um ponto a uma reta

A distância entre um ponto  $P$  e uma reta  $r$  é definida como a distância entre  $P$  e ponto  $A \in r$  mais próximo de  $P$ . Para

determinar a distância de  $P$  a  $r$ , sejam  $A$  e  $B$  dois pontos de  $r$  e considere o triângulo  $ABP$ .



A área do triângulo  $ABP$  pode ser calculada usando o produto vetorial e assim temos:

$$A = \frac{1}{2} \|\vec{AP} \times \vec{AB}\|$$

Por outro lado usando que a área do triângulo é metade da base vezes a altura temos:

$$A = \frac{\|AB\|h}{2}$$

e assim  $\|\vec{AP} \times \vec{AB}\| = \|AB\|h$  e logo

$$h = d(P, r) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{AB}\|}{\|AB\|}$$

**Exemplo 6.8.** Calcule a distância do ponto  $P = (1, 0, 2)$  a reta  $r : (1, 0, 1) + (2, 0, 1)t$ .

◁

**Solução:** Escolhemos  $A = (1, 0, 1)$  e  $B = (3, 0, 2)$ . E assim  $\vec{AP} = (0, 0, 1)$  e  $\vec{AB} = (2, 0, 1)$

$$d(P, r) = \frac{\|(0, 0, 1) \times (2, 0, 1)\|}{\|(2, 0, 1)\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

□

## Distância de um ponto a uma reta no plano: o caso bidimensional

Assim como nas seções anteriores, o caso bidimensional pode ser estudado separadamente. Queremos então utilizar as expressões determinadas anteriormente para encontrar uma maneira de expressar a distância do ponto  $P = (p, q)$  a reta  $Ax + By + C = 0$ .

Começaremos tratando o caso onde a reta é paralela ao eixo  $x$  ( $A = 0$ ). Neste caso, a reta terá equação  $y = -\frac{C}{B}$  e a distância será dada pela diferença entre a coordenada  $y$  do ponto e da reta, ou seja,  $d(P, r) = |q + \frac{C}{B}|$ .

Se a reta  $r$  não é paralela ao eixo  $y$ , então ela intercepta o eixo  $x$  no ponto  $(-\frac{C}{A}, 0)$  e seu vetor diretor pode ser escolhido como  $v = Bi - Aj$  (por quê?).

Desta forma, a equação vetorial da reta é  $r : (-\frac{C}{A}, 0) + (B, -A)t$ . Escolhendo  $A = (\frac{C}{A}, 0)$  e  $B = A + v$ , temos que  $\overrightarrow{AP} = (p + \frac{C}{A}, q)$ , e temos

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times v\|}{\|v\|},$$

onde o vetor  $\overrightarrow{AP} \times v$  pode ser calculado através do seguinte determinante formal

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ B & -A & 0 \\ p + \frac{C}{A} & q & 0 \end{vmatrix},$$

e assim  $\overrightarrow{AP} \times v = (Bq + Ar + C)k$ .

Segue então que  $\|\overrightarrow{AP} \times v\| = |Ar + Bs + C|$  e assim

$$d(P, r) = \frac{|Ap + Bq + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Observe que fazendo  $A = 0$  na expressão acima, recuperamos a expressão encontrada para retas paralelas ao eixo  $x$ , e portanto esta fórmula pode ser usada em qualquer caso.

**Exemplo 6.9.** Calcule a distância do ponto  $(1, 3)$  a reta  $4x - 2y - 3 = 0$ .

**Solução:**

$$d = \frac{|4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{20}}$$

**Exemplo 6.10.** Existem duas pontos cuja coordenadas  $x$  são iguais a  $-3$  e que distam 6 da reta  $r : 5x - 12y - 3 = 0$ . Ache as coordenadas  $y$  desse ponto.

**Solução:** Ambos os pontos podem ser representados como  $(-3, s)$ . Para esses pontos temos que:

$$d = \frac{|5(-3) - 12s - 3|}{13} = 6$$

e logo  $|18 + 12s| = 78$  e logo  $s = 5$  ou  $s = -8$ . E os pontos são  $(-3, 5)$  e  $(-3, -8)$

## Exercícios

**Ex. 6.1 — Ache as distâncias entre os pontos e as retas dadas:**

- a)  $(-3, 4)$  a  $5x - 2y = 3$ .
- b)  $(-2, 5)$  a  $7x + 3 = 0$ .
- c)  $(-3, 4)$  a  $4y + 5 = 0$ .
- d) Origem a  $3x - 2y + 6 = 0$ .

**Ex. 6.2 — Determine a distância  $\delta$  entre o ponto  $A = (3, 1)$  e a reta  $x + 2y = 3$ . Pelo seguinte método: primeiro ache o ponto  $B$  sobre essa reta tal que  $d(A, B) = \delta$ . Escreva a equação da reta de forma paramétrica  $r = r_0 + vt$  e calcule o produto interno dos vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $v$ . Conclua.**

**Ex. 6.3 — Ache o comprimento das alturas de um triângulo com vértices  $(a, 0)$ ,  $(b, 0)$ ,  $(0, c)$ .**

**Ex. 6.4 — Ache a distância entre as duas retas paralelas:  $3x + 2y = 6$  e  $6x + 4y = 9$ . (Porque essas retas são paralelas?)**

**Ex. 6.5 — Prove que a distância entre duas retas paralelas cujas equações são  $Ax + By + C = 0$  e  $Ax + By + C' = 0$  é:**

$$\frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

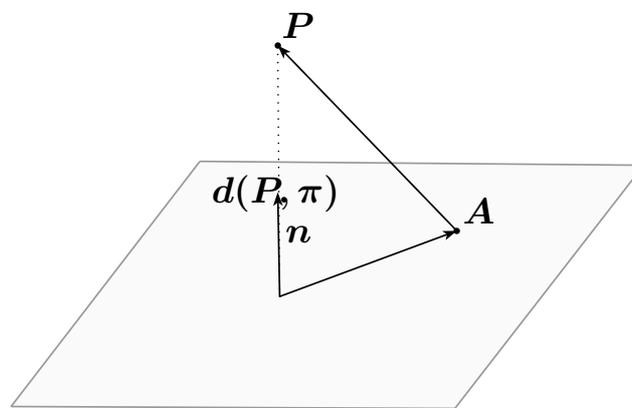
**Ex. 6.6 — Ache os pontos da reta  $y = 2x + 1$  que estão situados a distância 2 da origem.**

Ex. 6.7 — Quais são as retas paralelas a reta  $3x - 4y = 1$  que estão a distância 5 desta?

## Distância de um ponto a um plano

A distância entre um ponto e um plano é definida de maneira análoga ao caso ponto-reta. Considere então um plano  $\pi$  com vetor normal  $n$ , e  $P$  um ponto qualquer. Para calcularmos a distância de  $P$  a  $\pi$ , tome  $A$  um ponto qualquer de  $\pi$  e considere o vetor  $\overrightarrow{AP}$ . A distância de  $P$  a  $\pi$  será dada então pela norma da projeção de  $\overrightarrow{AP}$  sobre  $n$ , ou seja,

$$d(P, \pi) = \|\text{Proj}_n \overrightarrow{AP}\| = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot n|}{\|n\|}.$$



Se na expressão anterior tomarmos  $P : (x_0, y_0, z_0)$ ,  $A : (a_1, a_2, a_3)$  e supormos que o plano  $\pi$  tem equação geral  $ax + by + cz = d$ , teremos que o vetor normal a este plano é  $n = (a, b, c)$ , e portanto

$$d(P, \pi) = \frac{|a(x_0 - a_1) + b(y_0 - a_2) + c(z_0 - a_3)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (6.3)$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (aa_1 + ba_2 + ca_3)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (6.4)$$

Como o ponto  $A$  pertence ao plano, temos que  $ax_0 + by_0 + cy_0 = d$  e assim

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cy_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (6.5)$$

Observe que, como seria de se esperar, a distância não depende do ponto  $A$  escolhido.

## Exercícios

**Ex. 6.8** — Determine a distância entre os planos dados e a origem:

- a)  $x = 5$
- b)  $x + y = 1$
- c)  $2x + y - z = 0$
- d)  $2x + y + z = 2$

**Ex. 6.9** — Se a distância da origem a um plano é  $d$ , e esse plano intercepta os eixos em  $(a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$  e  $(0, 0, c)$  prove que:

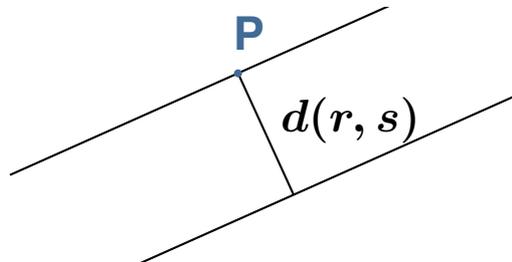
$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

## Distância entre Duas Retas

Seguindo as ideias utilizadas nos casos anteriores, a distância entre duas retas  $r$  e  $s$  será definida como a menor distância entre um ponto  $r$  e um ponto de  $s$ .

Sejam então  $r, s$  duas retas no espaço tais que  $r : A + ut$  e  $s : B + vt$ .

Se as retas forem coincidentes ou concorrentes, claramente a distância entre elas é nula. Se as retas forem paralelas e não coincidentes a distância entre elas é igual a distância de um ponto  $P$  qualquer de  $r$  a  $s$ , e assim essa distância pode ser calculada usando os conhecimentos obtidos na seção anterior.



Se as retas  $r$  e  $s$  forem reversas começamos escolhendo um ponto  $P$  sobre  $r$  e um ponto  $Q$  sobre  $s$ . Projetamos então o vetor  $\overrightarrow{PQ}$  sobre o vetor  $n = u \times v$  que é ortogonal as retas  $r$  e  $s$ . A norma dessa projeção é a distância entre as retas.

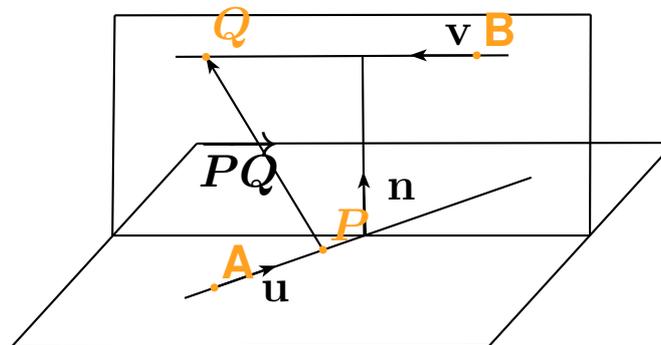


Fig. 6.6: Distância entre retas reversas.

Como

$$\text{Proj}_n \overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot n}{\|n\|} n$$

e assim:

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot n|}{\|n\|} \quad (6.6)$$

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot n|}{\|u \times v\|} \quad (6.7)$$

## Exercícios

**Ex. 6.10** — Determinar a equação da reta que passa pelo ponto  $(3, 1)$  e tal que a distância desta reta ao ponto  $(-1, 1)$  é igual a  $2\sqrt{2}$ . (Duas soluções)

**Ex. 6.11** — Determinar a equação do lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que sua distância a reta  $4x - 3y + 12 = 0$  é sempre igual a duas vezes a distância ao eixo  $x$ .

**Ex. 6.12** — O ângulo de inclinação de cada uma de duas retas paralelas é  $\alpha$ . Se uma reta passa pelo ponto  $(a, b)$  e a outra pelo ponto  $(c, d)$ , mostrar que a distância entre elas é

$$|(c - a) \operatorname{sen} \alpha - (d - b) \operatorname{cos} \alpha|$$

**Ex. 6.13** — Ache as equações dos planos paralelos ao plano  $3x - 2y + 6z + 8 = 0$  e que distam 2 desse plano.

**Ex. 6.14** — Ache a distância entre os planos paralelos

a)  $4x + 8y + z = 9$  e  $4x - 8y + z + 18 = 0$

b)  $3x - 2y + 6z + 8 = 0$  e  $6x - 4y + 12z + 12 = 0$

**Ex. 6.15 —** Ache a equação da reta que passa pelo ponto  $(2, 1, 5)$  e que intercepta a reta

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 3}{2}$$

perpendicularmente.

$(-2, 1)$  é sempre igual a três vezes a distância a reta  $y + 4 = 0$ .

**Ex. 6.16 —** Determinar a distância do ponto a reta:

a) ponto  $(7, 7, 4)$  à reta  $6x + 2y + z - 4 = 0$  e  $6x - y - 2z - 10 = 0$

b) ponto  $(-1, 2, 3)$  à reta  $\frac{x - 7}{6} = \frac{y + 3}{-2} = \frac{z}{3}$

**Ex. 6.17 —** Ache os pontos sobre o eixo  $y$  que distam 4 do plano  $x + 2y - 2z = 0$

**Ex. 6.18 —** Determinar a distância  $d$  do plano  $3x - 12y + 4z - 3 = 0$  ao ponto  $A = (3, -1, 2)$  pelo seguinte processo: Encontrar o ponto  $B$ , pé da perpendicular desde  $A$  até o plano. Então determinar  $d$  como o comprimento do segmento  $AB$ .

**Ex. 6.19 —** Determine a distância do ponto  $(2, 2, 2)$  a reta

$$x = 2t + 1$$

$$y = 3t + 2$$

$$z = 5t + 1$$

Ex. 6.20 — Determine a distância entre as retas  $r$  que tem equação paramétrica:

$$x = 2t + 1$$

$$y = 3t + 2$$

$$z = 5t + 1$$

e a reta  $s$  que tem equação paramétrica:

$$x' = 4s + 1$$

$$y' = 2s + 2$$

$$z' = 1s + 5$$

### 3 Retas em Coordenadas Polares

Se sobrepormos um sistema de coordenadas polares a um sistema de coordenadas cartesianas de modo que o polo e a origem coincidam e a direção principal  $OA$ , sobreponha-se a parte positiva do eixo  $x$  (veja figura 6.7), podemos ver que a relação entre as coordenadas para o mesmo ponto é dada por:

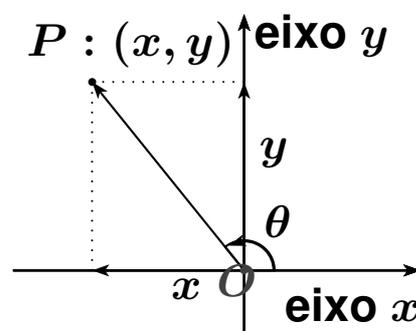


Fig. 6.7

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad (6.8)$$

sendo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arcsen} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arccos} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Substituindo as relações dada por 6.8, na equação geral de uma reta  $s : Ax + By = C$ , temos que esta pode ser expressa em coordenadas polares como:

$$r (A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta) = C \quad (6.9)$$

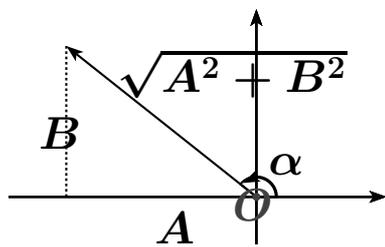
ou equivalentemente:

$$\frac{C}{r} = (A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta) \quad (6.10)$$

**Exemplo 6.11.** A equação da reta  $3x + 2y = 7$  em coordenadas polares é:

$$r(3 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta) = 7$$

◁



Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $C$  é positivo (Mudando os sinais de ambos os lados se necessário).

Se construirmos, no quadrante apropriado, um triângulo retângulo de lados  $A$  e  $B$ , a hipotenusa desse triângulo será  $\sqrt{A^2 + B^2}$ , logo:

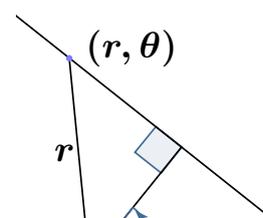
$$\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \operatorname{sen} \alpha, \quad \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \alpha$$

Se dividirmos ambos os lados da equação 6.9 por  $\sqrt{A^2 + B^2}$  ficamos com:

$$r \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \theta + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \operatorname{sen} \theta \right) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

e conseqüentemente

$$r (\cos \alpha \cos \theta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta) = h$$



sendo

$$h = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

e desse modo a equação da reta em coordenadas polares pode ser escrita como:

$$r \cos(\theta - \alpha) = h$$

A equação anterior é conhecida como equação padrão da reta em coordenadas polares.

O significado geométrico de  $h$  é a distância da reta a origem enquanto  $\alpha$  é o ângulo entre o eixo polar e a reta passando pela origem e pelo ponto que realiza a distância mínima entre a origem e a reta  $s$ . Podemos ver esse fato revertendo o problema, isto é, seja  $s$  uma reta tal que a distância dessa reta à origem  $O$  é  $h$ . Se tomarmos um ponto de coordenadas  $(r, \theta)$  sobre essa reta de vetor posição  $r$ . Então o triângulo delimitado por  $h$ ,  $r$  e a reta  $s$  forma um triângulo retângulo com hipotenusa  $r$ . Em relação ao ângulo  $\theta - \alpha$  o lado adjacente é  $h$  e assim

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{h}{r}$$

e logo

$$r \cos(\theta - \alpha) = h$$

**Exemplo 6.12.** *Ache o tamanho e a direção do segmento que liga a perpendicularmente origem a reta abaixo.*

$$\frac{1}{r} = 8 \cos \theta + 6 \operatorname{sen} \theta$$

◁

**Solução:** Começaremos colocando a equação

$$\frac{1}{r} = 8 \cos \theta + 6 \operatorname{sen} \theta$$

na forma padrão:

$$r \cos(\theta - \alpha) = h$$

que expandindo fica:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h} \cos \alpha \cos \theta + \frac{1}{h} \sin \alpha \sin \theta$$

Igualando os termos termos:

$$\frac{1}{h} \cos \alpha = 8 \quad (6.11)$$

$$\frac{1}{h} \sin \alpha = 6 \quad (6.12)$$

Elevando as equações **6.11** e **6.12** ao quadrado e somando termos:

$$\frac{1}{h^2} = 100$$

e conseqüentemente  $h = \frac{1}{10}$ .

Dividindo a equação **6.12** pela equação **6.11** temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Conseqüentemente, temos que a distância é  $\frac{1}{10}$  e a inclinação da reta é  $\operatorname{arctg} \left( \frac{3}{4} \right)$

□

## Exercícios

Ex. 6.1 — Ache a distância da reta

$$\frac{6}{r} = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$$

a origem.

**Ex. 6.2 —** Ache o tamanho e a direção do segmento que liga a perpendicularmente origem a reta abaixo.

$$\frac{2}{r} = 4 \cos \theta + 3 \operatorname{sen} \theta$$

**Ex. 6.3 —** Identifique e desenhe as seguintes retas, colocando as na forma padrão. Confira suas respostas usando coordenadas cartesianas

a)  $r \cos \theta = 3$

b)  $r \operatorname{sen} \theta = 3$

c)  $r(5 \cos \theta + \operatorname{sen} \theta) = 3\sqrt{2}$

d)  $5(5 \cos \theta - 12 \operatorname{sen} \theta) = 39$

**Ex. 6.4 —** Mostre que se uma reta é paralela ao eixo  $x$  e dista  $h$  da origem, então sua equação é dada por  $r \operatorname{sen} \theta = h$

**Ex. 6.5 —** Mostre que se uma reta é paralela ao eixo  $y$  e dista  $h$  da origem, então sua equação é dada por  $r \cos \theta = h$  ou por  $r \cos \theta = -h$ , dependendo se a reta se encontra a esquerda ou a direita do eixo  $y$ .

**Ex. 6.6 —** Mostre que a equação da reta ligando os pontos de coordenadas polares  $(r_1, \theta_1)$   $(r_2, \theta_2)$  é dada por:

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{r} = \frac{\operatorname{sen}(\theta - \theta_1)}{r_2} + \frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta)}{r_1}$$

**Ex. 6.7 — Dada a equação  $\frac{C}{r} = f(\theta)$  com**

$$f(\theta) = a \cos(\theta + \alpha) + b \cos(\theta + \beta)$$

- a) Mostre que esta equação representa uma linha reta.**
- b) Conclua que  $\frac{C_2}{r} = f(\theta + \pi/2)$  também representa uma linha reta. E que essa reta é perpendicular a reta de equação  $\frac{C}{r} = f(\theta)$ .**
- c) Mostre finalmente que todas as retas perpendiculares a  $\frac{C}{r} = f(\theta)$  são da forma  $\frac{C_2}{r} = f(\theta + \pi/2)$  para algum  $C_2$**

## Círculos e Esferas

### 1 Equações Canônicas de Círculos e Esferas

Um círculo é o conjunto de pontos no plano que estão a uma certa distância  $r$  de um ponto dado  $(a, b)$ .

Desta forma temos que um ponto  $(x, y)$  pertence ao círculo de centro  $(a, b)$  e raio  $r$  se e somente se satisfaz a equação:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

ou equivalentemente:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

De modo análogo, a equação reduzida de uma esfera de centro  $(a, b, c)$  e raio  $r$  é

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

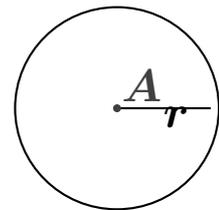


Fig. 7.1: Círculo de centro  $A$  e raio  $r$ .

Fig. 7.2: Esfera de Centro  $C$  e raio  $r$ .

**Exemplo 7.1.** *Determine a equação do círculo de centro  $(-3, 1)$  que é tangente a reta  $3x - 4y - 2 = 0$*



**Solução:** Já conhecemos o centro e precisamos determinar o raio. Nesse caso o raio é a distância entre a reta e o ponto, já que a tangente a um círculo é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência. Logo:

$$r = \frac{|3(-3) - 4 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

e assim a equação do círculo é:

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 9 \text{ ou } x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$$



**Exemplo 7.2.** *Determine a equação da esfera cujo diâmetro é o segmento que liga  $(3, -1, 2)$  a  $(5, 3, 4)$ .*



**Solução:** Nesse caso aparentemente não conhecemos nem o centro nem o raio. Mas temos que o centro é o ponto médio do segmento e que o raio é metade do diâmetro. Logo:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(5 - 3)^2 + (3 + 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{6}$$

O ponto médio é  $(4, 1, 3)$  e logo a equação da esfera é:

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 6$$



**Exemplo 7.3. Identifique a curva cuja equação é:**

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

◁

**Solução:** Identificaremos a curva completando quadrados. O termo  $x^2 - 6x$  pode ser convertido num quadrado, se somarmos 9 e  $y^2 - 4y$  pode ser convertido num quadrado somando 4. Desta forma, somaremos  $4 + 9$  em cada lado da equação  $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ . Logo temos:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \quad (7.1)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 12 + 4 + 9 \quad (7.2)$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2 \quad (7.3)$$

Logo a curva é um círculo de raio 5 e centro (3, 2). □

Podemos generalizar o exemplo anterior:

**Exemplo 7.4. Identifique a curva cuja equação é:**

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

◁

**Solução:** Como no exemplo anterior, identificaremos a curva completando quadrados. O termo  $x^2 + Ax$  pode ser convertido num quadrado, se somarmos  $\frac{A^2}{4}$  e  $y^2 + By$  pode ser convertido num quadrado somando  $\frac{B^2}{4}$ . Desta forma, somaremos  $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$

em cada lado da equação:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (7.4)$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}\right) + \left(y^2 + By + \frac{B^2}{4}\right) = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \quad (7.5)$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \quad (7.6)$$

Observamos que para a equação anterior ser a equação de um círculo,  $r^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$ , e assim temos que ter  $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$ .

No caso em que  $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C < 0$ , o lugar geométrico descrito pela equação 7.6 é vazio, pois a equação não pode ser satisfeita pois a soma de quadrados é necessariamente negativa.

No caso em que  $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C = 0$ , o lugar geométrico descrito pela equação 7.6 é o ponto  $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ , pois se a soma de quadrados perfeitos é 0 cada termo da soma é zero.  $\square$

De modo análogo, podemos demonstrar que a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

descreve uma esfera se  $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D > 0$ , um ponto se  $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D = 0$  e o conjunto vazio se  $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D < 0$ .

**Exemplo 7.5.** A superfície cuja equação é:

$$12 - 2x + x^2 + 4y + y^2 + 8z + z^2 = 0$$

é uma esfera. Encontre seu centro e raio.

**Solução:** Completando os quadrados temos

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 + 8z + 16) - 1 - 4 - 16 + 12 = 0.$$

Daí segue que:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 4)^2 = 9$$

E logo o centro dessa esfera é  $(1, -2, -4)$  e o raio é 3.  $\square$

## Círculo por três pontos

É conhecido que três pontos não colineares determinam um único círculo. Assim sendo, fixados  $P_1, P_2$  e  $P_3$  não colineares podemos facilmente encontrar a equação do círculo que passa por tais pontos. Tal equação pode ser encontrada observando que a equação geral de um círculo é da forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

e que um ponto pertence ao círculo se e somente se suas coordenadas satisfazem tal equação. A substituição de cada ponto resulta assim numa equação linear nas variáveis  $A, B, C$  e assim o fato dos três pontos pertencerem ao círculo nos fornecem um sistema linear em três equações e três variáveis  $A, B, C$ . Resolvendo tal sistema encontramos, então, a equação do círculo.

**Exemplo 7.6.** *Determine a equação do círculo que passa pelos pontos  $(-1, 2)$ ,  $(0, 1)$  e  $(-3, 2)$ .*

**Solução:** Substituindo os pontos na equação

temos o sistema:

$$\begin{cases} 5 - A + 2B + C = 0 \\ 1 + B + C = 0 \\ 13 - 3A + 2B + C \end{cases}$$

cujas solução é  $A = 4, B = 0, C = -1$ . E logo a equação é

$$x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0.$$

Completando quadrado obtemos, então:

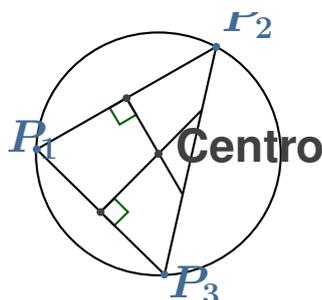
$$(x^2 + 4x + 4) + y^2 - 4 - 1 = 0.$$

Donde segue:

$$(x + 2)^2 + y^2 = 5.$$

Desse modo vemos que o círculo que passa por tais pontos tem centro  $(-2, 0)$  e raio  $\sqrt{5}$ .  $\square$

É possível encontrar a equação de um círculo por três pontos não colineares de uma outra maneira. Para esse fim consideramos o triângulo determinado pelos pontos  $P_1, P_2, P_3$  e esse circunscrito na circunferência. Assim o seu centro é o circuncentro desse triângulo, isto é, o encontro das mediatrizes.



**Exemplo 7.7.** *Determine a equação do círculo que passa pelos pontos  $(-1, 2)$ ,  $(0, 1)$  e  $(-3, 2)$ .*

◁

**Solução:** A equação da reta passando pelos pontos  $(-1, 2)$ ,  $(0, 1)$  é  $y - 1 = -x$ , e como o ponto médio desses pontos é:  $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  temos que a mediatriz relativa a esse lado é:  $y - \frac{3}{2} = x + \frac{1}{2}$  (lembrando que como a mediatriz é perpendicular ao lado seu coeficiente angular é igual a menos o inverso do coeficiente da reta).

De modo análogo a equação da reta passando pelos pontos  $(0, 1)$  e  $(-3, 2)$  é  $y = -\frac{x}{3} + 1$  e a equação da mediatriz é:  $3x = -6 + y$

temos o sistema:

$$\begin{cases} 3x = -6 + y \\ y - \frac{3}{2} = x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

cujas solução é  $x = -2, y = 0$ , ou seja o centro da circunferência é  $(-2, 0)$ . O raio pode ser calculado observando que este será a distância do centro  $(-2, 0)$  a um dos vértices do triângulo, por exemplo  $(0, 1)$ . Assim  $r^2 = 5$ , e logo a equação é:

$$(x + 2)^2 + y^2 = 5.$$

□

**Exemplo 7.8.** *Obtenha a equação da esfera que passa pelos pontos  $(0, 0, 1)$ ,  $(2, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$*

◁

**Solução:** Impondo que os pontos pertençam a esfera temos o seguinte sistema linear:

$$1 + C + D = 0$$

$$4 + 2A + D = 0$$

$$3 + A + B + C + D = 0$$

$$1 + B + D = 0$$

cuja solução é  $A = -\frac{5}{3}$ ,  $B = -\frac{1}{3}$ ,  $C = -\frac{1}{3}$ ,  $D = -\frac{2}{3}$  e assim a equação da esfera é:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{5x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

**Completando quadrado obtemos:**

$$\begin{aligned} & \left( x^2 - \frac{5x}{3} + \left( \frac{5}{6} \right)^2 \right) + \left( y^2 - \frac{y}{3} + \left( \frac{1}{6} \right)^2 \right) + \\ & + \left( z^2 - \frac{z}{3} + \left( \frac{1}{6} \right)^2 \right) - \left( \frac{5}{6} \right)^2 - \left( \frac{1}{6} \right)^2 - \left( \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{24}{36} = 0. \end{aligned}$$

**Donde segue:**

$$\left( x^2 - \frac{5}{6} \right)^2 + \left( y^2 - \frac{1}{6} \right)^2 + \left( z^2 - \frac{1}{6} \right)^2 = \frac{51}{36}.$$

□

## Exercícios

**Ex. 7.1 —** Determine a equação dos seguintes círculos:

- Centro  $(-2, 5)$  e raio  $r = 3$ .
- Centro  $(1, 3)$  e raio  $r = 2$

- c) Centro a origem e raio  $r = a$
- d) Centro  $(5, 2)$  e passando pelo ponto  $(2, 3)$
- e) Tangente ao eixo  $y$  na origem e raio  $a$
- f) Diâmetro  $(5, 2)$  a  $(-2, 10)$
- g) Centro  $(3, -2)$  tangente a  $2x - y = 0$
- h) Tangente a  $2x - 5y + 1 = 0$  no ponto  $(2, 1)$  e raio 3 (duas respostas)

**Ex. 7.2 — Identifique, dando o centro e o raio.**

- a)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$
- b)  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$
- c)  $x^2 + y^2 = 2ax$
- d)  $4x^2 - 4x = 5y - 4y^2$
- e)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$

**Ex. 7.3 — Encontre a equação do círculo que passa pelos pontos  $(4, 0)$ ,  $(0, 3)$  e a origem.**

**Ex. 7.4 — Encontre a equação dos seguintes círculos**

- a) Tangente aos eixos coordenados no segundo quadrante e com raio  $r = 4$ .
- b) Tangente ao eixo  $x$ , ao eixo  $y$  e a linha que intercepta o eixo  $x$  e o eixo  $y$  em 3 e 2 respectivamente.

**Ex. 7.5 — Verifique que as equações abaixo descrevem esferas, em caso afirmativo identifique o centro e o raio:**

a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10 = 0$

b)  $x^2 - 6x + y^2 - 4y + z^2 + 14z + 58$

c)  $x^2 + y^2 - 6y + z^2 + 4z + 16$

d)  $x^2 + 2x + y^2 + 4y - z^2 + 6z - 29$

**Ex. 7.6 —** Dados  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  então a equação da esfera que tem  $P_1P_2$  como diâmetro é

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$$

## 2 Retas Tangentes e Planos Tangentes

Uma reta é dita tangente a um círculo se a intersecção entre essa reta e o círculo for somente um ponto. Para uma reta tangente o seu vetor diretor é perpendicular ao vetor ligando o raio ao ponto de intersecção. Além disso a distância do centro do círculo a reta tangente é igual ao raio do círculo.

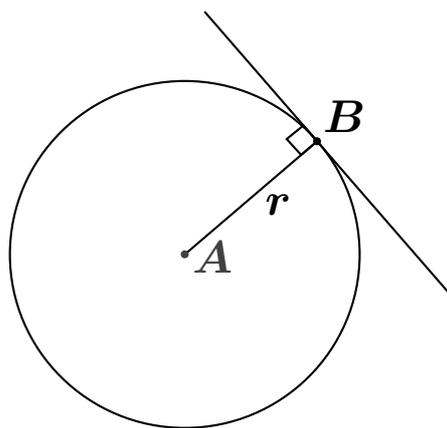


Fig. 7.3: Reta tangente a um círculo

De modo análogo, dizemos que um plano é tangente a uma esfera se esse plano interceptar a esfera num único ponto. Nesse caso o vetor normal ao plano é paralelo ao vetor radial ligando o centro da esfera ao ponto onde o plano intercepta a

esfera. E a distância do plano tangente ao centro da esfera é igual ao raio da mesma.

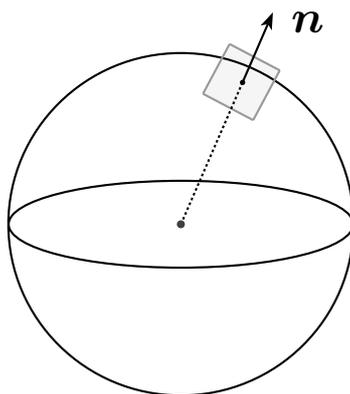


Fig. 7.4: Plano tangente a uma esfera

**Exemplo 7.9.** *Encontre a reta tangente ao círculo de equação  $x^2 + y^2 - 2y - 4x = 0$  no ponto  $(3, 3)$*

◁

**Solução:** Completando quadrados podemos colocar a equação  $x^2 + y^2 - 2y - 4x = 0$  na forma reduzida:

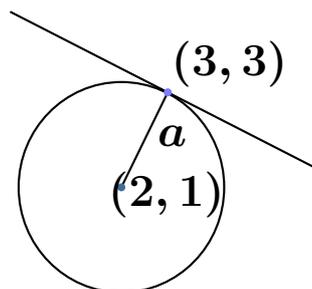
$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$$

Logo o centro do círculo tem coordenadas  $(2, 1)$ . Logo, o vetor ligando o centro do círculo ao ponto  $(3, 3)$  é  $i + 2k$  e assim o coeficiente angular da reta passando por estes pontos é igual a 2. Logo, o coeficiente da reta tangente é  $-\frac{1}{2}$  (Por quê? Tente escrever a equação da reta tangente na forma padrão obtendo antes equações paramétricas para a mesma.). E assim a equação da reta tangente é:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

ou

$$x + 2y = 9.$$



Podemos generalizar o exemplo anterior. Dado um círculo de equação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Vamos calcular a equação da reta tangente no ponto  $(x_1, y_1)$ .

Para tanto, consideraremos o vetor ligando o centro do círculo ao ponto de tangencia:  $(x_1 - a)i + (y_1 - b)j$ . Consequentemente a inclinação da reta passando por esses pontos é:  $\frac{y_1 - b}{x_1 - a}$ . Logo o coeficiente angular da reta tangente é  $-\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$ .

E assim a equação da reta tangente é da forma

$$(y - y_1) = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)$$

e logo

$$(y - y_1)(y_1 - b) = -(x_1 - a)(x - x_1)$$

e assim expandindo:

$$(x_1 - a)x + (y_1 - b)y = k$$

para alguma constante  $k$ . Somando  $(x_1 - a)(-a) + (y_1 - b)(-b)$  em ambos os lados da equação obtemos:

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = k_2$$

para alguma constante  $k_2$ , que determinaremos agora. Se substituirmos  $x = x_1$  e  $y = y_1$  teremos que

$$k_2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$

e assim a equação da reta tangente no ponto  $(x_1, y_1)$  é

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2.$$

**Exemplo 7.10.** *Obtenha as equações dos planos tangentes a esfera  $-3 - 2x + x^2 + 4y + y^2 + 2z + z^2 = 0$  que são paralelos ao plano  $x - 2y + 2z = 3$ .*

◁

**Solução:** Completando quadrados temos que a equação da esfera pode ser escrita como:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

Logo o centro dessa esfera é  $(1, -2, -1)$  e o raio é 3.

A equação geral de um plano paralelo a  $x - 2y + 2z = 3$  tem equação da forma:  $x - 2y + 2z = d$

Como esse plano é tangente a esfera a distância do centro dessas esferas ao plano é igual ao raio dessa esfera. E assim:

$$d(C, \pi) = \frac{|1 - 2(-2) + 2(-1) - d|}{9} = 3$$

e logo  $d = -6$  ou  $d = 12$  e assim as equações dos planos são  $x - 2y + 2z = -6$  e  $x - 2y + 2z = 12$ .

□

## Exercícios

**Ex. 7.1** — Encontre a equação a reta tangente no ponto indicado:

a)  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $(-3, 4)$

b)  $x^2 + y^2 = 2x - 4y$ , origem.

c) Encontre as retas tangentes ao círculo  $x^2 + y^2 = 4x$  que passam pelo ponto  $(3, 2)$ .

d) Uma corda da circunferência  $x^2 + y^2 = 25$  se encontra sobre a reta cuja equação é  $x - 7y + 25 = 0$ . Qual o comprimento dessa corda?

**Ex. 7.2 — Para um triângulo qualquer encontrar:**

a) a equação da circunferência circunscrita ao triângulo

b) a equação da circunferência inscrita ao triângulo

c) a equação da circunferência que passa pelos pontos médios dos lados do triângulo.

**Ex. 7.3 — As equações dos lados de um triângulo são  $9x + 2y + 13 = 0$ ,  $3x + 8y - 47 = 0$  e  $x - y - 1 = 0$ . Encontrar a equação da circunferência circunscrita.**

**Ex. 7.4 — Mostrar que as tangentes de inclinação  $m$  à circunferência  $x^2 + y^2 = r^2$  são  $y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$ .**

**Ex. 7.5 — Qual a equação da circunferência que passa pelos pontos  $(1, 2)$ ,  $(3, 4)$  e que tem centro sobre o eixo  $y$ ?**

**Ex. 7.6 — Fixado  $a$ , quais devem ser os dois valores de  $b$  para que a reta  $y = ax + b$  seja tangente ao círculo de centro na origem e raio  $r$ ?**

**Ex. 7.7 —** Uma circunferência de raio 5 é tangente a reta  $3x - 4y - 1 = 0$  no ponto  $(3, 2)$ . Determinar sua equação (duas soluções).

**Ex. 7.8 —** Mostrar analiticamente que qualquer reta que passa pelo ponto  $(-1, 5)$  não pode ser tangente a circunferência  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6 = 0$ . Interprete o resultado geometricamente.

**Ex. 7.9 —** Encontre a equação dos círculos que passam pelos seguintes conjuntos de pontos. Diga qual o centro, o raio e desenhe.

a)  $(3, 4), (-1, 2), (-2, 4)$

b)  $(4, 2), (-2, 3), (-1, 6)$

c)  $(a, 0), (b, 0), (0, c)$

**Ex. 7.10 —** Mostrar que o plano tangente à esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  no ponto  $(a, b, c)$  tem equação  $ax + by + cz = r^2$

**Ex. 7.11 —** Encontre a equação da esfera que passa pelos pontos  $(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$  e cujo centro esta no plano  $x + y - z = 0$

**Ex. 7.12 —** Encontre a esfera que tem centro na reta

$$r : \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

e passa pelos pontos  $(6, -1, 3)$  e  $(0, 7, 5)$

**Ex. 7.13** — Calcule a distância do ponto  $(2, 3, 4)$  à esfera  $x^2 + 4x + y^2 - 2y + z^2 + 4$ .

**Ex. 7.14** — Determine a equação da esfera cujo centro é  $(3, 2, -2)$  e que é tangente ao plano

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

**Ex. 7.15** — Determine a equação da esfera cujo centro se encontra sobre o eixo  $X$  e que passa pelos pontos  $(3, -4, 2)$  e  $(6, 2, -1)$ .

**Ex. 7.16** — A equação de uma esfera é  $x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$ . Determinar a equação da esfera concêntrica que é tangente ao plano:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

**Ex. 7.17** — Encontre os planos tangentes a esfera  $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$  que são paralelos ao plano  $4x - y + 3z = 2$

**Ex. 7.18** — Encontre a equação dos planos que contem a reta  $r$  e são tangentes a esfera  $S$ :

$$r : \frac{x + 6}{2} = y + 3 = z + 1$$

$$\text{e } S : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z + 4 = 0.$$

### 3 Circunferência em coordenadas polares

**Centrada na Origem** O caso mais simples ocorre quando a circunferência está centrada na origem nesse caso a circunferência é o conjunto de pontos que distam uma constante  $a$  da origem ou seja a equação em coordenadas polares é

$$r = a.$$

É fácil de ver que essa equação coincide com a em equação em coordenadas cartesianas. Observe que, em coordenadas cartesianas,  $P = (x, y)$  pertence a tal círculo se e somente se:  $x = a \cos \theta$  e  $y = a \sin \theta$ . Daí segue que:

$$x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^2.$$

**Passando pela Origem** Dada uma circunferência de raio  $a$  e passando pela origem. As coordenadas polares do centro dessa circunferência são  $(a, \alpha)$ .

Considere o triângulo  $\triangle OKP$ . Como  $\overline{OK}$  é diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo vemos que  $\triangle OKP$  é retângulo em  $P$ . Da definição de cosseno segue então:

$$r = 2a \cos(\theta - \alpha).$$

**Forma Geral** Dado uma circunferência de centro  $(c, \alpha)$  e raio  $a$ , usando a lei dos cossenos temos que:

$$a^2 = r^2 + c^2 - 2rc \cos(\theta - \alpha)$$

que é a equação da circunferência na forma geral.

## Exercícios

**Ex. 7.1 —** Mostre que o centro do círculo de equação  $r = A \cos \theta + B \sin \theta$  é

$$\left( \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{2}, \operatorname{arctg} \frac{B}{A} \right)$$

**Ex. 7.2 —** Mostre que a reta  $r \sin \theta = 4$  é tangente ao círculo  $r = 8 \cos \theta$

**Ex. 7.3 —** Mostre que a equação da tangente ao círculo

$$r = 2a \cos \theta$$

no ponto  $(r_1, \theta_1)$  é:

$$r \cos(\theta - 2\theta_1) = 2a \cos^2 \theta_1$$

**Ex. 7.4 —** Mostre que para todos os valores de  $a$  a reta

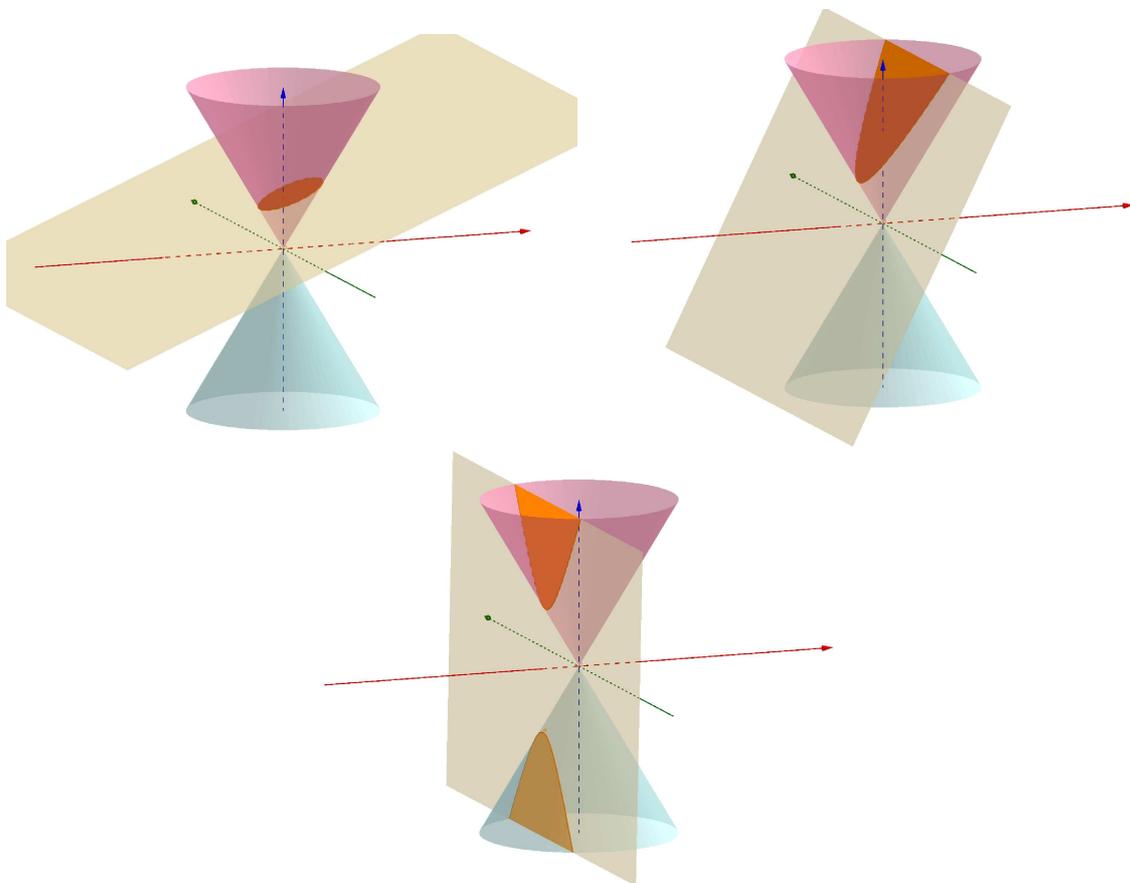
$$r \cos(\theta - \alpha) = a + r_1 \cos \alpha$$

é tangente ao círculo

$$r^2 - 2rr_1 \cos \theta + r_1^2 - a^2 = 0$$

# 1 Introdução

As curvas cônicas ou seções cônicas são as curvas obtidas pela intersecção de um cone com planos que não contenham o vértice desse cone.



Existem essencialmente três tipos de cônicas que podem ser obtidas a partir de um cone cuja reta geratriz faz ângulo

$\alpha$  com o eixo desse cone:

- *parábola*: obtida pela intersecção do cone com um plano que forma ângulo  $\alpha$  com o eixo do cone;
- *elipse*: obtida pela intersecção do cone com um plano que forma um ângulo  $\theta > \alpha$  com o eixo do cone;
- *hipérbole*: obtida pela intersecção do cone com um plano que forma um ângulo  $\theta < \alpha$  com o eixo do cone.

Pode-se mostrar que o lugar geométrico de tais curvas num plano pode ser caracterizado por relações envolvendo a distância de seus pontos a seus focos e retas diretrizes como descrito a seguir (ver Seção 8.6). Assim sendo, definimos:

**Definição 8.1.** *Uma elipse  $\mathcal{E}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  de eixo maior medindo  $2a > \|\overrightarrow{F_1F_2}\|$  é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  é igual a  $2a$ . Ou seja, dados  $F_1$  e  $F_2$ , com  $\|\overrightarrow{F_1F_2}\| = 2c$ , e um número  $a > c$ , dizemos que  $P$  é um ponto da elipse  $\mathcal{E}$  se e somente se:*

$$\|\overrightarrow{F_1P}\| + \|\overrightarrow{F_2P}\| = 2a. \quad (8.1)$$

**Definição 8.2.** *Uma hipérbole  $\mathcal{H}$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  de eixo transversal medindo  $2a < \|\overrightarrow{F_1F_2}\|$  é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  é igual a  $2a$ . Ou seja, dados  $F_1$  e*

$F_2$ , com  $\|\overrightarrow{F_1F_2}\| = 2c$ , e um número  $a < c$ , dizemos que  $P$  é um ponto da hipérbole  $\mathcal{H}$  se e somente se:

$$\left| \|\overrightarrow{F_1P}\| - \|\overrightarrow{F_2P}\| \right| = 2a. \quad (8.2)$$

**Definição 8.3.** Uma parábola  $\mathcal{P}$  de foco  $F$  e reta diretriz  $d$  é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujas distâncias ao ponto  $F$  e a reta  $d$  são iguais. Ou seja, dados  $F$  e  $d$ , dizemos que  $P$  é um ponto da parábola  $\mathcal{P}$  se e somente se:

$$\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d). \quad (8.3)$$

## 2 Elipse

Conforme descrito na Definição 8.1, uma elipse  $\mathcal{E}$  é o lugar geométrico formado por pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos,  $F_1$  e  $F_2$ , é constante.

Nesta seção estudaremos a equação chamada forma canônica da elipse, que representa uma elipse alinhada com plano cartesiano e centrada em sua origem. Antes, porém, fixemos a terminologia básica envolvida no estudo de elipses.

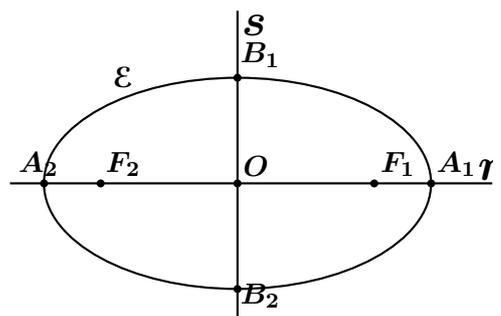


Fig. 8.1: Elipse

## Terminologia

- Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  descritos na Definição 8.1 são denominados focos da elipse. O segmento  $\overline{F_1F_2}$  de comprimento  $2c$  é o segmento focal da elipse e  $2c$  é a distância focal da elipse.
- A reta  $r$  contendo  $F_1$  e  $F_2$  é denominada reta focal da elipse.
- A intersecção de  $\mathcal{E}$  com  $r$  consiste de dois pontos  $A_1$  e  $A_2$  que são os vértices da elipse sobre a reta focal. O segmento  $\overline{A_1A_2}$  de comprimento  $2a$  é o chamado eixo focal da elipse (ou eixo maior da elipse).
- O ponto médio  $O \in r$  do segmento  $\overline{F_1F_2}$  é o centro da elipse;
- A reta  $s$  perpendicular a  $r$  por  $O$  é a reta não focal da elipse.
- A intersecção de  $\mathcal{E}$  com  $s$  consiste de dois pontos  $B_1$  e  $B_2$  que são os vértices da elipse sobre a reta não focal. O segmento  $\overline{B_1B_2}$  é o chamado eixo não focal da elipse (ou eixo menor da elipse).
- Qualquer segmento cujos extremos estão sobre  $\mathcal{E}$  é denominado corda da elipse;
- Chamamos de amplitude focal o comprimento de uma corda que contenha um dos focos da elipse e que seja perpendicular ao eixo focal desta. Notamos que existem duas dessas cordas, usualmente denominadas individualmente por *lactus rectum*.

- A menor região retangular que contém a elipse é chamada retângulo fundamental da elipse.
- A menor coroa circular que contém a elipse é denominada coroa fundamental da elipse.

## Equação da Elipse

Começemos nosso estudo da equação da elipse observando os dois exemplos abaixo descritos.

**Exemplo 8.4.** *Usando a mesma notação descrita na Subseção 8.2, consideremos num sistema de coordenadas cartesiano uma elipse de focos  $F_1 = (0, 0)$  e  $F_2 = (2, 1)$  e eixo focal medindo  $2a = 4$ .*

*Tomando  $P = (x, y)$  a equação (8.1) fica:*

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = 4.$$

*Vamos então manipular tal equação de modo a eliminar suas raízes quadradas.*

*Isolando o termo  $\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$  e elevemos a igualdade resultante ao quadrado de modo a obter:*

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 2x + 1) = 16 - 8\sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2).$$

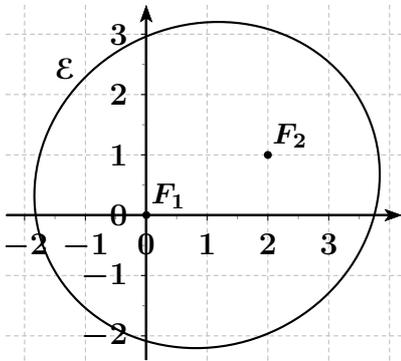
*Simplificando e isolando  $8\sqrt{x^2 + y^2}$ :*

$$4x + 2y + 11 = 8\sqrt{x^2 + y^2}.$$

*Finalmente, elevando ao quadrado e simplificando a expressão obtida, chegamos a:*

$$48x^2 + 60y^2 + 16xy + 88x + 44y + 121 = 0. \quad (8.4)$$

**Essa equação quadrática é, então, a representação cartesiana procurada da elipse  $\mathcal{E}$ .**



**Fig. 8.2: Exemplo 8.4**

**Exemplo 8.5. Considere agora, num sistema de coordenadas cartesiano,  $F_1 = (-4, 0)$  e  $F_2 = (4, 0)$  de modo que o eixo focal  $r$  fica alinhado com o eixo  $Ox$  e o centro  $O$  da elipse fica sobre a origem do sistema de coordenadas. Estudemos uma elipse de eixo focal medindo  $2a = 10$ . Seja  $P = (x, y)$  um ponto qualquer da elipse  $\mathcal{E}$ .**

**Em coordenadas cartesianas, a equação (8.1) fica:**

$$\sqrt{(x + 4)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = 10.$$

**Tentaremos no que se segue simplificar tal equação eliminando as raízes quadradas manipulando-a algebricamente.**

**Inicialmente, isolemos a raiz  $\sqrt{(x + 4)^2 + y^2}$  e elevemos a igualdade obtida ao quadrado:**

$$(x + 4)^2 + y^2 = 100 + [(x - 4)^2 + y^2] - 20\sqrt{(x - 4)^2 + y^2}.$$

**Simplificando tal equação chegamos e manipulando-a de modo a isolar o termo  $20\sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$  ficamos com:**

$$100 - 16x = 20\sqrt{(x - 4)^2 + y^2},$$

ou ainda:

$$5 - \frac{4}{5}x = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2},$$

Elevando esta igualdade ao quadrado chegamos a:

$$25 + \frac{16}{25}x^2 - 8x = x^2 + 16 - 8x + y^2.$$

Donde temos:

$$\frac{9}{25}x^2 + y^2 = 9.$$

Finalmente, dividindo-a por 9, segue:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \tag{8.5}$$

que é a forma canônica da elipse  $\mathcal{E}$ .



Esses exemplos e os cálculos nelos envolvidos sugerem que toda elipse pode ser representada no plano cartesiano por um equação quadrática da forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde  $A, B, C, D, E$  e  $F$  são constantes (que dependem da elipse a ser representada). Tal suposição prova-se de fato verdadeira (deixamos ao leitor interessado sua demonstração).

No entanto, é visível que a Equação (8.5) obtida no segundo exemplo é muito mais simples que a Equação (8.4) obtida no primeiro. Isso ocorre devido a uma melhor escolha, no Exemplo 8.5, do sistema de coordenadas usado.

Encontremos, então, a equação da elipse  $\mathcal{E}$  num sistema de coordenadas adequado a  $\mathcal{E}$ .

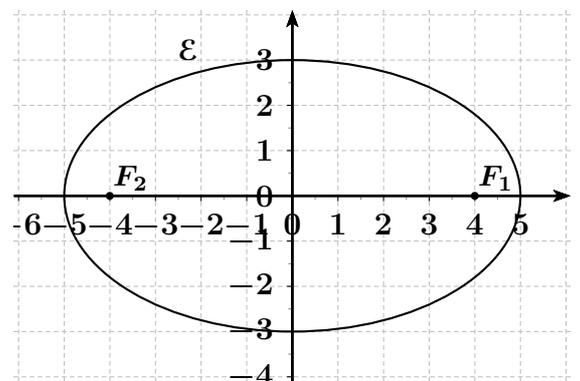


Fig. 8.3: Exemplo 8.5

Assuma que os focos  $F_1$  e  $F_2$  possuem coordenadas  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$  respectivamente. Tomando  $P = (x, y)$ . Da Equação (8.1) obtemos:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

e logo  $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ . Elevando ao quadrado ambos os lados dessa expressão obtemos:

$$c^2 + 2cx + x^2 + y^2 = 4a^2 - 2cx - 4a\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2} + c^2 + x^2 + y^2$$

Simplificando temos que

$$a\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os lados da equação obtemos

$$a^2 (c^2 - 2cx + x^2 + y^2) = (a^2 - cx)^2$$

$$a^2 (c^2 - 2cx + x^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2 (c^2 - 2cx + x^2 + y^2) - (a^4 - 2a^2cx + c^2x^2) = 0$$

$$-a^4 + a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2 - c^2x^2 = 0$$

$$a^2 (a^2 - c^2) = (a^2 - c^2) x^2 + a^2y^2$$

Substituindo  $b^2 = (a^2 - c^2)$  temos

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2.$$

Dividindo ambos os lados por  $a^2b^2$  chegamos finalmente a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Chegamos assim à seguinte proposição:

**Proposição 8.6.** *Uma elipse  $\mathcal{E}$  de focos  $F_1 = (c, 0)$  e  $F_2 = (-c, 0)$  e eixo maior medindo  $2a$  tem equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8.6)$$

*onde  $b$  é tal que  $a^2 = b^2 + c^2$ .*

*Tal equação é usualmente conhecida como a forma canônica da elipse (ou equação reduzida da elipse).*

*Os números  $a, b$  e  $c$  são conhecidos como parâmetros geométricos da elipse.*

**Observação 8.7.** *Se na dedução da equação da elipse tivéssemos adotado o sistema de coordenadas com os focos sobre o eixo  $y$  e a origem entre os focos, isto é o sistema com o eixo maior  $\overline{A_1A_2}$  de comprimento  $2a$  sobre o eixo  $y$  e o eixo menor  $\overline{B_1B_2}$  de comprimento  $2b$  sobre o eixo  $x$ , teríamos, no final, a equação:*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

**Observação 8.8.** *Para uma elipse de equação:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

*com  $a > b$ , é fácil ver que:*

- *O retângulo fundamental da elipse é a região retangular  $R = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2; x \in [-a, a], y \in [-b, b]\}$ .*
- *A coroa fundamental da elipse é a região  $C = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2; b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$ .*

## Esboço da Elipse

Considere uma elipse  $\mathcal{E}$  de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com  $a, b > 0$ .

Observe inicialmente que, se um ponto  $P = (x, y)$  está na elipse  $\mathcal{E}$ , também a ela pertencem os pontos  $P' = (-x, y)$ ,  $P'' = (x, -y)$  e  $P''' = (-x, -y)$ . Desse modo, basta para esboçarmos  $\mathcal{E}$  basta estudarmos a elipse no primeiro quadrante do sistema de coordenadas e refletirmos tal esboço ao longo dos eixos  $Ox$  e  $Oy$  (que são eixos de simetria da elipse).

Além disso, isolando-se o parâmetro  $y$  da equação de  $\mathcal{E}$  obtemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

donde observamos que para esboçarmos  $\mathcal{E}$  no primeiro quadrante basta estudarmos o gráfico da função:

$$\begin{aligned} f : [0, a] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

**Observação 8.9.** Note que para  $x > a$ , temos  $(a^2 - x^2) < 0$  e, portanto,  $f$  não fica bem definida.

Como  $f(0) = b$  e  $f(a) = 0$  temos que dois dos vértices da elipse têm coordenadas  $(0, b)$  e  $(a, 0)$ .

Além disso, temos que  $f$  é decrescente, já que, para  $x_0, x_1 \in [0, a]$ , temos:

$$\begin{aligned} x_0 < x_1 &\iff x_0^2 < x_1^2 \iff a^2 - x_0^2 > a^2 - x_1^2 \\ &\iff \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_0^2} > \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2} \iff f(x_0) > f(x_1). \end{aligned}$$

O uso de cálculo diferencial nos permite concluir que o gráfico de  $f$  é *côncavo*, isto é fixos dois pontos  $P_0$  e  $P_1$  quaisquer sobre o gráfico de  $f$ , temos que o gráfico de  $f$  fica acima do segmento  $\overline{P_0P_1}$ .

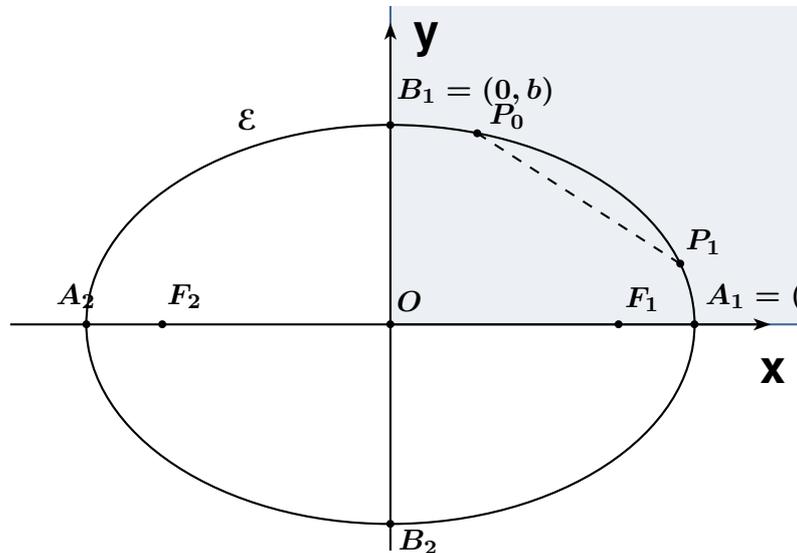


Fig. 8.4: Esboço da Elipse

A concavidade do gráfico de  $f$  decorre do fato de que a segunda derivada de  $f$  é dada por:

$$f''(x) = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}},$$

que é negativa para todo  $x \in (0, a)$ .

**Observação 8.10.** *Uma elipse pode ser facilmente desenhada com o auxílio de um barbante de comprimento  $2a$ . Basta para isso fixarmos as extremidades do barbante nos focos e traçarmos uma curva com o lápis apoiado (porém não preso) no barbante de modo a manter este sempre esticado.*

## Exemplos

**Exemplo 8.11.** *Determine a equação da elipse de focos  $(3, 0)$  e  $(-3, 0)$  e vértices  $(0, 4)$  e  $(0, -4)$ .*

◁

**Solução:** Primeiramente notamos que temos uma elipse de focos no eixo  $Ox$  (pois a segunda coordenada dos focos é 0). Então, usando a mesma notação da Proposição 8.6, temos  $c = 3$  e  $b = 4$ , e, como  $a^2 = b^2 + c^2$ , segue que  $a = 5$ . Desse modo a equação procurada é:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

que é uma elipse com vértices  $A_1 = (5, 0)$ ,  $A_2 = (-5, 0)$ ,  $B_1 = (0, 4)$ ,  $B_2 = (0, -4)$  e focos  $F_1 = (3, 0)$  e  $F_2 = (-3, 0)$ . ◻

**Exemplo 8.12.** *Determine a equação da elipse de focos  $(0, 4)$  e  $(0, -4)$  e eixo maior medindo 12.*

◁

**Solução:** Nesse exemplo temos uma elipse de focos no eixo  $Oy$  (pois a primeira coordenada dos focos é 0). Assim, usando a notação da Observação 8.15, temos  $c = 4$  e  $2a = 12$  e, como  $a^2 = b^2 + c^2$ , segue que  $b = 2\sqrt{5}$ . Desse modo a equação procurada é:

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1,$$

que é uma elipse com vértices  $A_1 = (0, 6)$ ,  $A_2 = (0, -6)$ ,  $B_1 = (2\sqrt{5}, 0)$ ,  $B_2 = (-2\sqrt{5}, 0)$  e focos  $F_1 = (0, 4)$  e  $F_2 = (0, -4)$ . ◻

**Exemplo 8.13.** *Seja  $\mathcal{E}$  uma elipse de centro na origem e tal que um de seus vértices sobre a reta focal é  $(0, 5)$ . Sabendo que  $\mathcal{E}$  passa pelo ponto  $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5}\right)$ , determine a equação da elipse.*



**Solução:** Nesse exemplo temos novamente uma elipse de focos no eixo  $Oy$  (nesse caso porque nos é informado que o centro da elipse está na origem e o ponto  $(0, 5)$  sobre a reta focal). Assim, usando a notação da Observação 8.15, temos  $a = 5$ . Desse modo a equação procurada é do tipo:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

com  $0 < b < 5$ .

Usando agora que o ponto  $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5}\right)$  pertence a  $\mathcal{E}$  temos que:

$$\frac{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}{b^2} + \frac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{25} = 1.$$

Resolvido tal equação (de incógnita  $b$ ) obtemos  $b = 3$ . Logo a equação da elipse é:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$



### 3 Hipérbole

De acordo com a Definição 8.2, uma hipérbole  $\mathcal{H}$  é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a  $2a$  (onde  $2a < \|\overrightarrow{F_1F_2}\|$ ).

Desenvolveremos nesta seção a equação tida como a forma canônica da hipérbole, que descreve uma hipérbole cujos focos estão em um dos eixos coordenados simetricamente dispostos em relação a origem. Assim como fizemos para a elipse, fixemos primeiramente a terminologia básica envolvida no estudo de hipérboles.

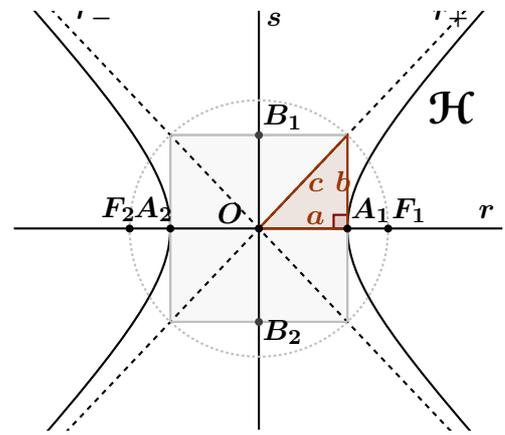


Fig. 8.5: Hipérbole

## Terminologia

- Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  descritos na Definição 8.2 são denominados focos da hipérbole. O segmento  $\overline{F_1F_2}$  de comprimento  $2c$  é o segmento focal da hipérbole e  $2c$  é a distância focal da hipérbole.
- A reta  $r$  contendo  $F_1$  e  $F_2$  é denominada reta focal da hipérbole.
- A intersecção de  $\mathcal{H}$  com  $r$  consiste de dois pontos  $A_1$  e  $A_2$  que são os vértices da hipérbole sobre a reta focal. O segmento  $\overline{A_1A_2}$  de comprimento  $2a$  é o chamado eixo transversal da hipérbole.
- O ponto médio  $O \in r$  do segmento  $\overline{F_1F_2}$  é o centro da hipérbole;

- O segmento  $\overline{B_1B_2}$  de comprimento  $2b$  (onde  $c^2 = a^2 + b^2$ ), cujos extremos  $B_1$  e  $B_2$  estão simetricamente localizados em relação ao centro  $O$  da hipérbole sobre a reta  $s$  perpendicular a  $r$  por  $O$ , é denominado eixo conjugado da hipérbole;
- Os números  $a$ ,  $b$  e  $c$  são conhecidos como parâmetros geométricos da hipérbole.
- As retas  $r_-$  e  $r_+$  pelo centro  $O$  de inclinação  $-b/a$  e  $b/a$  respectivamente são as assíntotas da hipérbole (ver Subseção 8.3);
- Qualquer segmento cujos extremos estão sobre  $\mathcal{H}$  é denominado corda da hipérbole;
- Chamamos de amplitude focal da hipérbole o comprimento de uma corda que contenha um dos focos da hipérbole e que seja perpendicular à reta focal desta.
- O retângulo fundamental da hipérbole é a região retangular  $R = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2; x \in [-a, a], y \in [-b, b]\}$ .
- Uma hipérbole é dita equilátera quando os parâmetros geométricos  $a$  e  $b$  dessa hipérbole são iguais.

## Equação da Hipérbole

Escrevendo a equação (8.2), apresentada na Definição 8.2, e manipulando-a algébricamente de modo análogo ao que fizemos para a elipse chegamos ao seguinte resultado:

**Proposição 8.14.** *Uma hipérbole  $\mathcal{H}$  de focos  $F_1 = (c, 0)$  e  $F_2 = (-c, 0)$  e eixo transversal medindo  $2a$  tem equação*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8.7)$$

onde  $b$  é tal que  $c^2 = a^2 + b^2$ .

*Tal equação é usualmente conhecida como a forma canônica da hipérbole (ou equação reduzida da hipérbole).*

**Observação 8.15.** *Se na dedução da equação da hipérbole tivéssemos partido de focos localizados sobre o eixo  $Oy$  (ou seja  $F_1 = (0, c)$  e  $F_2 = (0, -c)$ ), teríamos chegado à equação:*

$$-\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

## Assíntotas

**Definição 8.16.** *Uma reta  $r$  de equação  $y = mx + n$  é dita ser uma assíntota de uma dada função  $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  em  $+\infty$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) se a distância entre o gráfico de  $f$  a reta  $r$  tende a zero quando  $x$  vai para infinito, isto é se:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} d(P, r) = 0, \quad (8.8)$$

onde  $P = (x, f(x))$ . Analogamente podemos definir assíntota de  $f$  em  $-\infty$ .

A proposição abaixo mostra que hipérbolas admitem duas assíntotas.

**Proposição 8.17.** *As retas  $r_+$  e  $r_-$  de equações*

$$r_+ : y = \frac{b}{a}x \quad e \quad r_- : y = -\frac{b}{a}x$$

*são assíntotas da hipérbole  $\mathcal{H}$  de equação*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**Demonstração.** De fato, para uma tal hipérbole  $\mathcal{H}$ , temos que  $P = (x, y) \in \mathcal{H}$  se e somente se  $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ . Então temos:

$$\begin{aligned} d(P, r_+) &= \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \\ &= \frac{|bx - ay| |bx + ay|}{\sqrt{b^2 + a^2} |bx + ay|} \\ &= \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{\sqrt{b^2 + a^2} |bx + ay|} \\ &= \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2 + a^2} |bx + ay|} \end{aligned}$$

Assim sendo, temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\pm\infty, \pm\infty)} d(P, r_+) = 0.$$

Analogamente, temos também que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\pm\infty, \mp\infty)} d(P, r_-) = 0.$$

**Observação 8.18.** *Rigorosamente,  $r_+$  e  $r_-$  são assíntotas, no sentido da Definição 8.16, da função*

$$f_+(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

em  $+\infty$  e  $-\infty$ , respectivamente; e da função

$$f_-(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

em  $-\infty$  e  $+\infty$ , respectivamente. Funções essas obtidas da equação de  $\mathcal{H}$  isolando-se o parâmetro  $y$ .

## Esboço da Hipérbole

Seja uma Hipérbole  $\mathcal{H}$  de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

com  $a, b > 0$ .

Como na elipse observamos que, se um ponto  $P = (x, y)$  está na hipérbole  $\mathcal{H}$ , também a ela pertencem os pontos  $P' = (-x, y)$ ,  $P'' = (x, -y)$  e  $P''' = (-x, -y)$ . Assim sendo, a hipérbole  $\mathcal{H}$  é *simétrica* em relação aos eixos  $Ox$  e  $Oy$ .

Além disso, isolando-se o parâmetro  $y$  da equação de  $\mathcal{H}$  obtemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Estudemos então o gráfico da função:

$$\begin{aligned} f &: [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \end{aligned}$$

**Observação 8.19.** Observe que, no caso a hipérbole, para  $x \in [0, a)$ , temos  $(x^2 - a^2) < 0$  e, portanto,  $f$  não fica bem definida.

Note agora que  $f(a) = 0$  nos dá o vértice  $A_1 = (a, 0)$  da hipérbole. Além disso, temos que  $f$  é *crescente*, já que, para

$x_0, x_1 \in [a, +\infty)$ , temos:

$$\begin{aligned}x_0 < x_1 &\iff x_0^2 < x_1^2 \iff x_0^2 - a^2 < x_1^2 - a^2 \\ &\iff \frac{b}{a} \sqrt{x_0^2 - a^2} < \frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a^2} \iff f(x_0) < f(x_1).\end{aligned}$$

Cálculo diferencial nos permite concluir que o gráfico de  $f$  também é *côncavo* no caso da hipérbole.

A concavidade do gráfico de  $f$  decorre do fato de que a segunda derivada de  $f$  é dada por:

$$f''(x) = -\frac{ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}},$$

que é negativa para todo  $x \in [a, +\infty)$ .

Finalmente, sabemos que  $f(x)$  tem a reta  $r_+ : y = \frac{b}{a}x$  como *assíntota* e é tal que  $f(x) < \frac{b}{a}x$  para todo  $x \in [a, +\infty)$ . Desse modo sabemos que  $f(x)$  se aproxima assintoticamente de  $r_+$ , por baixo dessa reta, quando  $x$  tende a  $+\infty$ .

## Exemplos

**Exemplo 8.20.** *Uma hipérbole  $\mathcal{H}$  tem vértices nos pontos  $(0, 4)$  e  $(0, -4)$ , e um foco no ponto  $(-5, 0)$ . Obtenha a equação da hipérbole e de suas assíntotas.*

◁

**Solução:** É fácil perceber que  $\mathcal{H}$  é uma hipérbole com centro na origem e focos no eixo  $Oy$ . Assim sua equação é do tipo:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

com  $c^2 = a^2 + b^2$  e  $2c$  a distância focal.

Como  $\mathcal{H}$  tem vértices  $(0, 4)$  e  $(0, -4)$  segue que  $a = 4$ . Como um dos focos de  $\mathcal{H}$  é  $(-5, 0)$  segue que  $c = 5$ . Logo, a partir da igualdade  $c^2 = a^2 + b^2$ , obtemos  $b = 3$ . Assim a equação de  $\mathcal{H}$  é:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

As assíntotas de  $\mathcal{H}$  são  $r_+ : x = (b/a)y$  e  $r_- : x = -(b/a)y$ , ou seja:

$$r_+ : x = \left(\frac{3}{4}\right)y \quad r_- : x = -\left(\frac{3}{4}\right)y.$$

□

**Exemplo 8.21.** *Uma hipérbole  $\mathcal{H}$  tem os focos num dos eixos coordenados e centro na origem. Sabendo que uma das assíntotas de  $\mathcal{H}$  é a reta  $3x - 2y = 0$  e que  $P = (4\sqrt{2}, 6) \in \mathcal{H}$ , determine a equação de  $\mathcal{H}$ .*

◁

**Solução:**

- Focos no eixo  $Ox$ :

Seja  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  a equação da hipérbole procurada. Como a reta  $3x - 2y = 0$ , que é também a reta de equação  $y = \frac{3}{2}x$ , é uma das assíntotas obtemos:

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{2},$$

ou seja  $b = \frac{3}{2}a$ .

Usando que  $P \in \mathcal{H}$  obtemos:

$$\frac{(4\sqrt{2})^2}{a^2} - \frac{6^2}{b^2} = 1.$$

Usando que  $b = \frac{3}{2}a$  e simplificando algebricamente a igualdade chegamos então a:

$$\frac{16}{a^2} = 1.$$

Donde  $a^2 = 16$ , ou seja  $a = 4$ . Usando novamente que  $b = \frac{3}{2}a$  obtemos então  $b = 6$ . Logo chegamos à equação:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

• **Focos no eixo  $Oy$ :**

Seja agora  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$  a equação da hipérbole procurada. Como a reta  $3x - 2y = 0$ , que é também a reta de equação  $x = \frac{2}{3}y$ , é uma das assíntotas obtemos:

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{3},$$

ou seja  $b = \frac{2}{3}a$ .

Usando que  $P \in \mathcal{H}$  obtemos:

$$\frac{6^2}{a^2} - \frac{(4\sqrt{2})^2}{b^2} = 1.$$

Usando que  $b = \frac{2}{3}a$  e simplificando a equação chegamos a:

$$-\frac{36}{a^2} = 1.$$

Como  $a^2 > 0$  observamos que não existe  $a$  tal que a igualdade acima seja satisfeita, ou seja, não existe hipérbole com focos no eixo  $Oy$  contendo  $P$  e com assíntota  $3x - 2y = 0$ .

**Conclusão:** A única hipérbole cuja equação resolve o problema é:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

□

**Exemplo 8.22.** *Encontre o centro, os focos e vértices da hipérbole de equação:*

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0.$$

◁

**Solução:** Tentaremos aqui manipular a equação dada de forma a obter uma equação da forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

que representa uma hipérbole de centro  $C = (x_0, y_0)$ , focos  $F_1 = (x_0 + c, y_0)$  e  $F_2 = (x_0 - c, y_0)$ , onde  $c^2 = a^2 + b^2$ , e vértices  $V_1 = (x_0 + a, y_0)$  e  $V_2 = (x_0 - a, y_0)$ .

**Começamos completando quadrados escrevendo:**

$$(9x^2 - 18x + 9) - (4y^2 + 8y + 4) - 9 + 4 - 31 = 0.$$

**Donde temos:**

$$9(x - 1)^2 - 4(y + 1)^2 = 36.$$

E, finalmente:

$$\frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{(y + 1)^2}{9} = 1.$$

Tal equação representa uma hipérbole de centro  $C = (1, -1)$  de parâmetros  $a = 2$ ,  $b = 4$  e  $c = 2\sqrt{5}$ . Logo temos focos  $F_1 = (1 + 2\sqrt{5}, -1)$  e  $F_2 = (1 - 2\sqrt{5}, -1)$  e vértices  $V_1 = (3, -1)$  e  $V_2 = (-1, -1)$ .  $\square$

## 4 Parábola

Conforme descrito na Definição 8.3, uma parábola  $\mathcal{P}$  de foco  $F$  e reta diretriz  $d$  é o lugar geométrico formado pelos pontos do plano cujas distâncias a  $F$  e  $d$  são iguais.

Nesta seção estudaremos funções quadráticas de uma variável, cujos gráficos representam parábolas com retas diretrizes paralelas aos eixos coordenados. Em particular veremos a chamada forma canônica da parábola que é a equação que representa uma parábola com vértice na origem, foco sobre um dos eixos coordenados e reta diretriz paralela ao outro eixo coordenado.

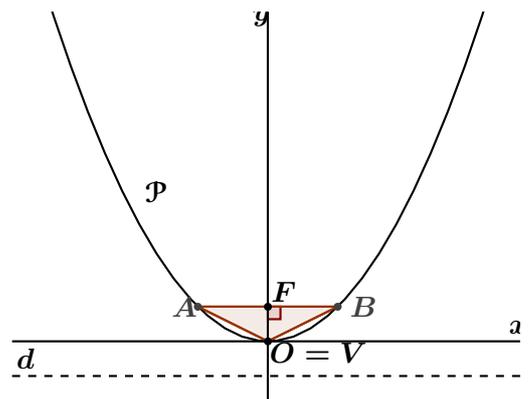


Fig. 8.6: Parábola

### Terminologia

- O ponto  $F$  descrito na Definição 8.3 é denominado foco da parábola.

- A reta  $d$ , também descrita na Definição 8.3 é denominada diretriz da parábola.
- A distância  $2p$  entre o foco  $F$  e a reta diretriz  $d$  da parábola é chamada parâmetro da parábola.
- O ponto  $V$  de intersecção da perpendicular à  $d$  por  $F$  com a parábola é o vértice da parábola;
- A reta perpendicular a  $d$  por  $F$  é o eixo de simetria da parábola.
- Qualquer segmento cujos extremos estão sobre  $\mathcal{P}$  é denominado corda da parábola;
- Tomando  $A$  e  $B$  os extremos da corda que contém  $F$  e é paralela a diretriz  $d$ , obtemos o triângulo  $\triangle VAB$  denominado triângulo fundamental da parábola.

## Equação da Parábola

Para uma parábola com diretriz paralela ao eixo  $Ox$  e vértice na origem do sistema de coordenadas vale o seguinte resultado:

**Proposição 8.23.** *Uma parábola  $\mathcal{P}$  de foco  $F = (0, p)$  e reta diretriz  $d : y = -p$  ( $p \neq 0$ ) tem equação*

$$y = \left(\frac{1}{4p}\right) x^2. \quad (8.9)$$

*Tal equação é usualmente conhecida como a forma canônica da parábola (ou equação reduzida da parábola).*

**Demonstração.** Seja  $P = (x, y)$  um ponto da parábola. A partir da equação  $\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d)$  obtemos:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado obtemos:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2.$$

Simplificando e isolando  $y$  chegamos então a:

$$y = \left(\frac{1}{4p}\right) x^2.$$

**Observação 8.24.** Para uma parábola de foco  $F = (p, 0)$  e reta diretriz vertical  $d : x = -p$  uma demonstração análoga nos levaria a equação:

$$x = \left(\frac{1}{4p}\right) y^2, \quad (8.10)$$

a qual também é conhecida como forma canônica da parábola.

No caso particular da parábola, porém, é importante destacar sua descrição como gráfico de funções quadráticas de uma variável real.

**Definição 8.25.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita quadrática quando existem  $a, b, c$  reais com  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Sobre funções quadráticas vale o seguinte resultado:

**Proposição 8.26.** O gráfico da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é uma parábola com:

• **foco:**

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta - 1}{4a}\right),$$

- **diretriz:**

$$d : y = -\frac{\Delta + 1}{4a},$$

- **vértice:**

$$V = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right),$$

onde  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Observação 8.27.** O gráfico de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é o lugar geométrico dado pela equação  $y = f(x)$ . Logo, pela Proposição 8.26,  $y = ax^2 + bx + c$  é a equação de uma parábola com diretriz paralela ao eixo  $Ox$ .

É análoga a demonstração da proposição acima o fato de que  $x = ay^2 + by + c$  é equação de uma parábola com:

- **foco:**

$$F = \left( -\frac{\Delta - 1}{4a}, -\frac{b}{2a} \right),$$

- **diretriz:**

$$d : x = -\frac{\Delta + 1}{4a},$$

- **vértice:**

$$V = \left( -\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right),$$

onde  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Observação 8.28.** É importante notar que as funções  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e  $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ , com  $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$  para algum  $\lambda \neq 0$ , têm mesmas raízes, ou seja  $f(x) = 0$  se e somente se  $g(x) = 0$ , no entanto seus gráficos são distintos e, portanto, representam parábolas diferentes.

A Proposição 8.26 segue imediatamente dos Lemas 8.29 e 8.30, abaixo demonstrados.

**Lema 8.29.** *O gráfico de uma função quadrática  $f(x) = a(x - m)^2 + k$  é uma parábola com:*

• **foco:**

$$F = \left( m, k + \frac{1}{4a} \right),$$

• **diretriz:**

$$d : y = k - \frac{1}{4a},$$

• **vértice**  $V = (m, k)$ .

**Demonstração.** Seja  $P = (x, y)$  um ponto qualquer do gráfico de  $f$  (de modo que  $y = a(x - m)^2 + k$ ). Tome  $F = \left( m, k + \frac{1}{4a} \right)$  e  $d : y = k - \frac{1}{4a}$ . Mostremos que  $\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d)$  (ver Definição 8.3).

Por um lado temos:

$$\overrightarrow{FP} = \left( x - m, a(x - m)^2 - \frac{1}{4a} \right).$$

Donde segue:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{FP}\| &= \sqrt{(x - m)^2 + a^2(x - m)^4 - 2a(x - m)^2 \frac{1}{4a} + \left( \frac{1}{4a} \right)^2} \\ &= \sqrt{a^2(x - m)^4 + 2a(x - m)^2 \frac{1}{4a} + \left( \frac{1}{4a} \right)^2} \\ &= \sqrt{\left( a(x - m)^2 + \frac{1}{4a} \right)^2} \\ &= \left| a(x - m)^2 + \frac{1}{4a} \right|. \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$d(P, d) = \left| a(x - m)^2 + k - \left( k - \frac{1}{4a} \right) \right| = \left| a(x - m)^2 + \frac{1}{4a} \right|.$$

Logo, vale  $\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d)$ .

Como o vértice da parábola é o ponto médio do menor segmento que liga  $F$  à  $d$  é fácil ver que  $V = (m, k)$ .

**Lema 8.30. Vale a igualdade:**

$$ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right).$$

*Essa forma de escrever a função quadrática é conhecida como forma canônica do trinômio de segundo grau.*

**Demonstração. De fato:**

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Completando quadrado de modo a obter  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  temos:

$$\begin{aligned} a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) &= a \left( x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right). \end{aligned}$$

**Observação 8.31. Vale a recíproca da Proposição 8.26, ou seja, fixos  $m, n, p \in \mathbb{R}$  ( $n \neq p$ ) tais que  $F = (m, n)$  e  $d : y = p$  são respectivamente foco e diretriz de uma parábola então existem  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tais que a parábola é gráfico da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .**

Deixamos ao leitor interessado verificar que vale tal afirmação para:

$$a = \frac{1}{2(n-p)} \quad b = -\frac{m}{n-p} \quad c = n + p - \frac{m^2}{2(n-p)}.$$

## Esboço da Parábola

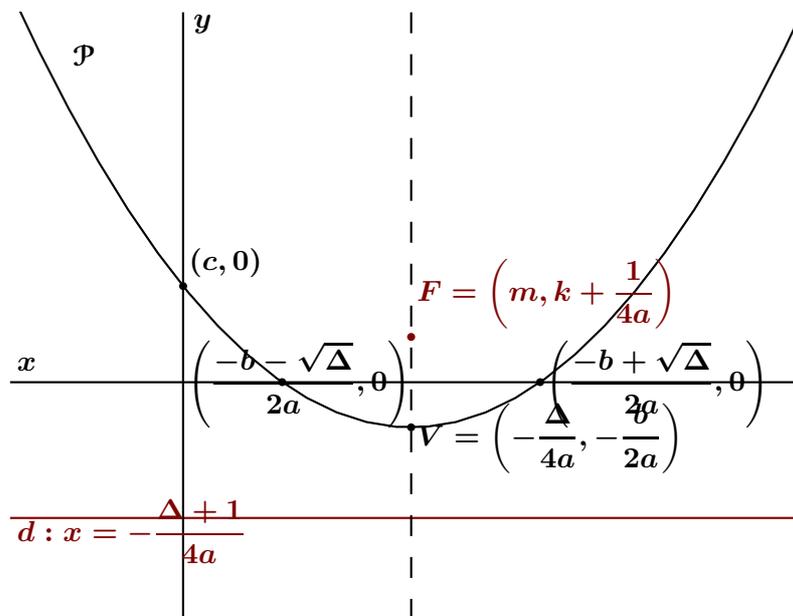


Fig. 8.7: Parábola

O esboço da parábola de equação  $y = ax^2 + bx + c$  (ou gráfico de  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ) pode ser facilmente estudado a partir da forma canônica do trinômio (Lema 8.30):

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

Fixemos, para estudo,  $a > 0$ . Facilmente observamos que  $f$  tem seu *mínimo* no ponto onde  $\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$ , ou seja quando

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Além disso, para  $-\frac{b}{2a} \leq x_1 < x_2$  temos que:

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 < \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

donde segue que  $f(x_1) < f(x_2)$ , ou seja  $f$  é *crescente* em  $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ . Analogamente vemos que  $f$  é *decrecente* em  $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ .

Um pouco de cálculo diferencial nos permite concluir que, para  $a > 0$ , o gráfico de  $f$  é convexo, isto é fixos dois pontos  $P_0$  e  $P_1$  quaisquer sobre o gráfico de  $f$ , temos que o gráfico de  $f$  fica abaixo do segmento  $\overline{P_0P_1}$ .

A convexidade do gráfico de  $f$  decorre do fato de que a segunda derivada de  $f$  é dada por:

$$f''(x) = a > 0.$$

Finalmente, se  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , podemos obter as raízes de  $f$  facilmente igualando a forma canônica do trinômio e isolando o parâmetro  $x$ , obtendo assim a Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

**Observação 8.32.** Se  $a < 0$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tem seu máximo em  $x = -\frac{b}{2a}$ , é *decrecente* em  $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$  e *crescente* em  $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ , tem gráfico *côncavo* e tem suas raízes dada pela (mesma) Fórmula de Bhaskara (quando  $\Delta > 0$ ).

## Exemplos

**Exemplo 8.33.** Determine a equação da parábola de foco  $F = (1, 2)$  e reta diretriz  $r : y = 4$ .

**Solução:** Seja  $P = (x, y)$  um ponto da parábola. A equação  $\|\overrightarrow{FP}\| = d(p, r)$  em coordenadas fica:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = |y-4|.$$

Elevando essa igualdade ao quadrado obtemos:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = y^2 - 8y + 16.$$

Isolando então o parâmetro  $y$  chegamos à:

$$y = \left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{11}{4}\right).$$

□

**Exemplo 8.34.** *Consider uma parábola  $\mathcal{P}$  com vértice na origem e com o eixo  $Ox$  como reta focal. Suponha que o ponto  $(3, -6)$  pertença à  $\mathcal{P}$ . Determine a equação de  $\mathcal{P}$ , seu foco  $F$  e reta diretriz  $d$ .*

◁

**Solução:** Sabemos que  $\mathcal{P}$  é uma parábola de parâmetro  $2p$  com equação da forma:

$$x = \pm \left(\frac{1}{4p}\right)y^2.$$

Como a primeira coordenada do ponto  $(3, -6)$  é positiva temos:

$$\mathcal{P} : x = + \left(\frac{1}{4p}\right)y^2.$$

Substituindo as coordenadas do ponto  $(3, -6)$  na equação acima chegamos à  $p = 3$ . Logo temos:

$$\mathcal{P} : x = \left(\frac{1}{12}\right) y^2.$$

Tal parábola tem, assim, foco  $F = (3, 0)$  e reta diretriz  $d : x = -3$ . □

**Exemplo 8.35.** *Considere a função quadrática  $f(x) = x^2 - 6x + 8$ . Escreva  $f$  na forma quadrática canônica e a partir de tal determine suas raízes. Determine as coordenadas do vértice, foco e a equação da reta diretriz da parábola que é gráfico de  $f$ .*

◁

**Solução:** Completando quadrado obtemos  $f(x) = (x^2 - 6x + 9) - 1 = (x - 3)^2 - 1$  que é a forma canônica de  $f$ .

Igualando a forma canônica a zero chegamos a:

$$(x - 3)^2 = 1.$$

Donde temos  $x - 3 = \pm 1$  ou ainda  $x = 3 \pm 1$ . Logo  $x = 2$  e  $x = 4$  são as raízes de  $f$ .

O vértice da parábola que é gráfico de  $f$ , ocorre no ponto onde  $f$  é mínimo, ou seja em  $x = 3$ . Logo as coordenadas do vértice são  $(3, -1)$ .

Claramente o eixo de simetria da parábola em questão é paralelo ao eixo  $Oy$ . Suponhamos então que o foco da parábola tenha coordenadas  $F = (3, -1 + c)$  e a diretriz tenha equação  $d : y = -1 - c$  (Note que o vértice da parábola dista o mesmo do foco e da diretriz da parábola).

Considere um ponto  $P$  qualquer da parábola diferente do vértice. Tome por exemplo  $P = (0, 8)$ . Devemos ter  $\|\overrightarrow{FP}\| = d(P, d)$ .

Por um lado, temos então  $\overrightarrow{FP} = (-3, 9 - c)$  e:

$$\|\overrightarrow{FP}\| = \sqrt{9 + (9 - c)^2}.$$

Por outro lado:

$$d(P, d) = 8 - (-1 - c) = 9 + c.$$

Deve valer então:

$$9 + (9 - c)^2 = (9 + c)^2.$$

Donde temos  $c = (1/4)$ .

Logo  $F = (3, -3/4)$  e  $d : y = -5/4$ . □

## 5 ★ Excentricidade

**Proposição 8.36.** *Sejam  $\eta > 0$ ,  $\eta \neq 1$  e  $F = (c, 0)$ . Tome  $r$  a reta de equação  $x = c/\eta^2$  (logo paralela ao eixo  $Oy$ ).*

*Então, se  $P = (x, y)$  satisfaz a igualdade*

$$\overrightarrow{FP} = \eta d(P, r), \tag{8.11}$$

*temos que:*

- *se  $0 < \eta < 1$ , então  $P$  pertence a elipse de equação*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

*onde  $a = c/\eta$  e  $b$  tal que  $a^2 = b^2 + c^2$ .*

- se  $\eta > 1$ , então  $P$  pertence a hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

onde  $a = c/\eta$  e  $b$  tal que  $c^2 = a^2 + b^2$ .

**Demonstração.** Escrevendo a equação (8.11) em coordenadas cartesianas temos:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \eta \left( \frac{c}{\eta^2} - x \right).$$

Elevando essa equação ao quadrado e manipulando algebricamente o resultado facilmente chegamos na igualdade:

$$x^2 (1 - \eta^2) + y^2 = c^2 \left( \frac{1}{\eta^2} - 1 \right).$$

Dividindo tal equação por  $c^2 \left( \frac{1}{\eta^2} - 1 \right)$  obtemos:

$$\frac{x^2}{c^2/\eta^2} + \frac{y^2}{c^2 \left( \frac{1}{\eta^2} - 1 \right)} = 1.$$

Então, para  $0 < \eta < 1$ , observamos que  $c^2 \left( \frac{1}{\eta^2} - 1 \right) > 0$ .

Tomando então  $a^2 = c^2/\eta^2$  e  $b^2 = c^2 \left( \frac{1}{\eta^2} - 1 \right)$  (de modo que  $a^2 = b^2 + c^2$ ) temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Caso  $\eta > 1$  temos que  $c^2 \left( \frac{1}{\eta^2} - 1 \right) < 0$ . Tomando  $a^2 = c^2/\eta^2$  e  $b^2 = -c^2 \left( \frac{1}{\eta^2} - 1 \right)$  (de modo que  $c^2 = a^2 + b^2$ ) segue:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**Proposição 8.37.** *Sejam  $\eta = 1$  e  $F = (c, 0)$ . Tome  $r$  a reta de equação  $x = -c$ .*

*Então, se  $P = (x, y)$  satisfaz a igualdade*

$$\overrightarrow{FP} = \eta d(P, r), \quad (8.12)$$

*temos que:*

$$y^2 = 4cx.$$

**Demonstração.** *Escrevendo a equação (8.12) em coordenadas cartesianas temos:*

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = (c + x).$$

*Elevando essa equação ao quadrado e manipulando algebricamente o resultado facilmente obtemos:*

$$y^2 = 4cx.$$

**Observação 8.38.** *A reta  $r$  e o ponto  $F$  descritos nas proposições 8.36 e 8.37 são denominados respectivamente reta diretriz e foco da cônica em questão.*

*O parâmetro  $\eta$ , que aparece em ambas as proposições, é denominado excentricidade da cônica.*

**Observação 8.39.** *É fácil mostrar que as recíprocas das proposições acima são válidas, ou seja:*

• *Se  $P = (x, y)$  é um ponto da elipse de equação:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

*então, tomando  $c > 0$  tal que  $a^2 = b^2 + c^2$ ,  $\eta = c/a$  (note  $0 < \eta < 1$ ),  $F = (c, 0)$  e  $r : x = c/\eta^2$  temos que  $P$  satisfaz a equação (8.11).*

- Se  $P = (x, y)$  é um ponto da hipérbole de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

então, tomando  $c > 0$  tal que  $c^2 = a^2 + b^2$ ,  $\eta = c/a$  (note  $\eta > 1$ ),  $F = (c, 0)$  e  $r : x = c/\eta^2$  temos que  $P$  satisfaz a equação (8.11).

- Se  $P = (x, y)$  é um ponto da parábola de equação:

$$y^2 = 4cx,$$

então, tomando  $\eta = 1$ ,  $F = (c, 0)$  e  $r : x = -c$  temos que  $P$  satisfaz a equação (8.12) (que é a mesma que a equação (8.11)).

## Excentricidade e a forma de uma cônica

A excentricidade  $\eta$  de uma cônica é usualmente usada para estudar o formato das cônicas.

No caso da elipse, quanto mais  $\eta$  for próximo à 0 maior a “semelhança” da elipse com um círculo. De fato, dividindo  $a^2 = b^2 + c^2$  por  $a^2$ , teríamos que  $(b/a)^2 = 1 - \eta^2$ . Logo para  $\eta$  pequeno  $(b/a)$  estaria próximo de 1. Assim sendo,  $a$  e  $b$  seriam aproximadamente iguais. Tomando  $b = a$  teríamos então a equação do círculo:  $x^2 + y^2 = a^2$ .

Para  $\eta < 1$  próximo de 1 teríamos por outro lado que  $(b/a)$  seria próximo de 0, ou seja,  $b$  seria muito menor que  $a$ , o que nos levaria a uma elipse bem alongada ao longo do eixo  $Ox$ .

Na hipérbole, por sua vez, se  $\eta > 1$  estiver perto de 1 teremos  $(b/a)$  próximo de 0, pois dividindo  $c^2 = a^2 + b^2$  por  $a^2$  obtemos  $\eta^2 = 1 + (b/a)^2$ . Isso implica que as assíntotas da

hipérbole tem inclinação próxima a 0, ou seja, a medida que  $\eta$  fica mais perto de 1 as hipérbolas ficam mais próximas do eixo  $Ox$ .

Por outro lado, a medida que  $\eta$  tende à  $+\infty$  temos que  $(b/a)$  também tende a  $+\infty$ , ou seja, a inclinação das assíntotas da hipérbole crescem de modo que as hipérbolas se aproximam do eixo  $Oy$ .

Em geometria, dizemos que duas figuras são semelhantes se pode-se obter uma a partir da outra pela composição de isometrias (translação, rotação, reflexão) e homotetias (fixos centro  $O$  e razão  $k$ , uma homotetia leva  $P$  em  $P'$  pela relação  $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$ ).

Sobre a semelhança das cônicas valem o seguinte resultado:

**Proposição 8.40.** *Se duas cônicas têm mesma excentricidade então elas são semelhantes, em particular todas as parábolas são semelhantes entre si.*

**Demonstração.** Consideraremos apenas as cônicas cujas equações estão na sua forma canônica (pois, como veremos no capítulo ??, todas as cônicas podem ser transformadas na forma canônica por rotações e translações).

Considere duas elipses  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$  de equações:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\mathcal{E}' : \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Se ambas têm mesma excentricidade temos que  $(b/a) = (b'/a')$ , donde segue que  $(a/a') = (b/b') = k$ . Tome então

a homotetia  $h$  com centro na origem e razão  $k$ , ou seja tal que  $h(x, y) = (kx, ky)$ . Então, afirmamos que se  $P = (x, y)$  está em  $\mathcal{E}$ ,  $h(P)$  está em  $\mathcal{E}'$ . De fato, se  $P$  satisfaz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

temos que

$$\frac{(kx)^2}{a'^2} + \frac{(ky)^2}{b'^2} = \frac{a'^2 x^2}{a'^2 a^2} + \frac{b'^2 y^2}{b'^2 b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

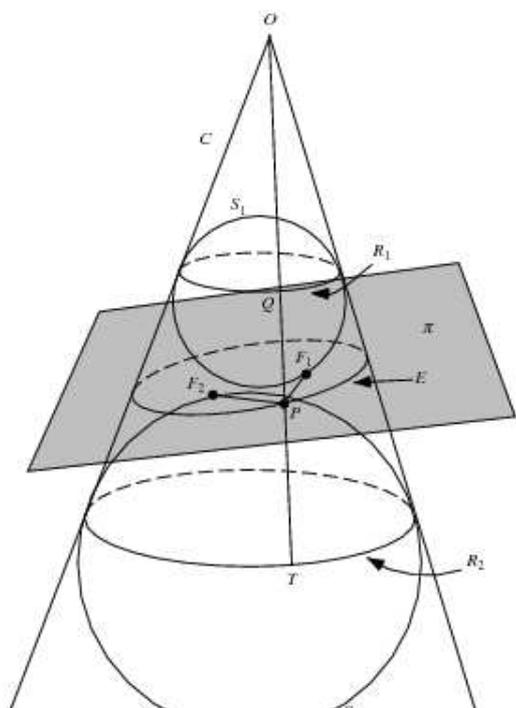
A semelhança de hipérbolas de mesma excentricidade segue de modo análogo.

No caso de duas parábolas  $\mathcal{P} : y = ax^2$  e  $\mathcal{P}' : y = a'x^2$ , tome  $k = (a/a')$ . Daí se  $P = (x, y)$  está em  $\mathcal{P}$  temos que vale  $y = ax^2$ . Por outro lado tomando a homotetia  $h(x, y) = (kx, ky)$  temos:

$$a'(kx)^2 = a' \left( \frac{a}{a'} \right)^2 x^2 = \left( \frac{a}{a'} \right) ax^2 = ky.$$

## 6 ★ Construções de Dandelin

### Elipse



Dado um cone com ângulo de abertura  $2\alpha$  e um plano  $\pi$  que intercepta o cone e faz um ângulo superior à  $\alpha$  com o eixo do cone temos na intersecção uma elipse. É possível encontrar duas esferas  $S_1$  e  $S_2$  que tangenciam o plano  $\pi$  e o cone internamente (ver Figura 8.8). Tais esferas são conhecidas como *esferas de Dandelin* da elipse.

Mostremos usando as esferas de Dandelin que a soma das distâncias de um ponto  $X$  da elipse aos focos  $F_1$  e  $F_2$  é constante, isto é:

$$\|\overrightarrow{F_1 X}\| + \|\overrightarrow{F_2 X}\| = k,$$

onde  $k$  é um número real fixado (obviamente maior que a distância focal da elipse).

Suponha que  $S_1$  e  $S_2$  tangenciam o cone nos círculos  $C_1$  e  $C_2$  respectivamente. Seja  $X$  um ponto qualquer da elipse. A reta  $\overleftrightarrow{OX}$  que passa por  $X$  e pelo vértice  $O$  do cone intercepta  $C_1$  e  $C_2$  em pontos  $H_1$  e  $H_2$  respectivamente.

Observe que a soma  $\|XH_1\| + \|XH_2\|$  independe do ponto  $X$  da elipse, medindo sempre  $\|H_1H_2\|$ .

## Parábola

Mostraremos no que se segue que a curva (parábola) formada pela intersecção de um cone de ângulo de abertura  $2\alpha$  e vértice  $O$  com plano  $\pi$  que faz um ângulo  $\alpha$  com o eixo do cone, obedece de fato a equação:

$$\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, r),$$

com  $\eta = 1$ , onde  $F$  é o foco da parábola,  $r$  a sua diretriz e  $X$  um ponto qualquer da cônica.

Considere a esfera simultaneamente tangente interna ao cone e tangente ao plano  $\pi$ . Seja  $\gamma$  o plano

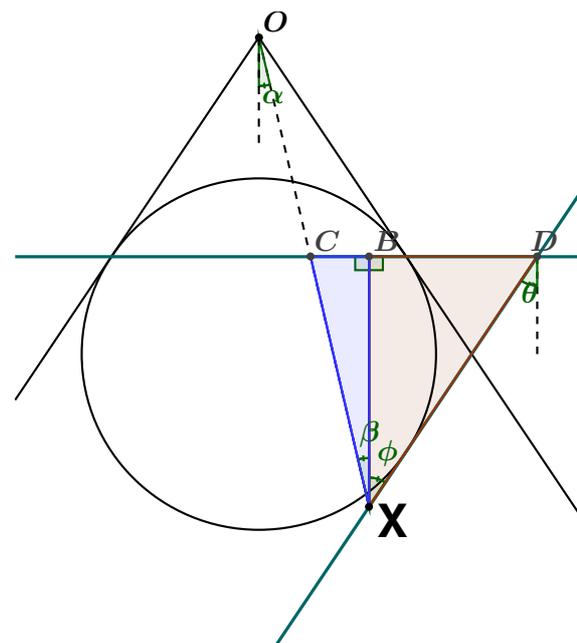


Fig. 8.9: Parábola: Foco e Diretriz

que contém os pontos de tangência da esfera com o cone. Afir-  
mamos que o ponto de tangência da esfera com o plano  $\pi$  é o  
foco da parábola e que a reta  $r$  obtida pela intersecção de  $\pi$  e  $\gamma$   
é a reta diretriz da parábola.

Seja  $X$  um ponto qualquer da parábola. Seja  $C$  a intersec-  
ção da reta  $\overrightarrow{OX}$  (uma geratriz no cone) com  $\gamma$ . Considere  $B$  a  
projeção ortogonal de  $X$  em  $\gamma$  e  $D$  o ponto na diretriz  $r = \pi \cap \gamma$   
tal que o triângulo  $\triangle XBD$  se encontre num plano ortogonal a  
 $\pi$ . Afirmamos que qualquer que seja  $X$ , ponto da parábola, os  
triângulos  $\triangle XBC$  e  $\triangle XBD$  são congruentes.

**Observação 8.41.** *Cuidado não confundir sua intuição com a Fi-  
gura 8.9 que é apenas uma projeção no plano de uma figura tri-  
dimensional. O triângulo  $\triangle XBC$  está não é coplanar ao plano  
da figura no papel (ele “entra no papel”).*

A congruência dos triângulos segue do fato de que os ân-  
gulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  e  $\Phi$  são todos congruentes (por quê?),  $\widehat{XBC} =$   
 $\widehat{XBD} = \frac{\pi}{2}$  e  $\overline{XB}$  é um lado comum a ambos os triângulos  
(Congruência “ALA”).

Observe assim que  $\|\overrightarrow{XC}\| = \|\overrightarrow{XD}\|$ . Mas  $\|\overrightarrow{XD}\| = d(X, r)$   
e  $\|\overrightarrow{XC}\| = \|\overrightarrow{XF}\|$ , onde  $F$  é o foco da parábola (pois  $\overline{XC}$  e  $\overline{XF}$   
são tangentes a esfera em  $C$  e  $F$ ). Logo:

$$\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, r),$$

com  $\eta = 1$ .

## Exercícios

**Ex. 8.1 —** Provemos que a curva (elipse) formada pela intersecção de um cone de ângulo de abertura  $2\alpha$  com plano  $\pi$  que faz um ângulo  $\theta > \alpha$  com o eixo do cone, obedece a equação:

$$\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, r),$$

com  $\eta < 1$ , onde  $F$  é o foco da elipse e  $r$  a sua diretriz.

Considere, como fizemos para a parábola, a esfera simultaneamente tangente interna ao cone e tangente ao plano  $\pi$  (esfera de Dandelin).

- Encontre o foco  $F$  e a diretriz  $r$  da elipse do mesmo modo que fizemos para a parábola;
- Considere  $X$  e  $X'$  dois pontos da elipse. Encontre os pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$  da mesma forma que fizemos para a parábola. Encontre  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  a partir de  $X'$  de forma semelhante.
- Mostre que os seguintes triângulos são semelhantes:

$$\triangle XBD \simeq \triangle X'B'D'$$

$$\triangle XBC \simeq \triangle X'B'C'$$

- Mostre que:

$$\frac{\|\overrightarrow{XC}\|}{\|\overrightarrow{XD}\|} = \frac{\|\overrightarrow{X'C'}\|}{\|\overrightarrow{X'D'}\|} = \eta,$$

onde  $\eta$  é uma constante real;

- Conclua que vale:

$$\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, r),$$

com  $\eta < 1$ .

**Ex. 8.2** — Mostre que a curva (hipérbole) formada pela intersecção de um cone de ângulo de abertura  $2\alpha$  com plano  $\pi$  que faz um ângulo  $\theta < \alpha$  com o eixo do cone, obedece a equação:

$$\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, r),$$

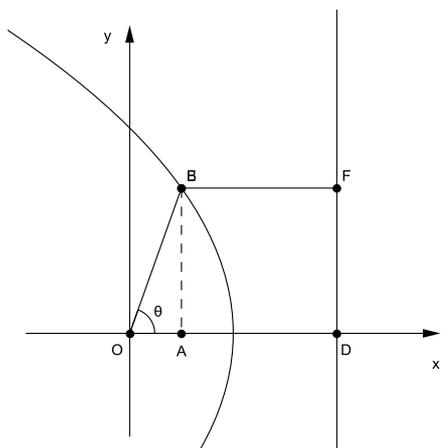
com  $\eta > 1$ , onde  $F$  é o foco da hipérbole e  $r$  a sua diretriz.

**Ex. 8.3** — Mostre usando as esferas de Dandelin que os pontos  $X$  da hipérbole satisfazem a equação:

$$\left| \|\overrightarrow{F_1X}\| - \|\overrightarrow{F_2X}\| \right| = k,$$

onde  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da hipérbole e  $k$  uma constante real.

## 7 ★ Cônicas em Coordenadas Polares



**Fig. 8.10:** Cônica: coordenadas polares

Considere a cônica de equação  $\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, l)$ . Consideremos agora coordenadas polares com a origem  $O$  localizada em  $F$  e com o eixo polar perpendicular a diretriz  $l$  da cônica.

Suponha que a distância entre a diretriz  $l$  e o foco  $F$  é uma dada constante  $p$  e que a cônica está localizada, em relação a  $l$ , no mesmo lado de  $F$ , como na Figura 8.10. É fácil ver que no sistema de coordenadas acima descrito  $\|\overrightarrow{FX}\| = r$  e  $d(X, l) = (p - r \cos \theta)$ , donde temos:

$$r = \eta(p - r \cos \theta).$$

Isolando  $r$  segue que:

$$r = \frac{\eta p}{1 + \eta \cos \theta}$$

Suponha agora que a cônica está localizada, em relação a  $l$ , no lado oposto a  $F$ , como na Figura 8.11. A equação  $\|\overrightarrow{FX}\| = \eta d(X, l)$ , torna-se então:

$$r = \eta(r \cos \theta - p).$$

Donde segue:

$$r = \frac{\eta p}{\eta \cos \theta - 1}.$$

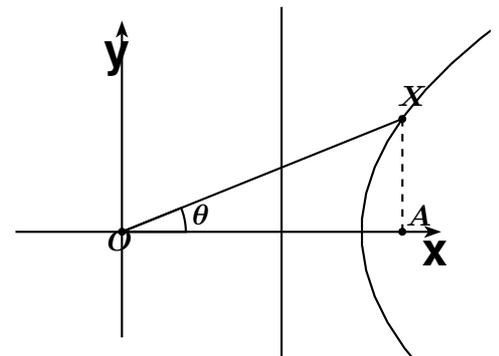


Fig. 8.11: Cônica: coordenadas polares

Observe no entanto que, como  $r$  é positivo, para que a equação acima represente um lugar geométrico não vazio devemos ter  $\eta > 1$ , ou seja, a cônica deve ser uma hipérbole.

Temos então:

**Teorema 8.42.** *Considere uma cônica com excentricidade  $\eta$ , foco  $F$  na origem e com uma diretriz  $l$  distando  $p$  de  $F$  e perpendicular ao eixo polar  $Ox$ . Se  $0 < \eta \leq 1$ , a cônica é uma elipse ( $\eta \in (0, 1)$ ) ou uma parábola ( $\eta = 1$ ), e todo ponto da curva está localizado no mesmo semi-plano em relação a  $l$  que  $F$ . Nesse caso a cônica tem equação:*

$$r = \frac{\eta p}{\eta \cos \theta + 1}. \quad (8.13)$$

*Se  $\eta > 1$ , a curva é uma hipérbole com ramos em ambos os lados de  $l$ . O ramo à esquerda de  $l$  satisfaz a Equação 8.13 e o ramo à direita de  $l$  satisfaz:*

$$r = \frac{\eta p}{\eta \cos \theta - 1}. \quad (8.14)$$

## 8 ★ Cônicas e a Trajetória dos Planetas

Nesta seção mostraremos, a partir das leis de Newton, que a trajetória de planetas sujeitos apenas a força gravitacional exercida por um sol é uma cônica. Tal trajetória será uma elipse, parábola ou hipérbole dependendo da velocidade inicial do planeta. A prova que fazemos aqui foi fortemente inspirada na demonstração das leis de Kepler apresentada no livro *Calculus - Volume I* de Tom Apostol ([1]).

Assim sendo, suponha um sol e um planeta de massas  $M$  e  $m$ , respectivamente.

A segunda lei de Newton afirma que a aceleração  $a$  é proporcional a força  $F$  por:

$$F = ma. \quad (8.15)$$

Denotando por  $r$  o vetor que liga o sol ao planeta, por  $u_r$  o versor de  $r$  e por  $r$  a norma de  $r$ , a lei universal da gravitação afirma que a força exercida pelo sol no planeta obedece:

$$F = -\frac{GMm}{r^2}u_r, \quad (8.16)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional.

A partir das equações (8.15) e (8.16) temos:

$$a = -\frac{GM}{r^2}u_r. \quad (8.17)$$

Mostremos inicialmente que a trajetória do planeta está contida no plano perpendicular aos vetores posição  $r$  e velocidade  $v$ . Observe, para isso, que o vetor  $r \times v$  é constante:

$$\frac{d}{dt}(r \times v) = \frac{dr}{dt} \times v + r \times \frac{dv}{dt} = v \times v + r \times a = r \times a = 0.$$

Denotemos  $r \times v$  por  $c$ .

Como  $r \cdot c = r \cdot r \times v = 0$  segue que o vetor posição é sempre perpendicular a  $c$ , logo a trajetória é de fato plana. Observe que se  $c = 0$  temos que  $r$  e  $v$  são paralelos e a trajetória será uma reta (cônica degenerada). Suponhamos no que se segue que  $c \neq 0$ .

Mostremos agora que a trajetória é de fato uma cônica.

Fixe um eixo polar passando pelo sol e seja  $\theta$  o ângulo entre  $r$  e tal eixo. Seja  $u_\theta$  o vetor unitário perpendicular a  $r$  dado por  $\frac{du_r}{d\theta}$ . Usando coordenadas polares temos que  $r = ru_r$ . Disso segue:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr\hat{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}u_r + r\frac{u_r}{dt} = \frac{dr}{dt}u_r + r\frac{du_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{dt}u_r + r\frac{d\theta}{dt}u_\theta.$$

Donde obtemos:

$$c = r \times v = (ru_r) \times \left( \frac{dr}{dt}u_r + r\frac{d\theta}{dt}u_\theta \right) = r^2\frac{d\theta}{dt}u_r \times u_\theta.$$

Dessa expressão segue:

$$\begin{aligned} a \times c &= \left( -\frac{GM}{r^2}u_r \right) \times \left( r^2\frac{d\theta}{dt}u_r \times u_\theta \right) = \\ &= -GM\frac{d\theta}{dt}u_r \times (u_r \times u_\theta) = GM\frac{d\theta}{dt}u_\theta. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Observe agora que:

$$\frac{d}{dt}(v \times c) = \frac{dv}{dt} \times c + v \times \frac{dc}{dt} = a \times c. \quad (8.19)$$

Por outro lado:

$$\frac{d}{dt}(GMu_r) = GM\frac{du_r}{dt} = GM\frac{du_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = GM\frac{d\theta}{dt}u_\theta. \quad (8.20)$$

Das equações (8.18), (8.19) e (8.20) segue então que:

$$\frac{d}{dt}(v \times c) = \frac{d}{dt}(GMu_r).$$

Donde, por integração obtemos:

$$v \times c = GMu_r + b,$$

onde  $b$  é um vetor constante.

Tomando  $e$  tal que  $GM e = b$  segue que:

$$v \times c = GM(u_r + e).$$

Multiplicando escalarmente ambos os lados da equação acima por  $r$  temos:

$$r \cdot v \times c = GM(r + r \cdot e) = GMr(1 + \eta \cos \phi),$$

onde  $\eta = ||e||$  e  $\phi$  é o ângulo entre  $r$  e  $e$ . Como  $c = r \cdot v$  temos por outro lado que:

$$r \cdot v \times c = r \times v \cdot c = c \cdot c = c^2,$$

onde  $c = ||c||$ .

Assim temos, finalmente:

$$GMr(1 + \eta \cos \phi) = c^2.$$

Fazendo  $p = \frac{c^2}{GM\eta}$  e isolando  $r$  segue a equação:

$$r = \frac{\eta p}{\eta \cos \phi + 1},$$

que é a equação de uma cônica com foco no sol e excentricidade  $\eta$ , como queríamos demonstrar.

**Observação 8.43.** *Observe que como  $e$  é uma constante de integração e  $\eta = ||e||$  temos que a excentricidade depende fundamentalmente das condições iniciais do movimento, isto é, da posição e velocidade iniciais do planeta (Verifique!).*

# 1 Parametrização de Curvas

No Capítulo 4 estudamos as equações de uma reta no espaço e vimos que tal entidade geométrica pode ser representada pelas equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = a + v_1 t \\ y = b + v_2 t \\ z = c + v_3 t \end{cases} \quad (9.1)$$

onde  $S_0 = (a, b, c)$  é um ponto da reta  $r$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$  é um vetor paralelo a  $r$ .

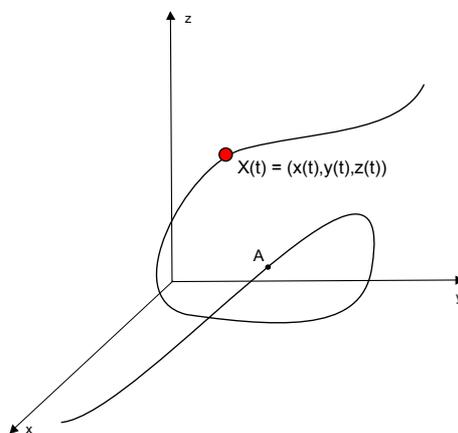


Fig. 9.1: Curva Parametrizada

Nesse ponto, observamos que a reta representada pelas equações 9.1 pode ser interpretada como a trajetória no espaço  $\mathbb{E}^3$  descrita por um corpo em movimento retilíneo uniforme com posição inicial  $S_0$  e velocidade  $v$ . Assim, as equações 9.1 são meramente a representação em coordenadas da clássica equação da física:

$$S(t) = S_0 + vt$$

na qual  $S(t) = (x(t), y(t), z(t))$  descreve a posição do corpo em questão no instante de tempo  $t$ .

Um dos objetivos desse capítulo será o de representar outras curvas no espaço de modo semelhante, isto é, imaginando um corpo que se move livremente pelo espaço e descrevendo a posição  $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$  desse corpo no instante  $t$ , onde agora  $x$ ,  $y$  e  $z$  são funções (não necessariamente lineares) de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  (ver Figura 9.1).

Nesse intuito, podemos então definir:

**Definição 9.1.** *Uma curva parametrizada no espaço com parâmetro  $t$  é função contínua, no qual  $I = (a, b)$  é um intervalo da reta real.*

De modo análogo podemos definir uma *curva no plano* como uma função contínua  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Usualmente pedimos uma certa regularidade para as funções  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ , pedimos tenham derivadas de toda ordem (para que seja possível definir um vetor velocidade, um vetor aceleração, etc...).

Observamos que no caso de uma curva qualquer o vetor velocidade que era constante nas equações da reta agora é um vetor tangente a curva que varia com o parâmetro  $t$ .

**Definição 9.2.** *Dado uma curva  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$  com  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  diferenciáveis, então o vetor tangente é dado pela derivada*

$$X'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

*da função  $X$  em relação a  $t$ .*

O processo de descrever uma curva geométrica como uma função  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é conhecido como parametrização.

**Exemplo 9.3.** *A equação mais simples para uma parábola*

$$y = x^2$$

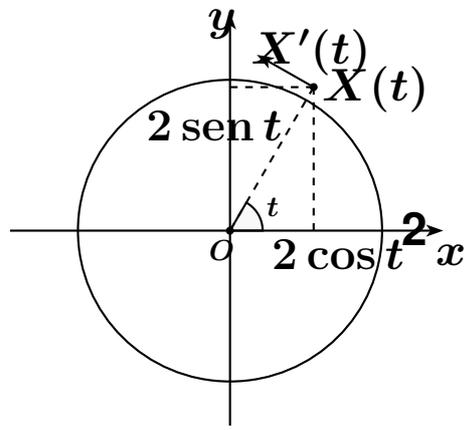
*pode ser (trivialmente) transformada em uma parametrização utilizando um parâmetro livre  $t$ , e estabelecendo*

$$x = t, y = t^2 \quad \text{para } -\infty < t < \infty$$

◁

**Exemplo 9.4.** *Parametrize o círculo de raio 2 em  $\mathbb{R}^2$  e descreva seu vetor tangente.*

◁



**Solução:** Para parametrizar o círculo utilizaremos como parâmetro o ângulo  $t$ . Com essa escolha temos as coordenadas de um ponto  $P : (x, y)$  pode ser descritas utilizando que  $x = 2 \cos t$  e que  $y = 2 \sin t$ . Para descrevermos todos os pontos o ângulo  $t$  deve variar em  $[0, 2\pi]$ .

Assim, a curva plana  $X : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $X(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$  descreve um círculo de raio 2 em  $\mathbb{R}^2$ .

Finalmente, o vetor tangente de  $X$  no instante  $t$  pode ser calculado derivando a parametrização  $X(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$  e é dado por  $X'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$ .

□

**Observação 9.5.** Uma curva  $X : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , como por exemplo a curva descrita no Exemplo 9.4, para a qual o ponto inicial é igual ao ponto final  $X(a) = X(b)$  é denominada curva fechada.

**Exemplo 9.6.** Descreva a curva espacial cuja parametrização é  $X(t) = (\cos t, \sin t, t/10)$ .

◁

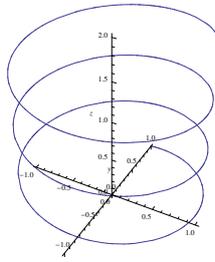


Fig. 9.2: Hélice

**Solução:** Para descrevermos a curva começamos observando que a projeção da curva  $X(t)$  no plano  $x, y$  é dada por  $X'(t) = (\cos t, \sin t)$  e conseqüentemente é um ponto do círculo de raio unitário. Logo a curva está contida no cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .

Na direção  $z$  a curva se move com velocidade constante.

Assim, a curva espacial  $X(t) = (\cos t, \sin t, t/10)$  descreve uma hélice contida no cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ . Tal curva caminha  $\frac{2\pi}{10}$  na direção de  $z$  para completar uma volta em torno do cilindro. Observe a figura ao lado. □

**Exemplo 9.7 (Gráfico de Função).** *O gráfico de uma função  $f : \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável é uma curva em  $\mathbb{R}^2$ . Tal curva pode ser representada pelas equações paramétricas  $X(t) = (t, f(t))$ . Observe que o vetor velocidade de tal curva é dado por  $X'(t) = (1, f'(t))$ .*

*Na figura 9.3 apresentamos a curva  $(t, \sin t)$  dada pelo gráfico da função  $\sin x$  em  $\mathbb{R}^2$ , cujo vetor velocidade no tempo  $t$  é  $(1, \cos t)$ .*

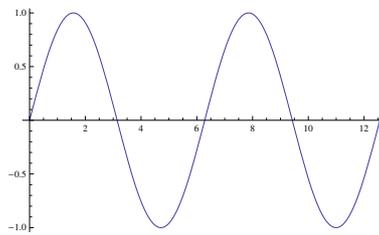


Fig. 9.3: Gráfico de  $\sin x$

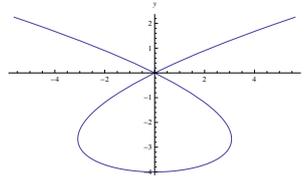


Fig. 9.4: Curva não injetora

**Exemplo 9.8.** A curva  $X(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$  é uma curva parametrizada não injetora (ver Figura 9.4), pois  $X(2) = X(-2) = (0, 0)$ . Esse exemplo mostra que nem toda curva do plano pode ser descrita como gráfico de uma função.

◁

**Observação 9.9.** Uma curva parametrizada injetora (sem auto-intersecções) é dita ser uma curva simples

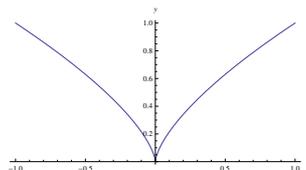


Fig. 9.5: Curva diferenciável com “bico”

**Exemplo 9.10.** Observamos, por fim, um fato que pode parecer a princípio contradizer nossa intuição de diferenciabilidade propiciada pelo estudo de funções reais e seus gráficos em cursos de cálculo diferenciável. Uma curva parametrizada pode ser diferenciável e ter “bicos” ou “arestas” desde que o vetor velocidade se anule nesses pontos. Observe a curva  $X(t) = (t^3, t^2)$  cujo vetor velocidade existe para todo  $t$  e é dado por  $X'(t) = (3t^2, 2t)$ .

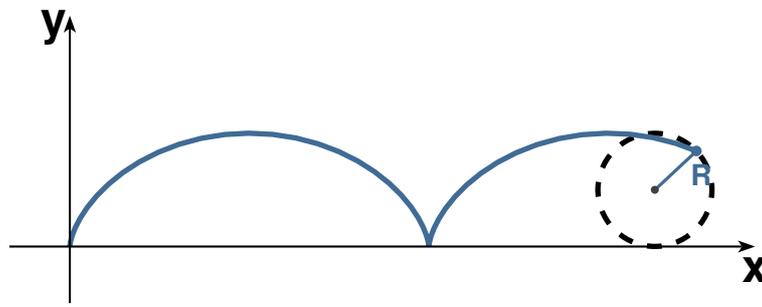


Fig. 9.6: Ciclóide



**Observação 9.11.** *Uma curva parametrizada diferenciável  $X(t)$  tal que  $X'(t) \neq 0$  para todo  $t$  é dita ser uma curva regular.*

*Pode-se mostrar que curvas regulares não admitem “bicos”.*

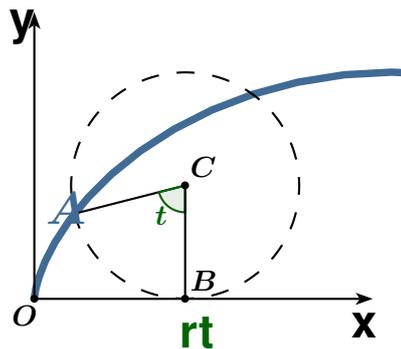


Fig. 9.7: Ciclóide parametrizada

**Exemplo 9.12.** *A cicloide, uma curva clássica estudada por Galileu (entre outros), consiste na curva traçada por um ponto fixado numa circunferência que rola ao longo de uma reta (ver Figura ??).*

*A ciclóide está ligada, por exemplo, ao problema da braquistócrona, que descreve uma curva ligando dois pontos  $A$  e  $B$ , com  $B$  localizado a uma altura menor que  $A$ , e que tem a propriedade de ser a trajetória (“rampa”) capaz de minimizar o tempo para um corpo ir de  $A$  à  $B$  quando este está submetido apenas à gravidade.*

*Além disso, a cicloide (invertida) também é solução do problema da tautócrona que trata de uma curva onde não importa onde uma partícula seja colocada, ela leva o mesmo tempo para deslizar até o fundo.*

*Obtenha as equações paramétricas da cicloide passando pela origem  $O$  do sistema de coordenadas e obtida a partir de um círculo de raio  $r$  “rolando” sobre o eixo  $x$ .*

◁

**Solução:** Seja  $t$  o parâmetro que representa o ângulo de rotação do círculo. Quando o círculo girar de um ângulo  $t$  teremos que a distância percorrida ao longo do eixo será o comprimento do setor circular entre  $A$  e  $B$  (ver Figura 9.7), ou seja  $rt$ . Dessa forma é fácil concluir que as coordenadas de  $A$  são:

$$\begin{cases} x = rt - r \operatorname{sen} t \\ y = r - r \operatorname{cos} t \end{cases}$$

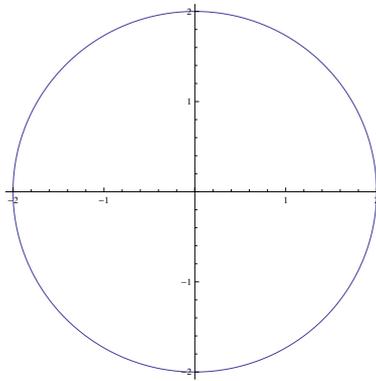
Logo a equação que representa tal curva é dada por  $X(t) = (r(t - \operatorname{sen} t), r(1 - \operatorname{cos} t))$ .

□

## 2 Curvas em Coordenadas Polares

Coordenadas polares são muito úteis quando trabalhamos com curvas com algum tipo de simetria em relação à origem do sistema de coordenadas. Observe isso nos próximos exemplos.

**Exemplo 9.13.** *Um círculo de raio 2 como na figura ao lado, como sabemos, pode ser representado num sistema cartesiano*



**Fig. 9.8: Círculo de raio 2**

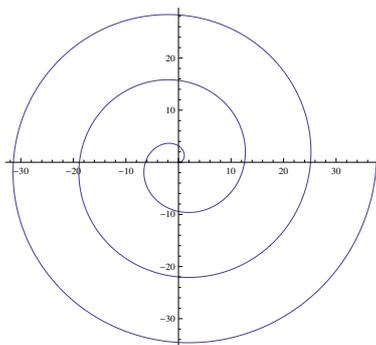
**pela equação  $x^2 + y^2 = 4$ . Note que, em coordenadas polares, o mesmo lugar geométrico pode ser representado pela equação  $r = 2$ .**

**Olhando o círculo como curva parametrizada, em coordenadas cartesianas podemos representá-lo pela equação  $X(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$  para  $t \in [0, 2\pi]$ . Em coordenadas polares teríamos o seguinte:**

$$r = \sqrt{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} = 2$$

$$\theta = \arctg \left( \frac{4 \sin t}{4 \cos t} \right) = t.$$

**Logo, a mesma equação, em coordenadas polares ficaria  $X(t) = (2, t)$  COM  $t \in [0, 2\pi]$ .**



**Fig. 9.9: Espiral**

**Exemplo 9.14.** *Observe a espiral que é o lugar geométrico dado equação  $r = 2\theta$  ( $\theta \geq 0$ ) em coordenadas polares. No mesmo sistema de coordenadas poderíamos parametrizar tal curva com  $X(t) = (2t, t)$  para  $t \geq 0$ . Em coordenadas cartesianas, no entanto, teríamos:*

$$x = r \cos \theta = 2t \cos t$$

$$y = r \sin \theta = 2t \sin t$$

*Donde obteríamos  $X(t) = (2t \cos t, 2t \sin t)$  para  $t \geq 0$ .*

*Observe, no entanto, que apesar de podermos representar o lugar geométrico de tal curva por  $r = 2\theta$  ( $\theta \geq 0$ ), é difícil representá-la no sistema cartesiano como uma equação envolvendo  $x$  e  $y$  apenas.*

*Poderíamos pensar em escrever:*

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right),$$

*mas como a curva tem pontos com  $x = 0$  e a função  $\operatorname{arctg}$  tem imagem em  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , tal equação descreveria apenas o trecho de  $r = 2\theta$  para  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ .*

*Melhor seria escrever:*

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \right) = \frac{y}{x},$$

*que descreve toda espiral exceto os pontos onde  $x = 0$ . Mesmo assim, tal equação é evidentemente mais complexa que  $r = 2\theta$ .*

◁

Mais alguns exemplos de curvas classicamente representadas em coordenadas polares estão descritos abaixo. Tente veri-

ficar e comparar nesses exemplos as equações nos sistemas cartesiano e polar.

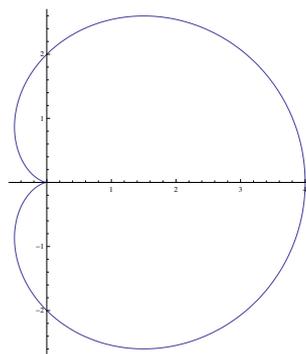


Fig. 9.10: Cardioide

**Exemplo 9.15.** O cardióide, descrito em coordenadas polares pela equação  $r = a(1 + \cos t)$ , onde  $a$  é um número real positivo, tem em coordenadas cartesianas equação  $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ .

A sua representação paramétrica que em coordenadas polares assumiria a forma  $X(t) = (a(1 + \cos t), t)$  para  $t \in [0, 2\pi]$  tem no sistema cartesiano a forma:

$$X(t) = \left( 2a \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}, 4a \frac{t}{(1 + t^2)^2} \right).$$

◁

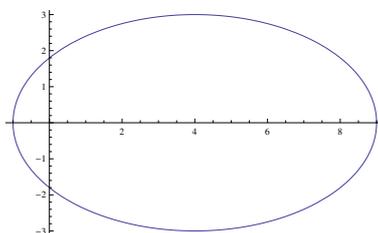


Fig. 9.11: Elipse de eixos 10 e 6

**Exemplo 9.16.** A elipse ao lado com eixo maior 10, eixo menor 6 e com um dos focos na origem pode ser representada em coordenadas polares pela equação:

$$r = \frac{9}{5 - 4 \cos t}.$$

*Num sistema cartesiano tal curva seria descrita por:*

$$\frac{(x - 4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$



### 3 Coordenadas Esféricas e Cilíndricas

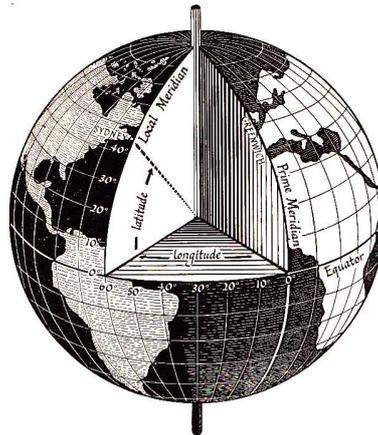


Fig. 9.12: Latitude e Longitude

Durante o século XV, quando a Europa vivenciava o período das grandes navegações, os navegadores, que sabiam caminhar sobre um globo aproximadamente esférico, começaram a usar um sistema de localização na Terra formado pela latitude e longitude de um ponto.

Nesse sistema a Terra fica dividida por paralelos, círculos centrados no eixo de rotação da Terra e localizados em planos perpendiculares a este mesmo eixo, e meridianos, círculos com centro localizado no centro do globo terrestre passando pelos pólos norte e sul (determinados pela intersecção do eixo de rotação do planeta com o globo).

Como podemos observar na Figura 9.12, podemos localizar um ponto na Terra pela sua latitude, que mede o ângulo (entre  $-90^\circ$  e  $90^\circ$ ) com vértice no centro da Terra formado entre o

ponto e a linha do Equador, e pela sua longitude, que mede o ângulo (entre  $-180^\circ$  e  $180^\circ$ ) entre o ponto e o meridiano de Greenwich, tido desde 1884 como o meridiano de referência para navegação.

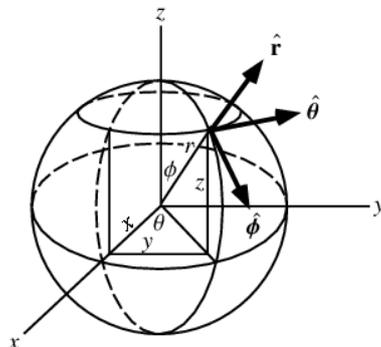


Fig. 9.13: Coordenadas Esféricas

O sistema de coordenadas esférico, de grande utilidade em problemas com simetrias em relação a origem do espaço, é semelhante ao sistema de latitudes e longitudes usado em navegação. A única diferença é que para localizar um ponto qualquer do espaço é necessária, além dos dois ângulos, a distância do ponto a origem do espaço. Observe que para localizar uma estrela qualquer no universo poderíamos dar a distância da mesma à Terra e a latitude e longitude do ponto onde aquela estrela estará exatamente em cima de nós.

Para definir um *sistema de coordenadas esférico* precisamos escolher um ponto de origem  $O$  e duas direções ortogonais, conhecidas como *zênite* e *referência do azimute*.

No caso do exemplo descrito acima o zênite é dado pela direção do eixo de rotação da Terra e a referência de azimute é dada pela reta que liga o centro da Terra ao meridiano de Greenwich.

As coordenadas esféricas  $(r, \phi, \theta)$  de um ponto  $P$  são então dadas por:

- *raio* ou *distância radial*  $r$  que é a distância (Euclideana)

entre  $O$  e  $P$ ;

- **ângulo polar** ou **colatitude**  $\phi$  dado pelo ângulo (entre  $0$  e  $\pi$ ) entre o zênite e a direção do segmento  $\overline{OP}$ ;
- **azimute** ou **longitude**  $\theta$ , ângulo (entre  $0$  e  $2\pi$ ) entre a referência de azimute e a projeção ortogonal de  $\overrightarrow{OP}$  sobre um plano ortogonal ao zênite (*plano de referência*).

Notamos que no exemplo dado pelos paralelos e meridianos da Terra, o ângulo de longitude é igual ao azimute  $\theta$ , mas o ângulo dado pela latitude de um dado ponto é o ângulo complementar ao ângulo polar  $\phi$ .

Note que no sistema de coordenadas esférico os pontos localizados sobre o zênite podem ser representados por mais de uma tripla  $(r, \phi, \theta)$ . De fato para tais pontos (com  $\phi = 0$  ou  $\phi = \pi$ ) o ângulo  $\theta$  não importa.

Observando a Figura 9.14 concluímos facilmente que as coordenadas esféricas se relacionam com as coordenadas cartesianas segundo as seguintes equações:



Fig. 9.14: Sphere Spirals de M.C. Escher

$$x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$$

$$z = r \cos \phi$$

e

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\phi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)$$
$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right)$$

Tente verificar isso.

**Exemplo 9.17. Curva Loxodrômica:**



Problemas com simetria esférica em geral tem uma representação mais simples em coordenadas esféricas. Observe a curva desenhada por M.C. Escher em sua obra “Sphere Spirals”. Tal curva é conhecida como *curva loxodrômica* e é a curva que cruza os meridianos sempre com o mesmo ângulo. Tal curva é representada por uma linha reta na *projeção de Mercator* (ver Wikipedia), isto é, se  $m$  é a inclinação da reta e  $t_0$  é o instante onde a curva cruza o Equador, na projeção de Mercator teríamos:

$$x(t) = t$$
$$y(t) = m(t - t_0)$$

Olhando para a curva numa esfera de raio 1 teríamos em coordenadas esféricas:

$$r(t) = 1$$
$$\theta(t) = t$$
$$\phi(t) = \arcsin(\tanh(m(t - t_0))) + \frac{\pi}{2}$$

Em coordenadas cartesianas, no entanto, tal curva seria representada pelas equações:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{\cos t}{\cosh(m(t - t_0))} \\y(t) &= \frac{\sin t}{\cosh(m(t - t_0))} \\z(t) &= \tanh(m(t - t_0))\end{aligned}$$

Observe que nos sistema cartesiano é difícil a primeira vista até mesmo saber que a curva se encontra numa esfera, fato que no sistema esférico é imediato.

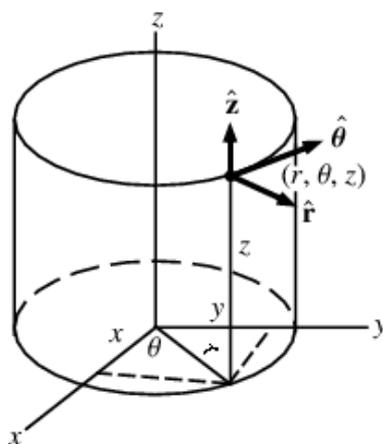


Fig. 9.15: Coordenadas Cilíndricas

O *sistema de coordenadas cilíndrico* é, simplificadaamente, o sistema de coordenadas polar do plano euclidiano complementado com uma terceira coordenada para descrever a altura  $z$  do ponto em relação ao plano  $Oxy$ . Para definir as coordenadas cilíndricas de um ponto é necessária a escolha de um ponto de origem  $O$ , eixo  $Oz$  para marcar a altura e uma referência de azimute no plano perpendicular a  $Oz$  pela origem (plano de referência). As coordenadas  $(r, \theta, z)$  do ponto  $P$  são definidas por:

- *distância radial* dada pela distância euclidiana de  $P$  ao eixo  $Oz$ ;

- *azimute*  $\theta$ , ângulo entre a referência de azimute e a projeção de  $\overrightarrow{OP}$  sobre o plano de referência;
- *altura*  $z$  que é a distância de  $P$  ao plano de referência.

As coordenadas cilíndricas e cartesianas se relacionam de forma muito parecida com a relação entre coordenadas polares e cartesianas:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

$$z = z$$

e, inversamente:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{x} \right)$$

$$z = z$$

**Exemplo 9.18. Hélice:**



Voltemos ao Exemplo 9.6 que descrevia uma hélice que em coordenadas cartesianas possuía equação  $X(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t/10)$ . Em coordenadas cilíndricas as equações paramétricas se simplificariam a:

$$X(t) = (1, t, t/10).$$

Estude isso.

## 4 Comprimento de uma Curva

Provavelmente em cursos de física você já se deparou com a fórmula:

$$\Delta s = v \Delta t$$

que indica a distância percorrida  $\Delta s$  por um corpo que se move durante um período de tempo  $\Delta t$  com velocidade constante  $v$  (onde  $v$  é igual ao comprimento do vetor velocidade  $v$ ).

Como poderíamos generalizar o cálculo da distância percorrida para um corpo que se move com velocidade não constante entre os instantes  $t_0$  e  $t$  ao longo de uma curva parametrizada  $X(t) = (x(t), y(t))$ ?

Algo que talvez também já seja familiar a você é que tal fórmula se generaliza por:

$$\Delta s = \int_{t_0}^t v(t) dt,$$

onde  $v(t) = \|v(t)\|$ .

Inspirados por essas equações, definimos o comprimento de uma curva  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizada por  $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$  no tempo  $t$  a partir do ponto  $t_0$  por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|X'(t)\| dt$$

ou de modo mais explícito:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$



Fig. 9.16: Comprimento de uma curva

Intuitivamente a fórmula acima admite a seguinte interpretação. Dividamos o intervalo  $[t_0, t]$  em partes de modo que  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = t$ . O comprimento do segmento de reta que liga  $X(t_i)$  à  $X(t_{i+1})$ , obtido pelo Teorema de Pitágoras,

é dado por:

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2},$$

onde  $\Delta x_i = (x(t_{i+1}) - x(t_i))$ ,  $\Delta y_i = (y(t_{i+1}) - y(t_i))$  e  $\Delta z_i = (z(t_{i+1}) - z(t_i))$ . Assim o comprimento  $\Delta s$  da curva parametrizada  $X(t)$  de  $t_0$  à  $t$  é dado aproximadamente por:

$$\Delta s \approx \sum_{i=0}^n \Delta s_i.$$

Ver Figura 9.16.

Mas, se  $\Delta t = (t_{i+1} - t_i)$  temos:

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= \sqrt{\left( \left( \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \right)^2 + \left( \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} \right)^2 + \left( \frac{\Delta z_i}{\Delta t_i} \right)^2 \right) (\Delta t_i)^2} = \\ &= \left( \sqrt{(v_i^x)^2 + (v_i^y)^2 + (v_i^z)^2} \right) \Delta t_i, \end{aligned}$$

onde  $v_i^x = \left( \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \right)$ ,  $v_i^y = \left( \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} \right)$  e  $v_i^z = \left( \frac{\Delta z_i}{\Delta t_i} \right)$ . Aumentando a partição e diminuindo os intervalos  $[t_i, t_{i+1}]$  temos que no limite a expressão

$$\Delta s \approx \sum_{i=0}^n \left( \sqrt{(v_i^x)^2 + (v_i^y)^2 + (v_i^z)^2} \right) \Delta t_i$$

torna-se

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

**Exemplo 9.19.** Qual o comprimento do círculo de raio 1?

**Solução:** O círculo de raio 1 pode ser representado como uma curva parametrizada por  $X(t) = (\cos t, \sin t)$ . Para obtermos o comprimento do círculo integramos a norma do vetor velocidade  $X'(t) = (-\sin t, \cos t)$ :

$$s(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

□

**Exemplo 9.20.** Qual o comprimento da hélice dada por  $X(t) = (\cos t, \sin t, t/10)$  entre os instantes 0 e  $4\pi$ ?

◁

**Solução:** O vetor velocidade da curva é dado por  $X'(t) = (-\sin t, \cos t, 1/10)$ . Logo:

$$s(4\pi) = \int_0^{4\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \left(\frac{1}{10}\right)^2} dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{\frac{101}{100}} dt = \frac{4\pi\sqrt{101}}{10}$$

□

## 5 Regiões planas limitadas por curvas

Frequentemente em problemas de física e engenharia precisamos encontrar áreas de regiões do plano limitadas por curvas planas. Não é raro, também, problemas que envolvem densidades (de massa, por exemplo) variáveis numa placa plana, sobre a qual estamos interessados em entidades como o peso ou centro de massa. Para lidar com tais problemas utilizam-se ferramentas desenvolvidas em cálculo integral, um tema que vai

Capítulo 9: Curvas 201

muito além do escopo deste livro. No presente momento não nos é necessário entender quais são e como podemos utilizar tais ferramentas. No entanto a descrição de regiões do plano limitadas por curvas é um tema de grande interesse para a geometria analítica. Temas este que trataremos a seguir.

Um modo interessante de descrevermos regiões limitadas por curvas é nos utilizarmos de coordenadas cartesianas e “escanearmos” a região analisando a intersecção da região com retas verticais, ou seja, retas do tipo  $x = k$ , onde  $k$  é uma constante real.

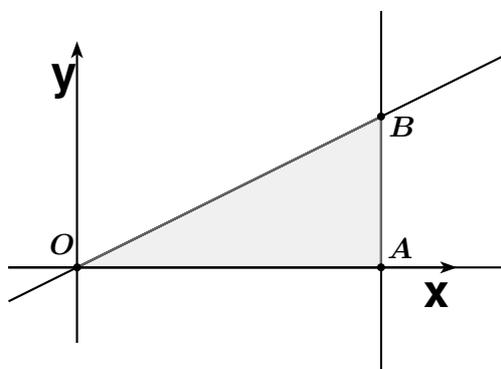


Fig. 9.17: Região limitada por 3 retas

**Exemplo 9.21.** *Imagine que queiramos descrever a região interna ao triângulo representado na Figura 9.17, isto é a área limitada pelos pontos  $O = (0, 0)$ ,  $A = (2, 0)$  e  $B = (1, 2)$ . Podemos descrevê-la analisando a intersecção das retas de equação  $x = k$ , para  $k \in [0, 2]$ , com o triângulo. Como a reta  $\overleftrightarrow{OB}$  tem equação  $y = \frac{1}{2}x$ , veríamos que para um dado  $x$  fixado os pontos do triângulo teriam a coordenada  $y$  no intervalo  $[0, \frac{1}{2}x]$ . Simbolicamente representaríamos a área do triângulo por:*

$$A_{\triangle OAB} = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=\frac{1}{2}x} dy dx$$

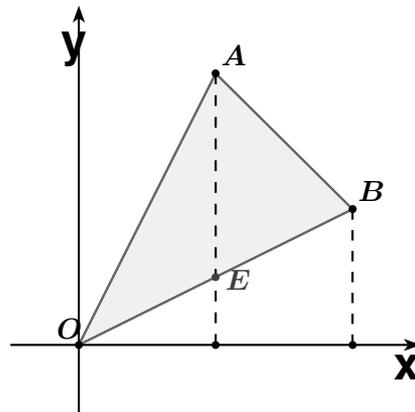


Fig. 9.18: Região limitada por 3 retas

**Exemplo 9.22.** *Considere agora o triângulo  $\triangle OAB$  limitado pelos pontos  $O = (0, 0)$ ,  $B = (4, 2)$  e  $C = (2, 4)$  (Figura 9.18). Nesse caso,  $x$  deve variar no intervalo  $[0, 4]$  para cobrir todo o triângulo. No entanto, quando  $x$  pertence ao intervalo  $[0, 2]$  a coordenada  $y$  fica limitada pelas retas  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OA}$ , e quando  $x$  está no intervalo  $[2, 4]$  a coordenada  $y$  fica limitada por  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overleftarrow{AB}$ . Assim sendo, para simplificar a descrição da região “escaneada” por retas verticais, descrevemos a área do triângulo  $\triangle OAB$  como a soma dos triângulos  $\triangle OAE$  e  $\triangle EAB$ .*

*Descrevendo o triângulo  $\triangle OAE$  temos então que, para  $x$  entre 0 e 2, os pontos do triângulo ficam entre as retas  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OA}$ , de equações  $y = \frac{1}{2}x$  e  $y = 2x$ , respectivamente. Logo, para  $x \in [0, 2]$  devemos ter  $\frac{1}{2}x \leq y \leq 2x$ , ou seja,  $y \in [\frac{1}{2}x, 2x]$ . Simbolicamente:*

$$A_{\triangle OAE} = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=2x} 1 \, dy dx.$$

*Para o triângulo  $\triangle EAB$  teríamos  $x$  variando entre 2 e 4. Nesse caso, os pontos do triângulo ficam entre as retas  $\overrightarrow{OB}$*

e  $\overleftrightarrow{AB}$ , de equações  $y = \frac{1}{2}x$  e  $y = -x + 6$ , respectivamente. Logo, para  $x \in [2, 4]$  devemos ter  $\frac{1}{2}x \leq y \leq -x + 6$ , ou seja,  $y \in [\frac{1}{2}k, -k + 6]$ . O que simbolicamente ficaria:

$$A_{\Delta EAB} = \int_{x=2}^{x=4} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=-x+6} 1 \, dydx.$$

Finalmente, a área do triângulo  $\triangle OAB$  seria representada por:

$$\begin{aligned} A_{\Delta OAB} &= A_{\Delta OAE} + A_{\Delta EAB} = \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=2x} 1 \, dydx + \int_{x=2}^{x=4} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=-x+6} 1 \, dydx. \end{aligned}$$

◁

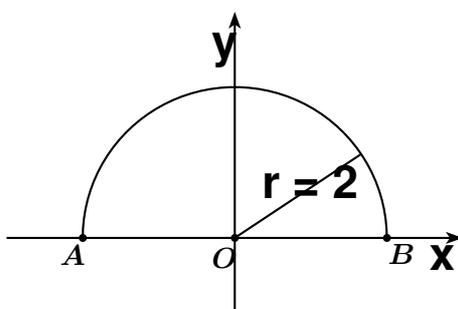


Fig. 9.19: Setor circular

**Exemplo 9.23.** Considere agora a região do plano acima do eixo  $Ox$  e limitada pelo círculo de equação  $x^2 + y^2 = 4$  (Figura 9.19). Podemos descrevê-la variando  $x$  no intervalo  $[-2, 2]$  e, para cada  $x$  fixado, fazer  $y$  percorrer o intervalo de 0 (reta  $y = 0$ ) até  $y = \sqrt{4 - x^2}$  (parte da curva  $x^2 + y^2 = 4$  sobre o eixo  $Ox$ ).

Desse modo, a área seria simbolicamente indicada por:

$$A_{AOB} = \int_{x=-2}^{x=2} \int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dy dx.$$

◁

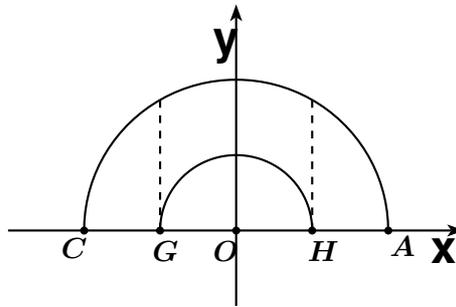


Fig. 9.20: Meio anel

**Exemplo 9.24.** *Suponha agora que queiramos descrever a região do plano acima do eixo  $Ox$  e limitada pelos círculos centrados em  $0 = (0, 0)$  e de raios 1 e 2 (Figura 9.20). Novamente, podemos descrevê-la variando  $x$  no intervalo  $[-2, 2]$ . Mas agora, para  $x \in [-2, -1]$  e  $x \in [1, 2]$ ,  $y$  fica entre a reta  $y = 0$  e a curva  $y = \sqrt{4 - x^2}$  e, para  $x \in [-1, 1]$ ,  $y$  está limitado pelas curvas  $y = \sqrt{1 - x^2}$  e  $y = \sqrt{4 - x^2}$ . Desse modo, a área seria simbolicamente indicada por:*

$$A_{CGHA} = \int_{x=-2}^{x=-1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dy dx + \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dy dx + \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dy dx$$

*Alternativamente, poderíamos descrever a mesma área subtraindo a área entre o eixo  $Ox$  e o círculo de raio 1 da área entre  $Ox$  e o círculo de raio 2, ou seja:*

$$A_{CGHA} = \int_{x=-2}^{x=2} \int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} dy dx - \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dy dx.$$

◁

Quando as regiões a serem descritas têm certa simetria circular como nos Exemplos 9.23 e 9.24, um modo interessante de descrever as áreas é através do uso de coordenadas polares. Podemos descrever uma dada região variando a coordenada  $\theta$  e olhando para a intersecção da região com a semi-reta de equação  $\theta = k$  (em coordenadas polares).

Assim a área do Exemplo 9.23 poderia ser representada variando  $\theta$  no intervalo  $[0, \pi]$  e, fazendo, para cada  $\theta$  fixado,  $r$  percorrer o intervalo  $[0, 2]$ . Simbolicamente representaríamos isso por:

$$A_{AOB} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=0}^{r=2} r dr d\theta.$$

**Observação 9.25.** *Em coordenadas cartesianas usualmente escrevemos  $dydx$  na descrição da área motivados pelo fato de que a área de um retângulo de base  $\Delta x$  e altura  $\Delta y$  é  $\Delta y \Delta x$ .*

*Em coordenadas polares escrevemos  $r dr d\theta$  ao invés de apenas  $dr d\theta$ , pois a área de um setor circular definido por um dado  $\Delta\theta$  e com raio variando entre  $r$  e  $r + \Delta r$  é aproximadamente dada por  $r \Delta r \Delta\theta$  se  $\Delta r$  é pequeno.*

*Mais detalhes podem ser encontrados em referências clássicas de cálculo.*

A região do Exemplo 9.24, por sua vez, poderia ser representada variando  $\theta$  no intervalo  $[0, \pi]$  e, fazendo, para cada  $\theta$  fixado,  $r$  percorrer o intervalo  $[1, 2]$ . Simbolicamente representaríamos isso por:

$$A_{AOB} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{r=1}^{r=2} r dr d\theta.$$

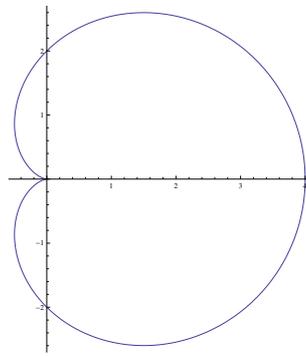


Fig. 9.21: Cardioide

**Exemplo 9.26.** *Imagine que queiramos usar coordenadas polares para descrever a região do plano limitada pelo cardióide de equação  $r = 1 + \cos \theta$ . Para isso, fazemos  $\theta$  variar no intervalo  $[0, 2\pi]$  e, para cada  $\theta$  fixado, fazemos  $r$  variar entre 0 e  $1 + \cos \theta$ . Assim tal região seria descrita por:*

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1+\cos \theta} r dr d\theta.$$

◁

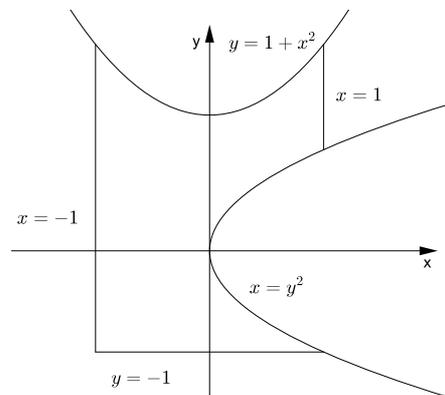
## Exercícios

**Ex. 9.1 —** Esboce as regiões descritas abaixo:

- a)  $\int_1^2 \int_{-1}^3 dy dx$
- b)  $\int_0^1 \int_0^{2x} dy dx$
- c)  $\int_0^1 \int_{2x}^2 dy dx$
- d)  $\int_0^2 \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx dy$
- e)  $\int_1^2 \int_0^{\log x} dy dx$
- f)  $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy dx$
- g)  $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy dx$
- h)  $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dy dx$

**Ex. 9.2 —** Descreva as regiões abaixo de dois modos diferentes usando a notação para coordenadas cartesianas descrita acima:

- Região limitada pelos eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$  e a reta  $y + 2x = 4$
- Região limitada pelas parábolas  $x = y^2 - 1$  e  $x = 2y^2 + 3$ .
- Região dentro da elipse  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .
- Região acima do eixo  $Ox$  à direita do eixo  $Oy$  e entre os círculos  $x^2 + y^2 = 4$  e  $x^2 + y^2 = 9$ .
- Região limitada da figura abaixo:



**Ex. 9.3 —** Inverta a notação de (??) para (??) ou (??) para (??) nos itens do Exercício **9.1**.

**Ex. 9.4 —** Esboce as regiões descritas abaixo usando coordenadas polares:

- $\int_0^{2\pi} \int_0^2 r dr d\theta$ .
- $\int_0^{2\pi} \int_1^2 r dr d\theta$ .
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r dr d\theta$ .

**Ex. 9.5 — Use coordenadas polares para descrever as regiões abaixo:**

- a) Anel centrado na origem de raio interno 2 e raio externo 4**
- b) Parte do anel centrado na origem de raio interno 1 e raio externo 2, localizada no primeiro quadrante.**
- c) Parte do anel centrado na origem de raio interno 1 e raio externo 2, localizada no primeiro quadrante, entre o eixo  $Oy$  e a reta  $y = x$ .**

## Mudança de Coordenadas Ortogonais no Plano

Como sabemos, um sistema de coordenadas  $\Sigma$  no plano é um conjunto de dois vetores linearmente independentes  $f_1, f_2$  (ou seja uma base  $E$  para  $\mathbb{V}^2$ ) e um ponto  $O$ , chamado de origem do sistema de coordenadas.

Sabemos de modo geral que um ponto fixo  $P$  ao ser representado em diferentes sistemas de coordenadas possuirá coordenadas distintas. Esse fato foi usado inúmeras vezes ao escolhermos um sistema de coordenadas para representarmos um problema: o mote era que através de uma escolha adequada para o sistema de coordenadas podemos simplificar diversos problemas de geometria analítica.

Neste capítulo iremos um pouco além e entenderemos a relação entre a representação em diferentes sistemas de coordenadas através das mudanças de coordenadas, isto é, de algumas transformações que nos permitem identificar os objetos geométricos nos diferentes sistemas. Mas antes de irmos ao caso geral concentraremos nossos esforços num tipo especial de mudanças de coordenadas, as transformações ortogonais e em especial a *translação e rotação*.. Estas apresentam-se como

# 1 Translação

Uma translação é uma mudança de coordenadas entre dois sistemas  $\Sigma = (O, B = (e_1, e_2))$  e  $\Sigma' = (O', B' = (f_1, f_2))$  na qual as bases  $B$  e  $B'$  são iguais, isto é, apenas  $O$  e  $O'$  diferem.

Fixado um ponto  $P$  do espaço, qual a relação entre as coordenadas  $(x, y)$  de  $P$  no sistema  $\Sigma$  e as coordenadas  $(x', y')$  de  $P$  no sistema  $\Sigma'$ ?

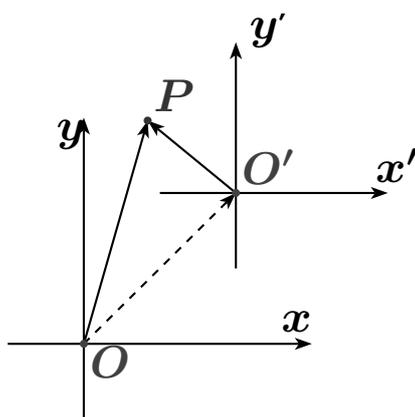


Fig. 10.1: Translação

Sejam  $(h, k)$  as coordenadas do ponto  $O'$  no sistema  $\Sigma$ . Temos então que, na base  $(e_1, e_2)$ ,  $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ ,  $\overrightarrow{O'P} = (x', y')$  e  $\overrightarrow{OO'} = (h, k)$ . Como  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ , temos que  $(x, y) = (x', y') + (h, k)$ . Dessa forma a mudança de coordenadas de  $\Sigma'$  para  $\Sigma$  assume a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

onde  $(h, k)$  as coordenadas do ponto  $O'$  no sistema de coordenadas sistema  $\Sigma_1$ .

## 2 Eliminação dos termos lineares de uma equação quadrática

Vamos agora usar a translação para simplificar a equação  $f(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ , eliminando seus os termos lineares.

As equações das translações são

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

Substituindo na equação de segundo grau temos:

$$A(x' + h)^2 + B(y' + k)^2 + C(x' + h)(y' + k) + D(x' + h) + E(y' + k) + F = 0$$

expandindo temos:

$$Ah^2 + Chk + 2Ahx' + Chy' + Dh + Bk^2 + Ckx' + 2Bky' + Ek + A(x')^2 + Cx'y' + Dx' + B(y')^2 + Ey' + F = 0$$

Agrupando os termos

$$A(x')^2 + B(y')^2 + Cx'y' + (2Ah + Ck + D)x' + (Ch + 2Bk + E)y' + Ah^2 + Bk^2 + Chk + Dh + Ek + F = 0 \tag{10.1}$$

$$+Ah^2 + Bk^2 + Chk + Dh + Ek + F = 0$$

Queremos que os termos lineares se anulem, logo

$$2Ah + Ck + D = 0$$

$$Ch + 2Bk + E = 0$$

Se o sistema tiver solução, então teremos resolvido o problema. Isso ocorre por exemplo se

$$\begin{vmatrix} 2A & C \\ C & 2B \end{vmatrix} = 4AB - C^2 \neq 0$$

Caso o determinante se anule, podemos não ter nenhuma solução (sistema impossível) ou um número infinito de soluções (sistema indeterminado).

Notemos também que os coeficientes dos termos de grau dois não se alteram e que o termo constante  $F'$  vale  $f(h, k) = Ah^2 + Bk^2 + Chk + Dh + Ek + F = 0$

**Exemplo 10.1.** *Achar uma translação que elimine os termos lineares da equação:*

$$x^2 - 5xy - 11y^2 - x + 37y + 52 = 0$$



**Solução:** Se substituirmos  $x = x' + h$  e  $y = y' + k$ . Teremos

$$(x' + h)^2 - 5(x' + h)(y' + k) - 11(y' + k)^2 - (x' + h) + 37(y' + k) + 52 = 0 \tag{10.2}$$

Donde temos:

$$(x')^2 - 5x'y' - 11(y')^2 + (2h - 5k - 1)x' - (5h + 22k - 37)y' + (h^2 - 5hk - 11k^2 - h + 37k + 52) = 0$$

Como queremos que os termos em  $x'$  e em  $y'$  se anulem, devemos ter para isso

$$2h - 5k - 1 = 0$$

$$5h + 22k - 37 = 0$$

O sistema linear acima possui uma única solução  $[h = 3, k = 1]$ . E logo a equação **10.2** se simplifica a

$$(x')^2 - 5x'y' - 11(y')^2 + 69 = 0$$

**Exemplo 10.2.** Simplifique a equação  $g(x, y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$ .

◁

**Solução:** Usemos agora o deduzido imediatamente antes do Exemplo 10.1.

Sejam

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}.$$

Para termos os termos lineares nulos, devemos ter

$$\begin{cases} 8h - 4k + 12 = 0 \\ -4 + 14k + 6 = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema linear chegamos a  $h = -2$  e  $k = -1$

Temos, assim, que  $F' = g(-2, -1) = 4(-2)^2 - 4(-2)(-1) + 7(-1)^2 + 12(-2) + 6(-1) - 9 = -24$ . Logo a equação no sistema  $\Sigma'$  fica

$$4(x')^2 - 4x'y' + 7(y')^2 - 24 = 0$$

□

## Exercícios

**Ex. 10.1** — Em cada um dos seguintes itens, transformar a equação dada por uma translação dos eixos coordenados para a nova origem indicada.

**NO PLANO**

$$1 \quad x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0 \quad (-1, 3)$$

$$2 \quad 3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 8 = 0 \quad (-2, 1)$$

$$3 \quad y^3 - x^2 + 3y^2 - 4y + 3y - 3 = 0 \quad (-2, -1)$$

$$4 \quad xy - 3x + 4y - 13 = 0 \quad (-4, 3)$$

**Ex. 10.2** — Nos item abaixo, por uma translação dos eixos coordenados, transformar a equação dada em outra desprovida de termos do primeiro grau.

$$1 \quad 2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 32 = 0$$

$$2 \quad 3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$$

$$3 \quad xy - x + 2y - 10 = 0$$

**Ex. 10.3** — Dada uma equação quadrática em duas variáveis  $Ax^2 + Cxy + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ , prove que se  $4AB - C^2 \neq 0$  então será possível eliminar os termos lineares através de uma translação. Verifique que a recíproca não é verdadeira, i.e., é possível eliminar os termos lineares de uma equação quadrática em duas variáveis através de uma translação mesmo tendo  $4AB - C^2 = 0$ . Faça isso mostrando que, por exemplo, a equação quadrática  $4x^2 + y^2 + 4xy + 2x + y = 0$  satisfaz  $4AB - C^2 = 0$  porém existem infinitas translações que eliminam o termo misto.

**Ex. 10.4** — Prove que na equação de segundo grau  $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , quando a origem é translada para o ponto  $(h, k)$  o termo constante é transformado em  $f(h, k)$ .

Considere no plano um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, e_1, e_2)$ . A rotação de  $\Sigma$  por um ângulo  $\alpha$  corresponde a um sistema de coordenadas  $\Sigma' = (O, f_1, f_2)$  onde os vetores  $f_1, f_2$  são iguais aos vetores  $e_1, e_2$  girados de  $\alpha$  no sentido anti-horário.

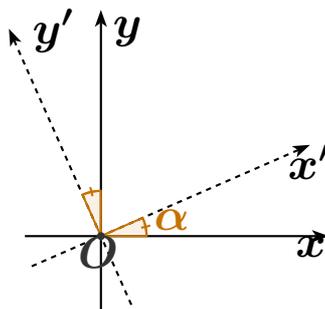


Fig. 10.2: Rotação

Em coordenadas polares temos o seguinte. Considere um ponto  $P$  de coordenadas  $(r, \theta)$ . Substituindo  $\theta$  por  $\theta - \alpha$  rotacionamos o ponto  $P$  pelo ângulo  $\alpha$  (Por quê?). Ou seja, definindo um novo sistema de coordenadas polares por  $r' = r$  e  $\theta' = \theta - \alpha$ , obtemos um sistema de coordenadas polares rotacionado de  $\alpha$ .

A partir da identificação do sistema polar com o sistema cartesiano associado temos que as coordenadas  $(x, y)$  de  $P$  obedecem:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

Por outro lado, denotando por  $(x', y')$  as coordenadas de  $P$  no sistema cartesiano rotacionado temos então:

$$x' = r \cos (\theta - \alpha)$$

$$y' = r \operatorname{sen} (\theta - \alpha)$$

$$\begin{aligned}x' &= r \cos \theta \cos \alpha + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha \\y' &= r \cos \alpha \operatorname{sen} \theta - r \cos \theta \operatorname{sen} \alpha.\end{aligned}$$

**Como  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \operatorname{sen} \theta$  segue que**

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \\y' &= -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha,\end{aligned}$$

o que relaciona as coordenadas  $(x, y)$  de  $P$  no sistema  $\Sigma$  com as coordenadas  $(x', y')$  de  $P$  no sistema cartesiano  $\Sigma'$  rotacionado de um ângulo  $\alpha$ .

**Em notação matricial temos:**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Calculando a transformação inversa (matriz inversa) segue então que**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

**Donde:**

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha \\y &= x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha,\end{aligned}$$

**Eliminemos agora o termo misto de  $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$  através de rotação.**

**Queremos achar uma rotação por um ângulo  $\alpha$  tal que a equação acima se reduza a**

$$A'x^2 + B'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

Substituindo  $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$  e  $y = y' \cos \alpha + x' \sin \alpha$  em  $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$  teremos:

$$A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + B(y' \cos \alpha + x' \sin \alpha)^2 + C(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(y' \cos \alpha + x' \sin \alpha) + D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + E(y' \cos \alpha + x' \sin \alpha) + F = 0$$

**Expandindo:**

$$A(x')^2 \cos^2 \alpha - 2Ax'y' \sin \alpha \cos \alpha + A(y')^2 \sin^2 \alpha + B(y')^2 \cos^2 \alpha + 2Bx'y' \sin \alpha \cos \alpha + B(x')^2 \sin^2 \alpha + Cx'y' \cos^2 \alpha + C(x')^2 \sin \alpha \cos \alpha - C(y')^2 \sin \alpha \cos \alpha - Cx'y' \sin^2 \alpha + Dx' \cos \alpha - Dy' \sin \alpha + Ey' \cos \alpha + Ex' \sin \alpha + F = 0$$

**Donde chegamos a:**

$$A'x^2 + B'y^2 + C'x'y' + D'x + E'y + F' = 0,$$

**onde:**

$$A' = A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha + C \cos \alpha \sin \alpha$$

$$B' = B \cos^2 \alpha + A \sin^2 \alpha - C \cos \alpha \sin \alpha$$

$$C' = C \cos^2 \alpha - C \sin^2 \alpha - 2A \cos \alpha \sin \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha$$

$$D' = D \cos \alpha + E \sin \alpha$$

$$E' = E \cos \alpha - D \sin \alpha$$

$$F' = F$$

**Para eliminar o termo misto devemos ter**

$$C' = C \cos^2 \alpha - C \sin^2 \alpha - 2A \cos \alpha \sin \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha$$

**seja zero, ou seja queremos que**

$$C' = C \cos 2\alpha - (\sin 2\alpha)(A - B) = 0$$

E assim:

$$\cot (2\alpha) = \frac{A - B}{C}$$

Um modo mais fácil de lembrar dessas equações é notar que  $A' + B' = A + B$  e que

$$\begin{aligned} A' - B' &= A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha + C \cos \alpha \sin \alpha - (B \cos^2 \alpha + A \sin^2 \alpha) \\ &= A \cos^2 \alpha - B \cos^2 \alpha - A \sin^2 \alpha + B \sin^2 \alpha + 2C \cos \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

Usando as formulas de ângulo duplo  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos (2\theta)$  e  $2 \sin \theta \cos \theta = \sin (2\theta)$  temos

$$\begin{aligned} A' - B' &= A' \cos 2\alpha - B' \cos 2\alpha + C' \sin 2\alpha \\ &= (A' - B') \cos 2\alpha + C' \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} A' - B' &= C \sin 2\alpha \left( \frac{A - B \cos 2\alpha}{C \sin 2\alpha} + 1 \right) \\ &= C \sin 2\alpha (\cot^2 (2\alpha) + 1). \end{aligned}$$

Assim

$$A' - B' = C \csc (2\alpha).$$

Desse modo, para acharmos  $A'$  e  $B'$  temos de resolver o sistema

$$\begin{cases} A' + B' = A + B \\ A' - B' = C \csc (2\alpha) = C \sqrt{\left(\frac{A - B}{C}\right)^2 + 1} \end{cases}$$

**Exemplo 10.3.** Simplifique a equação  $g(x, y) = 4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y - 9 = 0$



**Solução:** Como vimos na seção anterior a translação

$$\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

elimina os termos lineares e transforma a equação para

$$4(x')^2 - 4x'y' + 7(y')^2 - 24 = 0$$

$$h = -2 \text{ e } k = -1$$

Então uma rotação por  $\cot(2\alpha) = \frac{A - B}{C} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$  irá eliminar o termo misto. Note que se  $\cot(2\alpha) = \frac{3}{4}$ , então o ângulo  $\alpha$  está no primeiro quadrante e  $\csc 2\alpha = \frac{5}{4}$ . (Só para sua curiosidade  $\alpha \simeq 26.565$ )

Logo

$$\begin{cases} A'' + B'' = A' + B' = 11 \\ A'' - B'' = C \csc(2\alpha) - 5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear temos que  $A'' = 3$  e  $B'' = 8$  e logo a equação fica

$$\begin{aligned} 3(x'')^2 + 8(y'')^2 &= 24 \\ \frac{(x'')^2}{8} + \frac{(y'')^2}{3} &= 1 \end{aligned}$$

(Como veremos depois, uma elipse horizontal) □

## Exercícios

**Ex. 10.1** — Determinar as novas coordenadas dos pontos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  quando os eixos coordenados são girados de um ân-

**Ex. 10.2 —** Para cada equação abaixo transformar a equação dada por uma rotação dos eixos coordenados do ângulo indicado:

1  $2x + 5y - 3 = 0$ ,  $\arctg 2, 5$

2  $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$ ,  $45^\circ$

3  $\sqrt{3}y^2 + 3xy - 1 = 0$ ,  $60^\circ$

**Ex. 10.2 —** Por uma rotação dos eixos coordenados, transformar a equação dada em outra desprovida do termo  $xy$ .

1  $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}x = 1$

2  $9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$

3  $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$

4  $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$

**Ex. 10.2 —** Prove que os números  $A + C$  e  $B^2 - 4AC$  são invariantes por rotações.

## 4 Equações Geral do Segundo Grau no Plano

Através do uso de translações e rotações do sistema de coordenadas, podemos observar que as equações de elipses, parábolas, hipérboles e circunferências podem ser escritas na forma  $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ . No entanto, nem toda equação nessa forma representa uma dessas cônicas. Por exemplo, a equação  $x^2 - y^2 = 0$ , ou de modo mais conveni-

CAPÍTULO 10. MEDIANÇA DE COORDENADAS ORTOGONAIS 301  
**NO PLANO**  
ente  $(x + y)(x - y) = 0$ , representa duas retas concorrentes:  
 $x + y = 0$  e  $x - y = 0$ .

É um bom exercício observar que podemos dividir equações quadráticas do tipo  $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ , em três grupos de acordo com as curvas que elas representam:

- Equações do *tipo elíptico*, onde  $C^2 - 4AB < 0$ : vazio, ponto, circunferência ou elipse;
- Equações do *tipo parabólico*, onde  $C^2 - 4AB = 0$ : vazio, reta, união de duas retas paralelas ou parábola;
- Equações do *tipo hiperbólico*, onde  $C^2 - 4AB > 0$ : união de duas retas concorrentes ou hipérbole.

**Exemplo 10.4.** *Exemplos de equações quadráticas em  $x, y$ :*

**1** *Equações do tipo elíptico:*

- $x^2 + y^2 + 1 = 0$ : **Vazio;**
- $x^2 + y^2 = 0$ : **Ponto;**
- $x^2 + y^2 - 1 = 0$ : **Circunferência;**
- $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ : **Elipse.**

**2** *Equações do tipo parabólico:*

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 0$ : **Uma reta;**
- $(x + y)(x + y + 1) = x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$ : **União de duas retas paralelas;**
- $x - y^2 = 0$ : **Parábola.**

**3** *Equações do tipo hiperbólico:*

- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = 0$ : *União de duas retas concorrentes;*
- $(x + y)(x + y + 1) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ : *Hipérbole.*



Para uma identificação exata da curva representada pela equação devemos através de translações e rotações obter uma equação simplificada, isto é, sem termos lineares e misto. Para isso, sugerimos o seguinte método:

- 1 Verifique se existe termo misto, isto é, se  $C \neq 0$ . Se  $C = 0$ , complete quadrado e faça uma translação para finalizar a simplificação da equação.
- 2 Caso  $C \neq 0$ , proceda como indicado no capítulo de Mudança de Coordenadas, para eliminar os termos de primeiro grau via translação.

**Observação 10.5.** *Podemos, nesse ponto, chegar a um sistema incompatível. Nesse caso, partimos para o próximo passo sem nada fazer.*

- 3 Como feito no capítulo de Mudança de Coordenadas, eliminamos agora o termo misto via rotação.

Como vimos no exercício ??, é possível através de translações eliminar os termos lineares de  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  (com certeza) se  $4AB - C^2 \neq 0$ .

**NO PLANO**  
**Caso  $4AB - C^2 \neq 0$**

Nesse caso a simplificação segue via translação e rotação.

**Exemplo 10.6.** Reduzir a equação  $x^2 - 5xy - 11y^2 - x + 37y + 52 = 0$ .

◁

**Solução:** Fazemos a translação  $x = x' + h$  e  $y = y' + k$  e queremos que os coeficientes de  $x'$  e  $y'$  se anulem. Para isso teremos que

$$\begin{cases} 2h - 5k - 1 = 0 \\ 5h + 22k - 37 = 0 \end{cases}$$

Cujas soluções são  $h = 3$  e  $k = 1$ . Ou seja a nova origem é o ponto  $(3, 1)$  e nesse sistema a equação fica

$$(x')^2 + 5x'y' + 11(y')^2 + 69 = 0$$

Para eliminar o termo misto devemos rotar a equação por

$$\cot(2\theta) = -12/5$$

E a equação após a rotação fica sendo

$$A''(x'')^2 + B(y'')^2 = 69$$

Onde  $A'' + B'' = A' + B'$  e  $A'' - B'' = B'\sqrt{\cot(2\theta) + 1}$  e assim

$$A'' = -\frac{23}{2} \text{ e } B'' = \frac{3}{2}$$

e a equação se reduz a

$$\frac{x''}{6} + \frac{y''}{46} = 1$$

□

**Caso  $4AB - C^2 = 0$**

Neste caso não tentaremos eliminar os termos lineares e passaremos direto ao termo misto. Para eliminar o termo misto faremos uma rotação pelo ângulo dado por

$$\cot(2\alpha) = \frac{A - B}{C}$$

**Exemplo 10.7.**  $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 15x + 17y + 15 = 0$

◁

**Solução:** Neste caso  $4AB - C^2 = 0$ . Eliminaremos o termo misto rotacionando por um ângulo de

$$\cot(2\theta) = \frac{A - B}{C} = -\frac{7}{24}$$

Neste caso temos um triângulo de lados  $-7, 24$  e  $25$ . e desta forma  $\sin(2\theta) = 24/25$  e  $\cos(2\theta) = -7/25$

Também sabemos que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin(2\theta)}{1 + \cos(2\theta)}$$

e logo  $\operatorname{tg}(\theta) = 24/18 = 4/3$  e logo  $\sin(\theta) = 4/5$  e  $\cos(\theta) = 3/5$  e as equações da rotação ficam

$$\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta \quad \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'$$

e

$$y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$$

e a equação reduzida pode ser calculada pelas equações

$$A' + B' = A + B = 25$$

$$A' - B' = C \operatorname{csc}(2\alpha) = -25$$

**NO PLANO**

e logo  $A' = 0$  e  $B' = 25$  e a equação se reduz a

$$25 (y')^2 - 38 \left( \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \right) - 34 \left( \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \right) + 71 = 0$$

$$25 (y')^2 - 50x' + 10y' + 71 = 0$$

**Completando os quadrados temos**

$$\left( y' + \frac{1}{5} \right)^2 = 2 \left( x' - \frac{7}{5} \right)$$

□

## Exercícios

**Ex. 10.1 — Identifique e desenhe as curvas , mostrando os novos eixos após a rotação e translação:**

1  $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x - 14y + 5 = 0$

2  $x^2 - 5xy + 13y^2 + 7x - 31y - 37 = 0$

3  $3x^2 + 12xy + 8y^2 - 24x - 40y + 60 = 0$

4  $11x^2 + 6xy + 3y^2 - 12x - 12y - 12 = 0$

5  $7x^2 - 8xy + y^2 + 14x - 8y + 16 = 0$

6  $6x^2 + 12xy + y^2 - 36x - 6y = 0$

7  $9x^2 - 15xy + y^2 + 63x = 0$

8  $25x^2 + 120xy + 144y^2 + 86x + 233y + 270 = 0$

9  $5x^2 + 120xy + 144y^2 - 312x + 130y + 156 = 0$

10  $x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 6y - 28 = 0$

11  $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 2x - 3y \pm 2 = 0$  (dois problemas)

## 5 Um pouco de Álgebra Linear

Dado uma matriz real  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e  $v = (x, y)$  um vetor no plano.

Definimos o produto da matriz  $A$  pelo vetor  $v$  como

$$Av := (a_{11}x + a_{12}y, (a_{21}x + a_{22}y))$$

O produto da matriz  $A$  pelo vetor  $v$  definida acima é linear, isto é, satisfaz:

$$A(\lambda_1 u + \lambda_2 v) = A\lambda_1 u + A\lambda_2 v$$

para todos os vetores  $u, v$  e para todos escalares  $\lambda_1, \lambda_2$ . A demonstração desse fato será deixada como exercício.

**Definição 10.8.** *Um número real  $\lambda$  é dito autovalor para a matriz  $A$  se existir um vetor  $v$  não nulo tal que*

$$Av = \lambda v$$

Dado  $\lambda$  um autovalor da matriz  $A$ , diremos que um vetor  $u$  é um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$  se  $Au = \lambda u$ .

Em coordenadas temos as seguintes condições:

$$(a_{11}x + a_{12}y, (a_{21}x + a_{22}y)) = (\lambda x, \lambda y)$$

Ou equivalentemente:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

O sistema acima tem solução não trivial somente se:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Ou seja,  $\lambda$  é um autovalor da matriz  $A$  se e somente se for raiz do polinômio  $p_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) + a_{12}a_{21}$ . O polinômio  $p_A(\lambda)$  é dito polinômio característica da matriz  $A$ .

Os argumentos anteriores provam o seguinte teorema:

**Teorema 10.9.** *Os autovalores de uma matriz  $A$  são as raízes do polinômio característico da matriz  $A$ .*

Para uma matriz simétrica temos:

**Teorema 10.10.** *Dado uma matriz  $A$  simétrica  $2 \times 2$  então:*

- 1**  *$A$  possui dois autovalores reais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .*
- 2** *Existe um par de autovetores  $u$  e  $v$  relativos aos autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  respectivamente. Esses autovetores são ortogonais.*
- 3** *Considere a matriz  $B$  cuja primeira coluna é formada pelas coordenadas de  $u$  e a segunda coluna é formada pelas coordenadas do vetor  $v$  então:*

$$BAB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

**Demonstração.**

O discriminante da equação quadrática  $p_A(\lambda) = 0$  é  $\Delta = (A - C)^2 + B^2$ . Como o discriminante é não negativo as raízes são reais .

- 2** Se  $\Delta > 0$  a equação tem  $p_A(\lambda) = 0$  tem raízes reais distintas:  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Sejam  $u$  e  $v$  tais que  $Au = \lambda_1 u$  e  $Av = \lambda_2 v$ .

Vamos provar que  $u$  e  $v$  são ortogonais

$$Au \cdot v = u \cdot Av$$

Logo

$$\lambda_1 u \cdot v = \lambda_2 u \cdot v$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)u \cdot v = 0$$

e logo  $u \cdot v = 0$

- 3** Fazer.

## Mudança de Coordenadas no Espaço

### 1 Mudança de Base

Dadas duas bases do espaço  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  e  $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ . Os vetores  $e_i$  podem ser escritos como combinação linear de  $f_i$  :

$$e_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + a_{31}f_3 \quad (11.1)$$

$$e_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + a_{32}f_3 \quad (11.2)$$

$$e_3 = a_{13}f_1 + a_{23}f_2 + a_{33}f_3 \quad (11.3)$$

Dado um vetor qualquer ele pode ser escrito como combinação linear de  $e_i$  e de  $f_i$

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

$$v = uf_1 + vf_2 + wf_3$$

Ou de modo equivalente as coordenadas de  $v$  na base  $E$  são  $(x, y, z)$  e as coordenadas desse mesmo vetor na base  $F$  são  $(u, v, w)$ . O problema que queremos resolver é o seguinte: Imagine que são dadas as coordenadas do vetor  $v$  na base  $E$ . Como fazemos para descobrir as coordenadas desse vetor na base  $F$ ?

Esse problema é fácil de resolver para isso substituiremos as expressões de  $e_1, e_2, e_3$  na base  $F$  dadas em **11.1, 11.2 e 11.3** em  $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ .

$$v = x(a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + a_{31}f_3) + y(a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + a_{32}f_3) + z(a_{13}f_1 + a_{23}f_2 + a_{33}f_3)$$

$$v = (xa_{11} + ya_{12} + za_{13})f_1 + (xa_{21} + ya_{22} + za_{23})f_2 + (xa_{31} + ya_{32} + za_{33})f_3$$

Em notação matricial temos:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A matriz

$$M_{E,F} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

é chamada matriz mudança de base de  $E$  para  $F$ .

**Exemplo 11.1.** *Seja a base  $F$  dada por*

$$e_1 = 2f_1 + 3f_2 + 4f_3$$

$$e_2 = f_1 + f_2 + f_3$$

$$e_3 = f_2$$

*Então a matriz mudança de base vale*

$$M_{E,F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Essa expressão pode ser facilmente generalizada para um espaço vetorial finito. Neste caso seja  $E = \{e_i\}_{i=1}^n$  e  $F =$*

$\{f_i\}_{i=1}^n$ . E seja a expansão de  $e_j$  na base  $F$

$$e_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} f_i \quad (11.4)$$

Então dado um vetor  $v = \sum_{k=1}^n y_k f_k$  e  $v = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  então substituindo **11.4** em  $v = \sum_{k=1}^n x_k e_k$  temos

$$v = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_k a_{ik} f_i$$

$$\sum_{k=1}^n y_k f_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_k a_{ik} f_i$$

$$\sum_{k=1}^n y_k f_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n x_i a_{ki} f_k$$

e logo

$$y_k = \sum_{i=1}^n x_i a_{ki}$$

ou em notação matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

◁

E se fizemos duas mudanças de base uma de  $E$  para  $F$  e outra de  $F$  para  $G$ , qual será a matriz mudança de base de  $E$  para  $G$ ? Neste caso sejam  $A_{E,F} = (a_{ij})$  a matriz mudança de base de  $E$  para  $F$  e  $B_{F,G} = (b_{ij})$  a matriz mudança de base de  $F$  para  $G$ . Queremos determinar  $C_{E,G} = (c_{ij})$  a matriz mudança de base de  $E$  para  $G$ .

Assim temos que  $f_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i$  e  $g_j = \sum_{k=1}^n b_{kj} f_k$ , substituindo a primeira expressão na segunda temos:

$$g_j = \sum_{k=1}^n b_{kj} \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i$$

$$\Rightarrow g_j = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{kj} a_{ik} e_i$$

Como  $g_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i$ , temos que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Ou seja, a matriz  $C_{E,G} = A_{E,F} \cdot B_{F,G}$

Uma consequência da expressão acima é que se a mudança da base  $E$  para  $F$  é a matriz  $A$ , então a mudança da base  $F$  para a base  $E$  é a matriz  $A^{-1}$ .

**Exemplo 11.2.** Na exemplo anterior a base  $E$  era dada por

$$e_1 = 2f_1 + 3f_2 + 4f_3$$

$$e_2 = f_1 + f_2 + f_3$$

$$e_3 = f_2$$

**Então a matriz mudança de base da base  $E$  para a base  $F$  valia**

$$M_{E,F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Então a mudança da base  $F$  para a base  $E$  vale**

$$M_{F,E} = (M_{E,F})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

## 2 Mudança de Coordenadas

Sejam dois sistemas de coordenadas  $\Sigma_1 = (O, e_1, e_2, e_3)$  e  $\Sigma_2 = (O', f_1, f_2, f_3)$ .

Neste caso um ponto  $P$  no espaço pode ser escrito como  $\overrightarrow{OP} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$  ou como  $\overrightarrow{O'P} = y_1f_1 + y_2f_2 + y_3f_3$ .

Escrevendo os vetores  $e_i$  na base  $f_i$  teremos:

$$e_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + a_{31}f_3 \quad (11.5)$$

$$e_2 = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + a_{32}f_3 \quad (11.6)$$

$$e_3 = a_{13}f_1 + a_{23}f_2 + a_{33}f_3 \quad (11.7)$$

Então de modo análogo a seção anterior teremos que o vetor  $\overrightarrow{OP}$  escreve-se na base  $F$  como  $\overrightarrow{OP} = xf_1 + yf_2 + zf_3$  sendo  $x, y, z$  dados por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e como

$$\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP}$$

Escrevendo os vetores acima no sistema de coordenadas  $\Sigma_2$ , supondo que  $\overrightarrow{OO'} : (o_1, o_2, o_3)_{\Sigma_2}$  teremos:

$$\overrightarrow{OO'}_{\Sigma_2} + \overrightarrow{O'P}_{\Sigma_2} = \overrightarrow{OP}_{\Sigma_2}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Se  $\overrightarrow{OO'} : (s_1, s_2, s_3)_{\Sigma_1}$  então teremos que

$$(o_1, o_2, o_3)_{\Sigma_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

e assim

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - s_1 \\ x_2 - s_2 \\ x_3 - s_3 \end{pmatrix}$$

**Exemplo 11.3.** Qual é a mudança de coordenadas do sistema  $\Sigma_1 = (O, e_1, e_2, e_3)$  para o sistema  $\Sigma_2 = (O', f_1, f_2, f_3)$  na qual  $O' : (1, 2, 1)_{\Sigma_1}$  e  $f_1 = e_1, f_2 = e_3$  e  $f_3 = e_1 + 2e_2 - e_3$ ?

◁

**Solução:** Neste caso  $M_{F,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  e logo

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix}$$

Então o ponto de coordenada  $P = (2, 1, -3)_{\Sigma_1}$  terá coordenadas no sistema  $\Sigma_2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 1 - 2 \\ 3 - 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

logo  $P : (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2})_{\Sigma_2}$ .

□

**Exemplo 11.4.** *Dado um retângulo  $ABCD$  conforme a figura abaixo. E o sistema de coordenadas  $\Sigma_1 = (A, e_1, e_2)$  e  $\Sigma_2 = (B, e_3, \frac{1}{2}e_1)$ . Calcule a mudança de base do sistema  $\Sigma_1$  para  $\Sigma_2$ .*

*Começamos escrevendo as coordenadas da nova origem  $B$ , no sistema  $\Sigma_1$  Como  $AB$*

◁

**Exemplo 11.5.** 1  $\Sigma_1$  para  $\Sigma_2$

2  $\Sigma_3$  para  $\Sigma_4$

3  $\Sigma_2$  para  $\Sigma_1$

◁

## Exercícios

**Ex. 11.1** — Dados dois sistemas de coordenadas  $\Sigma_1 = (O, e_1, e_2, e_3)$  e  $\Sigma_2 = (O', f_1, f_2, f_3)$ .

Escreva a equação paramétrica da reta  $r : X = (0, 2, 0) + s(1, 2, 3)$  dada no sistema  $\Sigma_1$  no sistema  $\Sigma_2$  sendo  $\Sigma_2$ :

1  $f_1 = e_1, f_2 = -e_3 + e_1, f_3 = e_2$  e  $O' = (1, 2, 3)_{\Sigma_1}$

2  $f_1 = -e_1, f_2 = -e_3 - e_1, f_3 = e_2 + e_3$  e  $O' = (1, 0, 1)_{\Sigma_1}$

3  $f_1 = e_2, f_2 = -e_3 + e_1, f_3 = e_1$  e  $O' = (1, 0, 0)_{\Sigma_1}$

**Ex. 11.2** — Dado o plano  $(2x - 4y + z = 4)_{\Sigma_1}$ . Escreva a equação paramétrica desse plano nos sistemas  $\Sigma_2$  do exercício acima.

**Ex. 11.3** — Dado um plano  $\pi : X = P_0 + vt + ws$

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} s$$

num sistema  $\Sigma_1$ , escolha um novo sistema de coordenadas de modo que nesse sistema o plano tenha equações paramétricas

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s$$

**Ex. 11.4** — São dados três pontos  $A = (1, 2, 1)$ ,  $B = (3, 4, 0)$  e  $C = (2, 3, 4)$ . Ache uma mudança de coordenadas de modo que esses três pontos fiquem no plano  $z = 0$ .

**Ex. 11.5 —** Faça uma translação de modo que o plano  $ax + ay + az + a^2 = 0$  passe pela origem.

## Notação de Somatório

A notação de Somatório é um modo sucinto de escrever somas tais como:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

Observe que na soma acima o termo típico a ser somado é da forma  $k^2$  e estamos somando esses termos de 1 até  $n$ . Um modo sucinto e muito útil de escrever essa soma é utilizando a notação de somatório:

$$\sum_{k=1}^n k^2$$

A expressão anterior deve ser lida como “soma de  $k^2$  com  $k$  variando de 1 até  $n$ .”

E de modo mais geral a soma dos números reais  $a_1, \cdots, a_n$  pode ser escrita usando a notação de somatório como

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n$$

Claramente, não é necessário que a soma comece do 1. Assim por exemplo, podemos escrever:

$$\sum_{s=0}^4 (2s + 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

$$\sum_{j=2}^5 j^j = 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5$$

De modo análogo ao fatorial, podemos definir o somatório recursivamente como

**Definição A.1.** *Dado  $a_k$  uma sequência de números reais. Definimos o somatório de  $a_k$  de 1 até  $n$  como sendo a função  $\sum_{k=1}^n a_k : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\boxed{1} \quad \sum_{k=1}^1 a_k = a_1$$

$$\boxed{2} \quad \sum_{k=1}^n a_k = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \text{ para todo } n \text{ maior que } 1.$$

Assim, por exemplo pelas definições acima temos que:

$$\sum_{k=1}^2 a_k = a_2 + \sum_{k=1}^1 a_k = a_2 + a_1$$

$$\sum_{k=1}^3 a_k = a_3 + \sum_{k=1}^2 a_k = a_3 + (a_2 + a_1)$$

$$\sum_{k=1}^4 a_k = a_4 + \sum_{k=1}^3 a_k = a_4 + (a_3 + a_2 + a_1)$$

## Exercícios

**Ex. A.1** — Ache o valor das seguintes somas:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^5 k$$

**b)**  $\sum_{k=2}^5 2^k$

**c)**  $\sum_{k=0}^5 (2k + 1)$

**d)**  $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{3k+2}$

## Funções Trigonômétricas

Começaremos com uma definição provisória, porém muito útil. Para um ângulo agudo as funções trigonométricas são definidas como:

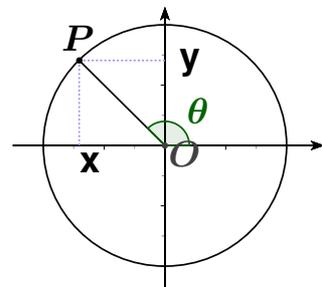


$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cosec} &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} \\ \operatorname{sec} \theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} \\ \operatorname{cotg} \theta &= \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}\end{aligned}$$

As definições acima não se aplicam para ângulos obtusos e negativos, porém podemos generalizar as funções trigonométricas para um ângulo  $\theta$  qualquer através do círculo trigonométrico. O círculo trigonométrico é um círculo de raio unitário centrado na origem de um sistema de coordenadas cartesianas.

Para cada ângulo  $\theta$ , existe um único ponto  $P$  pertencente ao círculo, tal que o segmento  $\overline{OP}$  faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ .



O seno é definido como a projeção do segmento  $\overline{OP}$  sobre o eixo  $y$ . O cosseno é definido como a projeção do segmento  $\overline{OP}$  com o eixo  $x$ . Isto é:

$$\text{sen } \theta = y \quad \text{cos } \theta = x$$

As outras funções podem ser definidas conforme as relações a seguir:

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \quad \text{sec } \theta = \frac{1}{\text{cos } \theta}$$

$$\text{csc } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} \quad \text{cot } \theta = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$$

# 1 Identidades Trigonométricas

Lembrando que a equação da circunferência unitária é  $x^2 + y^2 = 1$  e observando que para todo número real  $x$  o ponto de coordenadas  $(\text{cos } x, \text{sen } x)$  está na circunferência unitária, reobtemos a relação fundamental

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1 \tag{B.1}$$

Dividindo a equação **B.1** por  $\text{cos}^2 x$  temos:

$$\text{tg}^2 x + 1 = \text{sec}^2 x \tag{B.2}$$

De modo análogo, dividindo a equação **B.1** por  $\text{sen}^2 x$  temos:

$$1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x \tag{B.3}$$

Também temos as fórmulas para adição:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \quad (\text{B.4})$$

$$\operatorname{cos}(x + y) = \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \quad (\text{B.5})$$

Substituindo  $y$  por  $-y$  nas equações anteriores

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \operatorname{cos} y - \operatorname{cos} x \operatorname{sen} y \quad \operatorname{cos}(x - y) = \operatorname{cos} x \operatorname{cos} y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \quad (\text{B.6})$$

Dividindo as expressões para  $\operatorname{sen}(x + y)$  pelas expressões para  $\operatorname{cos}(x + y)$  temos:

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \quad (\text{B.7})$$

Colocando  $y = x$  nas equações B.4 e B.5 temos:

$$\operatorname{cos} 2x = 2 \operatorname{cos}^2 x - 1 \quad (\text{B.8})$$

$$\operatorname{cos} 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x \quad (\text{B.9})$$

Isolando  $\operatorname{cos}^2 x$  e  $\operatorname{sen}^2 x$  nas equações anteriores obtemos:

$$\operatorname{cos}^2 x = \frac{1 + \operatorname{cos} 2x}{2} \quad (\text{B.10})$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \operatorname{cos} 2x}{2} \quad (\text{B.11})$$

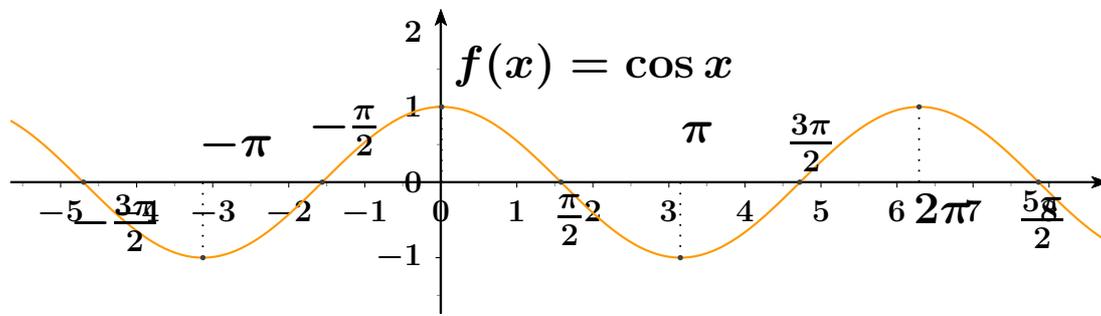
## 2 Gráficos das Funções Trigonométricas

### Gráfico das Funções Seno e Cosseno

Começamos observando que ambas as funções seno e cosseno são limitadas:

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \quad -1 \leq \operatorname{cos} x \leq 1 \quad (\text{B.12})$$



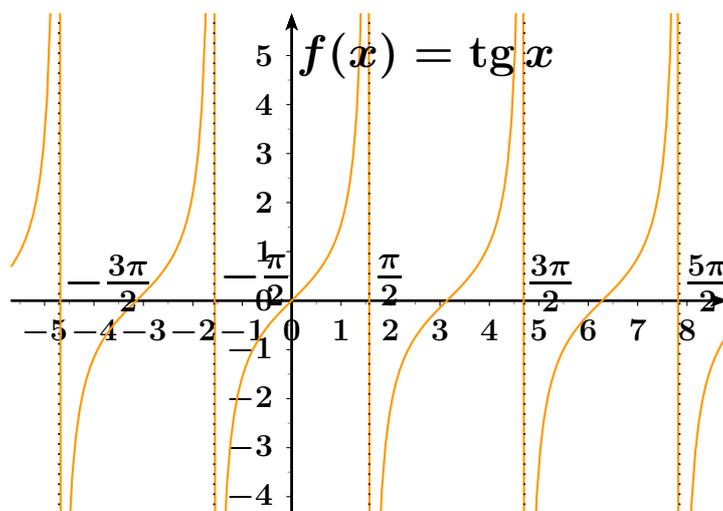


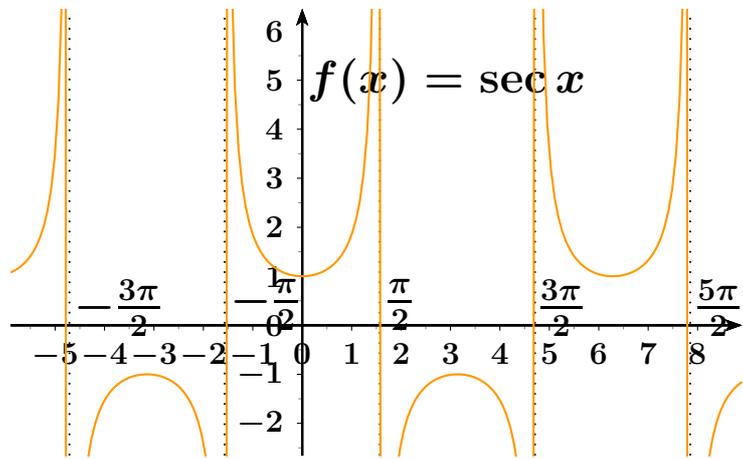
## Gráfico das funções tangente e secante

As funções tangente e secante estão definidas no domínio  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . A função secante tem a mesma periodicidade da função cosseno, mas a tangente tem período  $\pi$ , uma vez que

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\operatorname{cos}(x + \pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\operatorname{cos} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \operatorname{tg} x$$

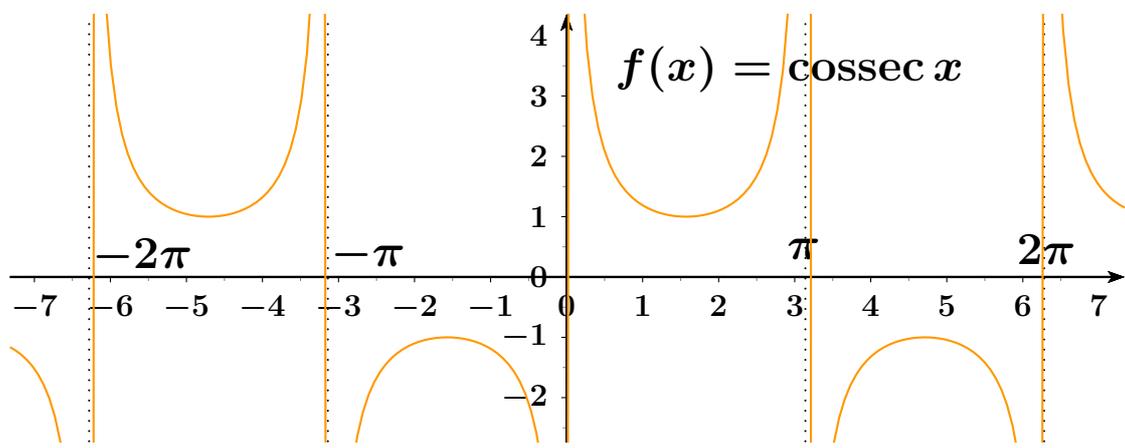
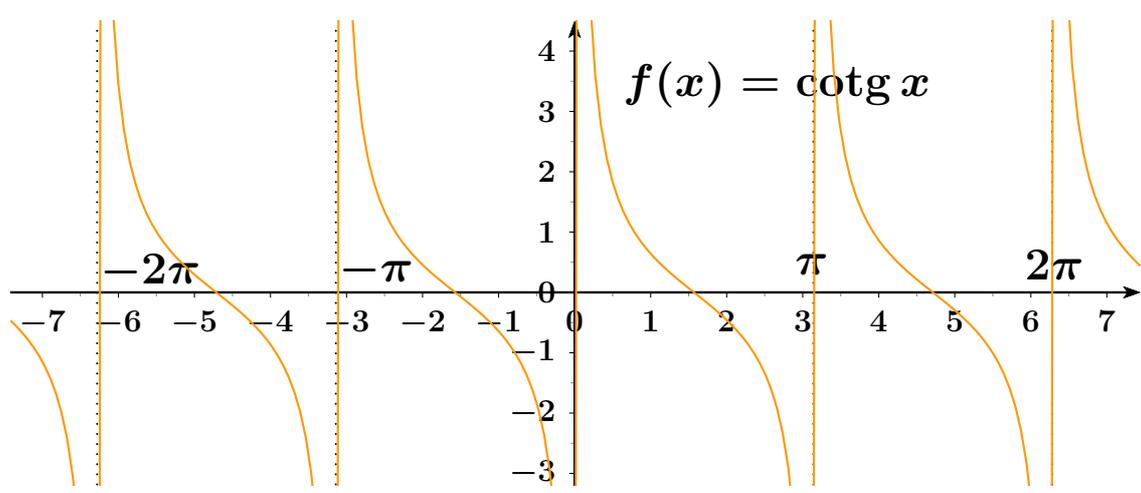
A função secante, assim como a função cosseno, é par. Já a função tangente, sendo quociente de uma função ímpar e uma par, é uma função ímpar. Os gráficos das funções tangente e secante estão representados abaixo:





## Gráfico das funções cotangente e cossecante

As funções cotangente e cossecante estão definidas no domínio  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . A função cossecante tem a mesma periodicidade da função seno, mas a cotangente tem período  $\pi$



### 3 Funções trigonométricas inversas

As funções trigonométricas definidas acima não são bijetoras em seus domínios. Entretanto, é possível falar em suas inversas, desde que tomemos domínios restritos. Apresentamos abaixo, sem maiores detalhes, as funções trigonométricas restritas a domínios nos quais são bijetoras e as respectivas funções inversas. Acompanham os respectivos gráficos.

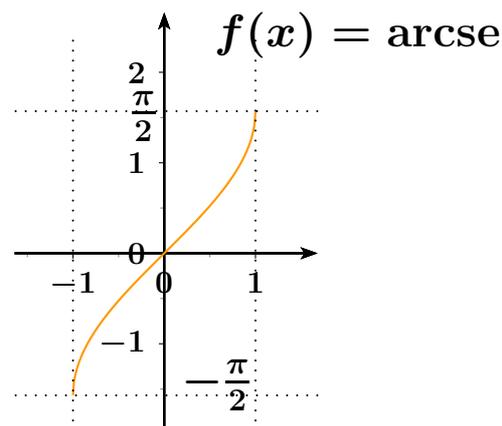
#### Função arco seno

A função  $\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  tem por inversa a função

$$\text{arcsen} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

definida como:

$$\text{arcsen } y = x \Leftrightarrow \text{sen } x = y$$



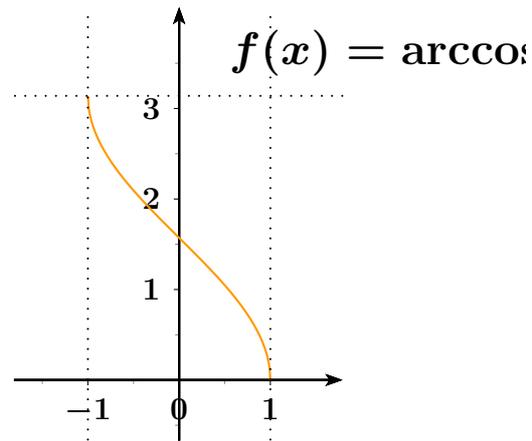
#### Função arco cosseno

A função  $\text{cos} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  tem por inversa a função

$$\text{arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

definida como:

$$\arccos y = x \Leftrightarrow \cos x = y$$



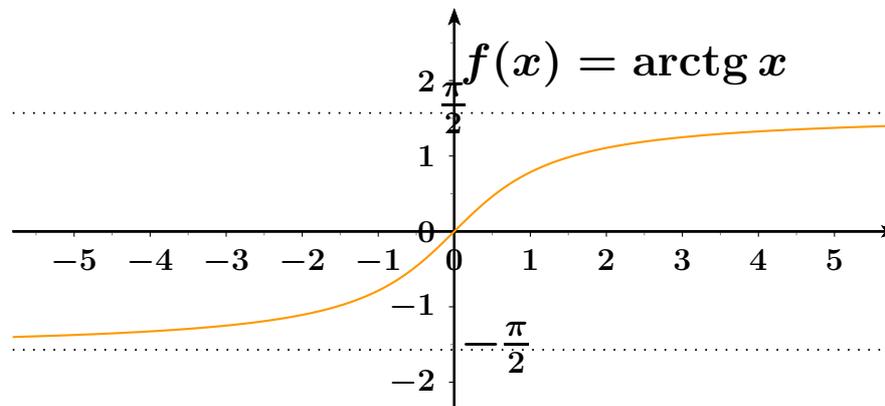
## Função arco tangente

A função  $\text{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  tem por inversa a função

$$\text{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

definida como:

$$\text{arctg } y = x \Leftrightarrow \text{tg } x = y$$



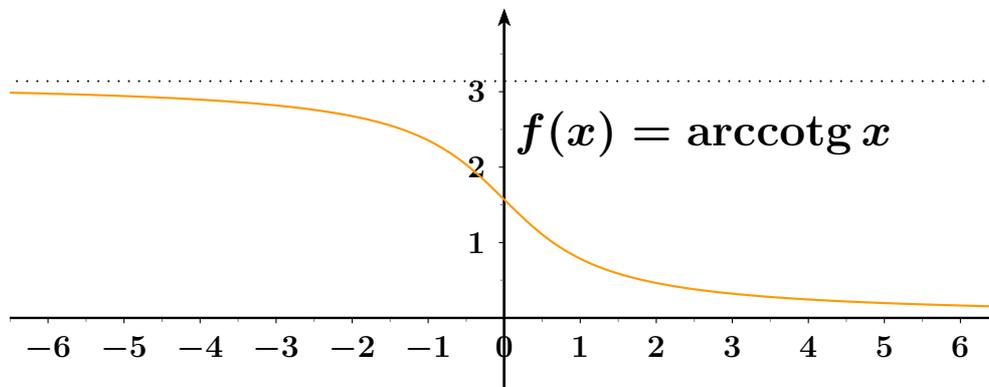
## Função arco cotangente

A função  $\text{cotg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  tem por inversa a função

$$\text{arccotg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

definida como:

$$\text{arccotg } y = x \Leftrightarrow \text{cotg } x = y$$



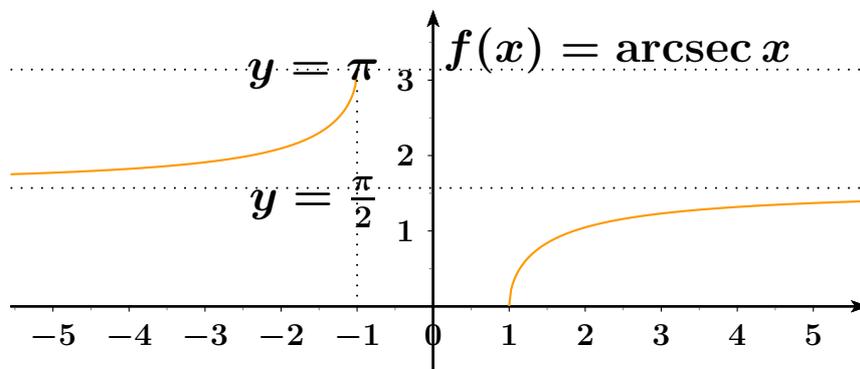
## Função arco secante

A função  $\sec : [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$  tem por inversa a função

$$\operatorname{arcsec} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$$

definida como:

$$\operatorname{arcsec} y = x \Leftrightarrow \sec x = y$$



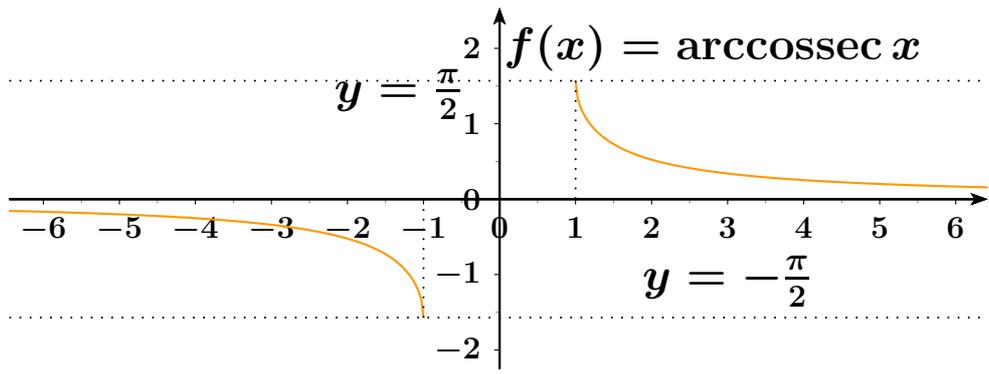
## Função arco cossecante

A função  $\operatorname{cossec} : [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$  tem por inversa a função

$$\operatorname{arccossec} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$$

definida como:

$$\operatorname{arccossec} y = x \Leftrightarrow \operatorname{cossec} x = y$$



# Matrizes e Sistemas Lineares.

## 1 Matrizes

Uma matriz real  $m \times n$  é um conjunto ordenado de números reais dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas. Os elementos de uma matriz serão indicados por dois índices dos quais o primeiro indica a posição na linha e o segundo na coluna. Desta forma o elemento  $a_{ij}$  refere-se ao elemento que está na  $i$ -ésima linha e na  $j$ -ésima coluna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Uma matriz é dita quadrada se o número de entradas é igual ao número de colunas. Uma matriz  $1 \times n$  é dito matriz linha e uma matriz  $m \times 1$  é dita matriz coluna. A matriz nula  $n \times m$  é a matriz cujas todas as coordenadas são 0. A matriz identidade  $n \times n$  é a matriz cujos termos da diagonal, isto é os termos  $a_{ij}$  com  $i = j$ , são iguais a 1 e os termos fora da diagonal são zeros.

## Operações com Matrizes

Podemos definir a soma e a multiplicação de matrizes por escalares coordenada a coordenada.

**Definição C.1.** Dadas duas matrizes  $n \times m$   $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  e  $c$  um escalar, definimos as matrizes  $A + B$  e  $cA$  como:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \quad cA := (ca_{ij})$$

**Exemplo C.2.** Se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

então:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

◁

**Definição C.3.** Dado  $A$  uma matriz  $m \times p$  e  $B$  uma matriz  $p \times n$ . O produto de  $A$  por  $B$  denotado  $AB$  é definido como a matriz  $C = (c_{ij})$  cuja entrada  $ij$  é definida como:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$$

É fundamental observar que o produto  $AB$  só está definido se o número de colunas de  $A$  igual ao número de linhas de  $B$ .

**Exemplo C.4. Se**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

**então**

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$$

◁

## 2 Determinantes

Recordaremos, sem apresentar as demonstrações, algumas propriedades dos determinantes.

Dada uma matriz  $A$  o menor dessa matriz com respeito do elemento  $a_{ij}$  é a matriz que se obtém ao remover da matriz  $A$  a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna. Denotaremos tal menor por  $A_{ij}$ .

**Exemplo C.5. O menor de uma matriz  $3 \times 3$  em relação ao elemento  $a_{23}$  é:**

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \square \\ \square & \square & \square \\ a_{31} & a_{32} & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

◁

O determinante de uma matriz quadrada é uma função que associa a cada matriz quadrada um número real, determinado pelo seguinte procedimento indutivo:

- 1** O determinante de uma matriz  $1 \times 1$  é igual ao valor da entrada dessa matriz, i.e.,

$$|a| = a$$

- 2** O determinante de uma matriz  $n \times n$  pode ser calculado somando ao longo de uma linha ou coluna o produto de um elemento  $a_{ij}$  por  $(-1)^{i+j}$  vezes o determinante do menor em relação ao elemento  $a_{ij}$ , i.e.,

Assim, escolhendo uma linha, ou seja fixando um  $i$  temos:

$$|A| = \sum_{j=1}^n -(-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

De modo análogo, escolhendo uma coluna, ou seja fixando um  $j$  temos:

$$|A| = \sum_{i=1}^n -(-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

O determinante não depende da escolha da linha ou coluna na expansão anterior.

Utilizando o procedimento anterior para uma matriz  $2 \times 2$  e expandindo em relação a primeira linha temos:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a |d| - b |c| = ad - bc$$

Utilizando o procedimento anterior para uma matriz  $3 \times 3$  e expandindo em relação a primeira linha temos:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

O sinal  $(-1)^{i+j}$  da definição anterior pode ser facilmente calculado, notando que esse fator troca de sinal para cada termo adjacente da matriz, conforme o padrão abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

**Notação:** Dado uma matriz quadrada de ordem  $n$  e de entradas  $a_{ij}$ ,  $A = (a_{ij})$ , denotaremos suas colunas por  $A_1, \dots, A_n$ . Logo:

$$A_i = (a_{1i}, \dots, a_{ni})$$

e assim podemos reescrever a matriz  $A$  como  $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$

Usaremos também a seguinte notação para representar o determinante de uma matriz quadrada:

$$|a \quad b \quad c \quad \dots| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Assim por exemplo:

$$|a \quad b| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad |a \quad b \quad c| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

**Teorema C.6.** *Se todos os elementos de uma coluna (ou linha) forem multiplicados por  $\lambda$ , então o determinante fica multiplicado por  $\lambda$ :*

$$|A_1 \quad A_2 \cdots \lambda A_i \cdots A_n| = \lambda |A_1 \quad A_2 \cdots A_i \cdots A_n|$$

**Teorema C.7.** *O valor do determinante é inalterado se transpormos a matriz.*

*Por exemplo:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

**Teorema C.8.** *O valor do determinante troca de sinal se duas colunas (ou linha) são intercambiadas.*

$$|A_1 \ A_2 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n| = - |A_1 \ A_2 \cdots A_j \cdots A_i \cdots A_n|$$

**Teorema C.9.** *Se duas linhas ou colunas de uma matriz são idênticas então o determinante dessa matriz é nulo.*

**Teorema C.10.** *O valor do determinante permanece inalterado se adicionarmos um múltiplo de uma coluna (linha) a outra coluna (linha).*

$$|A_1 \ A_2 \cdots A_i \cdots A_j \cdots A_n| = |A_1 \ A_2 \cdots A_i \cdots A_j + \lambda A_i \cdots A_n|$$

## Matriz Inversa

Dada uma matriz  $A$  o cofator do elemento  $a_{ij}$  é  $c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ . A matriz formada pelos cofatores é denominada

matriz dos cofatores de  $A$ , e denotada por  $\text{cof } A$

$$\text{cof}(A) = (c_{ij}) = ((-1)^{i+j} |A_{ij}|)$$

A transposta da matriz dos cofatores é denominada matriz adjunta de  $A$  e é denotada por  $\text{adj}(A)$ .

Uma matriz quadrada  $A$  é dita invertível inversa de uma matriz se existir uma matriz  $B$  tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

**Teorema C.11.** *Dada uma matriz  $A$ , essa matriz é invertível se e somente se  $|A| \neq 0$  e nesse caso a inversa de  $A$ , denotada  $A^{-1}$  é dada por:*

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$$

**Exemplo C.12.** *Dado*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Calcule a matriz inversa**



**Solução:** Vamos começar calculando a matriz de cofatores:

O cofator em relação ao coeficiente  $a_{11}$  é:

$$1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

O cofator em relação ao coeficiente  $a_{12}$  é:

$$-1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

Calculando os cofatores como acima, temos que a matriz de cofatores é dada por:

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

E a matriz adjunta é:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

E assim como  $\det A = 3$ , temos que a matriz inversa é:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det A} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

□

### 3 Teorema de Cramer

Dado um sistema linear de  $n$  equações e  $n$  incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} = k_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn} = k_n \end{cases}$$

podemos escrever esse sistema como  $AX = k$  onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

A matriz  $A$  é denominada matriz de coeficientes e  $k$  a matriz de constantes.

**Teorema C.13.** *Dado um sistema linear de  $n$  equações e  $n$  incógnitas*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + \cdots = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \cdots = k_2 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \cdots = k_n \end{cases}$$

*com  $|A| \neq 0$ . Então as soluções desse sistema são:*

$$x_1 = \frac{|k \ A_2 \ A_3 \ \cdots \ A_n|}{|A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n|}, \quad x_2 = \frac{|A_1 \ k \ A_3 \ \cdots \ A_n|}{|A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n|}, \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_1 \ A_2 \ \cdots \ k|}{|A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n|}$$

**Demonstração.** Escrevendo o sistema linear como  $AX = k$ . Como  $\det A \neq 0$ , a matriz  $A$  é invertível, e assim multiplicando ambos os lados do sistema por  $A^{-1}$  temos:

$$X = A^{-1}k.$$

Usando a caracterização da matriz inversa como a transposta da matriz de cofatores dividido pelo determinante, temos que

esse sistema pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Dessa forma temos que

$$x_1 = k_1 c_{11} + \cdots + k_n c_{n1}$$

Se expandirmos o determinante  $|k \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_n|$  em relação a primeira coluna temos:

$$\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k_1 c_{11} + \cdots + k_n c_{n1}$$

e assim temos que:

$$x_1 = \frac{|k \ A_2 \ A_3 \ \cdots \ A_n|}{|A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n|}$$

De modo análogo temos que:

$$x_i = \frac{|A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n|}{|A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_n|}$$

**Exemplo C.14. Resolva o sistema linear:**

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 1 \\ -x + 2y - 2z = 2 \\ -3x + y - 7z = -1 \end{cases}$$



Pelo teorema de Cramer, como

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

temos que as soluções são

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -7 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -7 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

## 4 Método de Eliminação de Gauss

O método de eliminação de Gauss para sistemas lineares baseia-se na aplicação de três operações básicas nas equações de um sistema linear:

- Trocar duas equações;
- Multiplicar todos os termos de uma equação por um escalar não nulo;

- Adicionar a uma equação o múltiplo da outra.

Ao aplicarmos as operações acima a um sistema linear obtemos um novo sistema tendo as mesmas soluções que o anterior. Dois sistemas que possuem as mesmas soluções serão ditos equivalentes. Ao utilizar as aplicações anteriores de modo sistemático podemos chegar a um sistema equivalente mais simples e cuja solução é evidente.

Ilustraremos a utilização dessa técnica em alguns exemplos

**Exemplo C.15.** *Um sistema com solução única. Considere o sistema:*

$$\begin{cases} 2x + 8y + 6z = 30 \\ 2x - y = 3 \\ 4x + y + z = 12 \end{cases}$$

*Vamos determinar as soluções desse sistema, se existirem.*



**Solução:**

Começaremos representando esse sistema através de sua matriz aumentada:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 6 & 30 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 12 \end{array} \right)$$

Essa matriz é obtida adicionando a matriz de coeficientes uma coluna com a matriz de constantes.

No método de Gauss, o primeiro objetivo é colocar um 1 na entrada superior a esquerda da matriz. Para isso começamos

dividido a primeira linha por 2. Fazendo isso obtemos

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 15 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 12 \end{array} \right)$$

O próximo passo é fazer com que os outros coeficientes da primeira coluna sejam 0. Para isso multiplicamos a primeira linha por  $-2$  e adicionamos a segunda, e multiplicamos a primeira linha por  $-4$  e adicionamos na terceira. Feito isso obtemos:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & -9 & -6 & -27 \\ 0 & -15 & -11 & -48 \end{array} \right)$$

Agora repetiremos o procedimento na segunda coluna, ignorando a primeira linha. Para isso multiplicaremos a segunda linha por  $-1/9$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 3 \\ 0 & -15 & -11 & -48 \end{array} \right)$$

Multiplicando a segunda linha por 15 e adicionando a terceira, temos:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

E desta forma o sistema de equações correspondente é:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 15 \\ y + \frac{2}{3}z = 3 \\ -z = -3 \end{cases}$$

E logo  $z = 3$ . Substituindo na segunda equação temos  $y = 1$  e substituindo esses valores na primeira equação temos  $x + 4 + 9 = 15$  e assim  $x = 2$ .

□

**Exemplo C.16. Um sistema com múltiplas soluções** Considere o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 6y + 2z + 4w = 34 \\ 3x - 2y = -2 \\ 2x + 2y + z + 2w = 15 \end{cases}$$

**Vamos determinar as soluções desse sistema, se existirem.**

◁

**Solução:**

Neste caso a matriz aumentada é:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 2 & 4 & 34 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 15 \end{array} \right)$$

Dividindo a primeira linha por 2 temos:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 15 \end{array} \right)$$

Multiplicando a primeira linha por  $-3$  e somando na segunda e multiplicando a primeira linha por  $-2$  e somando na terceira temos:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & -11 & -3 & -6 & -53 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & -19 \end{array} \right)$$

Trocando a segunda linha com a terceira e dividindo posteriormente a segunda por  $-4$  temos:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{19}{4} \\ 0 & -11 & -3 & -6 & -53 \end{array} \right)$$

Multiplicando a segunda linha por  $11$  e adicionando a terceira temos:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{19}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{array} \right)$$

Finalmente multiplicando a terceira linha por  $-4$  temos:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{19}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

A última linha nos permite expressar  $z$  em função de  $w$ :  $z = 3 - 2w$ . Substituindo o valor de  $z$  na segunda linha temos que  $y = 4$  e finalmente substituindo esses valores na primeira linha temos que  $x = 2$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

□

**Exemplo C.17.** *Resolva o sistema linear por escalonamento:*

$$\begin{cases} 1x + 4y = 12 \\ 2x - y = 3 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$$

◁

**Solução:**

**Neste caso a matriz aumentada do sistema é:**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 12 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 10 \end{array} \right)$$

**que pode ser reduzida à:**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array} \right)$$

**Esse sistema não possui soluções, pois a última linha é impossível de ser satisfeita  $0 = -\frac{1}{3}$**

□

## Exercícios

**Ex. C.1 — Prove que o sistema**

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 3t = a \\ 2x - 5y - 3z + 12t = b \\ 7x + y + 8z + 5t = c \end{cases}$$

**admite solução se, e somente se,  $37a + 13b = 9c$ . Ache a solução geral do sistema quando  $a = 2$  e  $b = 4$ .**

**Ex. C.2 — Resolva os seguintes sistemas por escalonamento:**

a)  $\begin{cases} x + 5y = 13 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + z = -10 \\ -2x - y + z = 1 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + y + 3z + t = 0 \\ x - y - z - 5t = 0 \end{cases}$

e)  $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \text{f)} \quad & \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \\
 \text{g)} \quad & \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Ex. C.3 —** Determine  $m$  de modo que o sistema linear seja indeterminado:

$$\begin{cases} mx + 3y = 12 \\ 2x + 1/2y = 5 \end{cases}$$

**Ex. C.4 —** Para o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} m^2x - y = 0 \\ 1x + ky = 0 \end{cases}$$

Determine o valor de  $m$  de modo que o sistema:

- a) tenha solução única (trivial)
- b) seja impossível

**Ex. C.5 —** Determinar  $a$  e  $b$  para que o sistema seja possível e determinado

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{array} \right.$$

**Ex. C.6 — Determinar o valor de  $k$  para que o sistema**

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$$

**tenha:**

- a) solução única
- b) nenhuma solução
- c) mais de uma solução

**Ex. C.7 — Resolva o sistema**

$$\begin{cases} \frac{2}{u} + \frac{3}{v} = 8 \\ \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = -1 \end{cases}$$

**Ex. C.8 — Discuta os seguintes sistemas:**

a) 
$$\begin{cases} x + z = 4 \\ y + z = 5 \\ ax + z = 4 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x + z + w = 0 \\ x + ky + k^2w = 1 \\ x + (k + 1)z + w = 1 \\ x + z + kw = 2 \end{cases}$$

**Ex. C.9 — Determine  $k$  para que o sistema admita solução.**

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

## Wolfram Alpha e Mathematica

Uma ferramenta interessante para o estudo matemática (geometria, cálculo, álgebra linear, ...) disponível gratuitamente na internet é o WolframAlpha (<http://www.wolframalpha.com/>) que aceita alguns dos comandos do software Wolfram Mathematica.

Para mais exemplos do que é possível fazer com o Wolfram Alpha veja <http://www.wolframalpha.com/examples/>

### 1 Plotagem

Existem alguns comandos do Mathematica que permitem a plotagem de gráficos e curvas no espaço e no plano, úteis, por exemplo, no estudo do conteúdo do Capítulo 9.

Descreverei aqui alguns comandos que podem ser útil ao estudante que quer ganhar uma intuição com os diversos sistemas de coordenadas e com a parametrização de curvas.

#### No Plano

$\text{Plot}[f[x], \{x, x_{min}, x_{max}\}]$

O comando acima plota o gráfico da função  $f(x)$  para  $x$  entre  $x_{min}$  e  $x_{max}$

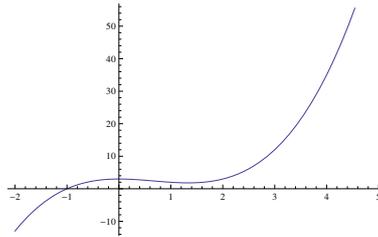


Fig. D.1: Gráfico de  $x^3 - 2x^2 + 3$ .

Exemplo D.1. *Plotar o gráfico de  $x^3 - 2x^2 + 3$  entre  $-2$  e  $5$ .*

**Solução:**

```
Plot[x^3 - 2x^2 + 3, {x, -2, 5}]
```

Exemplo D.2. *Plotar o gráfico de  $e^x$  entre  $-3$  e  $2$ .*

**Solução:**

```
Plot[Exp[x], {x, -3, 2}]
```

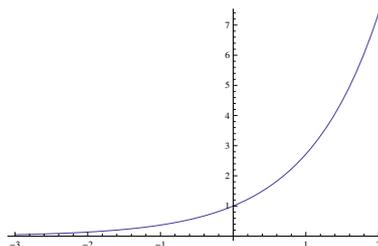
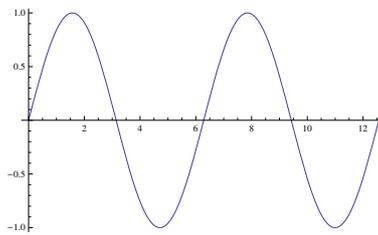
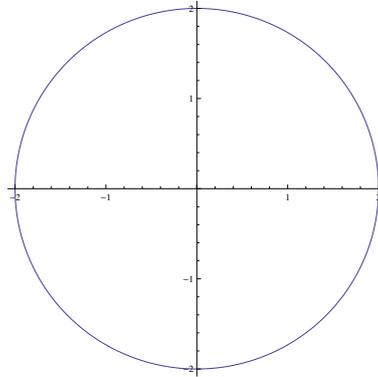


Fig. D.2: Gráfico de  $e^x$ .



**Fig. D.3: Gráfico de  $\sin x$ .**



**Fig. D.4: Círculo de raio 2.**

□

**Exemplo D.3. Plotar o gráfico de  $\sin x$  entre 0 e  $4\pi$ .**

◁

**Solução:**

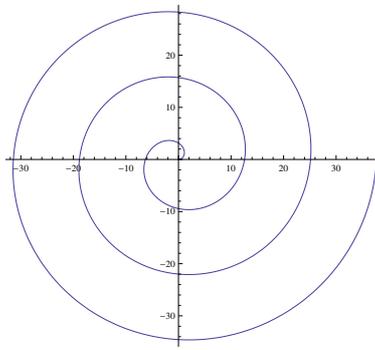
`Plot[Sin[x], {x, 0, 4Pi}]`

□

`PolarPlot[r[θ], {θ, θmin, θmax}`

O comando *PolarPlot* plota o gráfico da função  $r(\theta)$  para  $\theta$  entre  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$  usando coordenadas polares.

**Exemplo D.4. Plotar o gráfico da função constante  $r(\theta) = 2$  para  $\theta$  entre 0 e  $2\pi$  em coordenadas polares.**



**Fig. D.5: Espiral.**



**Solução:**

`PolarPlot[2, {t, 0, 2 Pi}]`



**Exemplo D.5. Plotar o gráfico de  $r(t) = 2t$  para  $t$  entre 0 e  $6\pi$  em coordenadas polares.**



**Solução:**

`PolarPlot[2 t, {t, 0, 6 Pi}]`



**Exemplo D.6. Plotar o gráfico de  $\text{sen}(2t)$  para  $t$  entre 0 e  $4\pi$  em coordenadas polares.**



**Solução:**

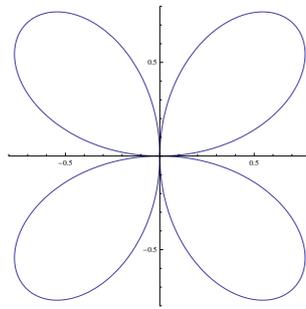


Fig. D.6: Trevo de quatro folhas.

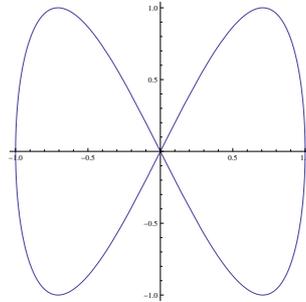


Fig. D.7: Lemniscata.

`PolarPlot[Sin[2 t], {t, 0, 2 Pi}]`

□

`ParametricPlot[{fx[t], fy[t]}, {t, tmin, tmax}]`

*ParametricPlot* pode ser usado para plotar curvas parametrizadas no plano euclidiano. No caso, o comando está plotando a curva  $X(t) = (f_x(t), f_y(t))$  para  $t$  variando entre  $t_{min}$  e  $t_{max}$ .

**Exemplo D.7.** *Plotar a curva  $X(t) = (\cos t, \sin(2t))$  para  $t$  entre 0 e  $2\pi$ .*

◁

**Solução:**

`ParametricPlot[{Cos[t], Sin[2t]}, {t, 0, 2 Pi}]`

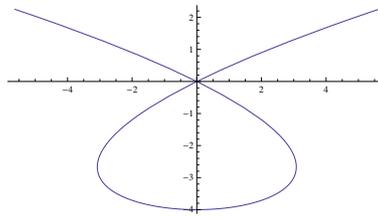


Fig. D.8: Curva com autointersecção.

□

**Exemplo D.8.** *Plotar a curva  $X(t) = (u^3 - 4u, u^2 - 4)$  para  $u$  entre  $-2,5$  e  $2,5$ .*

◁

**Solução:**

`ParametricPlot[u^3 - 4 u, u^2 - 4, u, -2.5, 2.5]`

□

**No Espaço**

`ParametricPlot3D[{fx[t], fy[t], fz[t]}, {t, tmin, tmax}`

A função descrita acima permite para plotar a curva parametrizada  $X(t) = (f_x(t), f_y(t), f_z(t))$  no espaço euclidiano para  $t$  variando entre  $t_{min}$  e  $t_{max}$ .

**Exemplo D.9.** *Plotar a helicóide  $X(t) = (\text{sen } t, \text{cos}(t), t/10)$  para  $t$  entre 0 e 20.*

◁

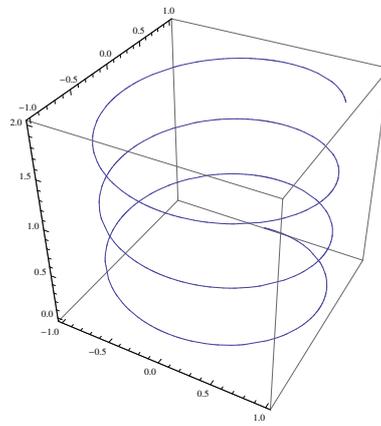
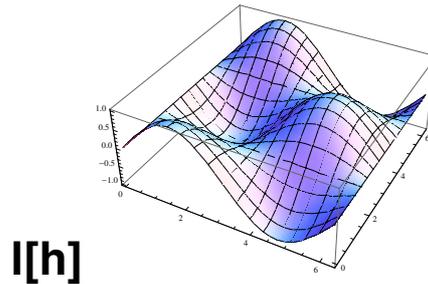


Fig. D.9: Helicóide.



I[h]

Fig. D.10: Plot3D.

**Solução:**

```
ParametricPlot3D[{Sin[t], Cos[t], t/10}, {t, 0, 20}]
```

□

Plot3D[f[x, y], {x, x<sub>min</sub>, x<sub>max</sub>}, {y, y<sub>min</sub>, y<sub>max</sub>}]

Tal comando plota o gráfico da função  $f(x, y)$  no espaço para  $x$  entre  $x_{min}$  e  $x_{max}$  e  $y$  entre  $y_{min}$  e  $y_{max}$ .

**Exemplo D.10.** Plotar o gráfico de  $f(x, y) = \sin x \cos x$  para  $x$  e  $y$  entre 0 e  $2\pi$ .

◁

**Solução:**

Plot3D[Sin[x] Cos[y], x, 0, 2 Pi, y, 0, 2 Pi]



## 2 Cálculo e Álgebra Linear

Limit[f[x], x -> a]

Calcula o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende à  $a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Exemplo D.11. Calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x)$ .



**Solução:**

Limit[1/x, x -> Infinity]

Resultado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) = 0$$



D[f[x], x]

Calcula a derivada de  $f(x)$  em relação à  $x$ :

$$\frac{d f}{d x}(x).$$

Exemplo D.12. Calcule  $\frac{d \cos x}{d x}(x)$ .

**Solução:**

**D[ $\cos[x]$ ,  $x$ ]**

**Resultado:**

$$\frac{d \cos x}{d x}(x) = -\operatorname{sen} x$$

□

**Integrate[ $f[x]$ ,  $x$ ]**

Encontra uma primitiva da função  $f(x)$  quando integramos em relação à  $x$ :

$$\int f(x) d x$$

**Exemplo D.13.** *Encontre uma primitiva de  $1/x$ .*

**Solução:**

**Integrate[ $1/x$ ,  $x$ ]**

**Resultado:**

$$\int 1/x d x = \log x$$

□

**Inverse[M]**

Calcula a inversa da matriz  $M$ .

**Exemplo D.14.** *Encontre a matriz inversa de:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



**Solução:**

**Inverse**[ { {1, 2, 0} , {3, 1, 1} , {2, 0, 1} } ]

**Resultado:**

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$



## **Respostas de Alguns Exercícios**

# Respostas de Alguns Exercícios

2.1 a.)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$

b.)  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$

c.) Como  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$  e  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$

d.)  $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}$

e.) Dica:  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF}$

f.)  $\overrightarrow{AC}$

g.) Dica:  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  e  $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$

2.2 a.)  $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DE}$  c.)  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE}$

e.)  $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC}$

f.)  $2\overrightarrow{DC}$  g.)  $\overrightarrow{DC}$

2.3 a.) 0 b.) 0

c.)  $-\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DC}$

d.)  $-\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DE}$

2.5  $3f_3$

2.6  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

2.8 Note que  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AB}$  e como:

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = 0$$

temos que

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CM} = -\left(\frac{1}{\lambda + 1} \overrightarrow{AC} + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \overrightarrow{BC}\right)$$

2.9 a.)

$$\overrightarrow{CD} = 2u - v$$

$$\overrightarrow{BD} = 5u - v$$

b.) Os lados  $AD$  e  $BC$  são paralelos.

$$2.12 \text{ a.) } x = \frac{4u}{7} + \frac{3v}{14}, y = \frac{u}{7} - \frac{v}{14} \quad \text{b.) } x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{4}$$

2.14 a.) Observe que  $(-\alpha)v + (\alpha v) = 0$  (Porque?)

Conclua que  $(-\alpha)v$  é o oposto de  $(\alpha v)$ .

2.18 Dica: suponha  $\lambda_1 \neq 0$  então  $u = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v$  e logo  $u$  e  $v$  são paralelos absurdo. Logo  $\lambda_1 = 0$

1.14

$$\frac{\|AQ\|}{\|DQ\|} = \frac{(n+m)m'}{(n'+m')n} \quad \frac{\|BQ\|}{\|CQ\|} = \frac{(n'+m')m}{(n+m)n'}$$

1.18 Seja  $b = \overrightarrow{AB}$  e  $c = \overrightarrow{AC}$ , então temos:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AE}}{2} \mathbf{e} \overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

e logo:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{4}$$

Também temos que:

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC}}{1 + \lambda}$$

Como  $F$ ,  $D$  e  $B$  são colineares então:

$$\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AD} + (1 - \alpha) \overrightarrow{AB}$$

e assim

$$\overrightarrow{AF} = \left(1 - \frac{3}{4}\alpha\right) \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\alpha \overrightarrow{AC}$$

E conseqüentemente  $1 - \frac{3}{4}\alpha = 0$  e  $\frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{1 + \lambda}$  e assim  $\lambda = 2$ .

Logo  $F$  divide o segmento  $\overline{AC}$  na razão  $1 : 2$ .

**1.19** Assuma que  $\overrightarrow{AB} = a$ ,  $\overrightarrow{AD} = b$  e  $\overrightarrow{AC} = a + b$ . Então  $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 a$ ,  $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 b$  e  $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3(a + b)$

Como os três pontos  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$  estão na mesma reta então:

$$\overrightarrow{B_1C_1} = k \overrightarrow{B_1D_1} \quad (\text{D.1})$$

Mas  $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AB_1} = (\lambda_3 - \lambda_1) a + \lambda_3 b$

e  $\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AB_1} = -\lambda_1 a + \lambda_2 b$

Substituindo as expressões acima em **2.6**, obtemos:

$$(\lambda_3 - \lambda_1) a + \lambda_3 b = -k\lambda_1 a + k\lambda_2 b$$

Isolando  $a, b$ :

$$a(\lambda_3 - \lambda_1 + k\lambda_1) + b(\lambda_3 - k\lambda_2) = 0$$

E logo  $\lambda_3 - \lambda_1 + k\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_3 - k\lambda_2 = 0$ .

Da segunda equação obtemos  $k = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$ . Substituindo  $k$  na primeira equação e dividindo a mesma por  $\lambda_1 \lambda_3$  segue

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}.$$

$$2.10 \quad M = A + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \overrightarrow{AB}$$

**3.4 Dica: Observe que**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$3.5 \quad \overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}b - \frac{2}{3}a$$

**3.9 A igualdade equivale a**

$$(m_1 - m_2)a + (n_1 - n_2)b = 0$$

**Como os vetores são L.I. temos que  $(m_1 - m_2) = 0$  e  $(n_1 - n_2) = 0$**

$$3.10 \quad \frac{1 + \lambda + \mu}{\lambda(1 + \mu)}$$

**3.6 Dado que  $a + b + c = 0$ , calculando o produto de ambos os lados da equação sucessivamente com  $a, b$  e  $c$  temos:**

$$a \cdot a + a \cdot b + a \cdot c = 0 \Rightarrow a \cdot b + a \cdot c = -9$$

$$b \cdot a + b \cdot b + b \cdot c = 0 \Rightarrow b \cdot a + b \cdot c = -25$$

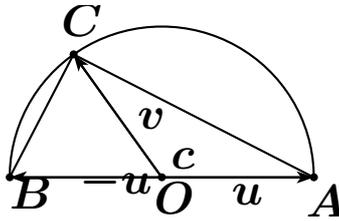
$$c \cdot a + c \cdot b + c \cdot c = 0 \Rightarrow c \cdot a + c \cdot b = -49$$

**Resolvendo o sistema anterior temos  $a \cdot b = \frac{15}{2}$  e assim  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  e logo  $\theta = \frac{\pi}{3}$**

**3.10 Denotando  $u = \overrightarrow{OA}$ ,  $-u = \overrightarrow{OB}$  e  $u = \overrightarrow{OC}$  temos  $\|u\| = \|-u\| = \|v\| = r$ .**

E assim:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (v + u)(v - u) = v \cdot v - u \cdot u = 0$$



4.3

$$a = -\frac{9}{14}u + \frac{12}{7}v - \frac{11}{14}u \times v$$

4.4  $a = (1, 1, 0)$

4.5  $v = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

4.14 [Dica: *Escreva o determinante em termos dos menores da primeira linha e compare com  $u \cdot (v \times w)$ . Isto também prova que  $u \cdot (v \times w) = v \cdot (w \times u)$ . Porque?*]

4.15 A área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \|u \times v\| = \frac{1}{2} \|u \times w\| = \frac{1}{2} \|v \times w\|$$

e assim temos que

$$\|u \times v\| = \|u \times w\| = \|v \times w\|$$

Mas  $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \text{sen } \alpha$ ,  $\|u \times w\| = \|u\|\|w\| \text{sen } \beta$  e  $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \text{sen } \gamma$

E logo:

$$\frac{\alpha}{\|w\|} = \frac{\beta}{\|v\|} = \frac{\gamma}{\|u\|}$$

1.2 [A resposta não é única] a.) Equações paramétricas: 
$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Equações na forma simétrica:  $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{3}$  b.) Equações paramétricas: 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

Equações na forma simétrica:  $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z+2}{3}$  c.) Equações paramétricas:

• Eixo x : 
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

• Eixo y : 
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

• Eixo z : 
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Equações na forma simétrica: *Não existem.* d.) 
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Equações na forma simétrica: *Não existem.*

e.) 
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Equações na forma simétrica: *Não existem.*

f.) Equações paramétricas: 
$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 8t \\ z = 4t \end{cases}$$

Equações na forma simétrica:  $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{8} = \frac{z}{4}$

g.) Equações paramétricas: 
$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 5t \\ z = -t \end{cases}$$

**Equações na forma simétrica:**  $\frac{x - 2}{-3} = \frac{y - 1}{5} = \frac{z}{-1}$

**1.3**  $r : 3x + 4y - 9 = 0$ . **Intersecções:**  $0, \frac{9}{4}$  e  $(3, 0)$ .

**1.4 a.)**Equações paramétricas:  $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 5 + 2t \end{cases}$

**Equações na forma canônica:**  $2x - 5y + 19 = 0$

**b.)**Equações paramétricas:  $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases}$

**Equações na forma canônica:**  $x + y - 1 = 0$

## Referências Bibliográficas

- [1] APOSTOL, T.; *Calculus Vol. I*, Wiley 1967.
- [2] BOULOS, P.; CAMARGO, I.; *Geometria Analítica - Um tratamento Vetorial*, Prentice Hall, 2006.
- [3] CAROLI, A.; CALLIOLI, C.; FEITOSA, M.; *Matrizes vetores geometria analítica*, Nobel 1984.
- [4] CHATTERJEE, D.; *Analytic Solid Geometry*, PHI Learning, 2004
- [5] CROWE, M.; *A history of vector analysis: the evolution of the idea of a vectorial system*, Dover 1994.
- [6] HILBERT, D.; *The Foundations Of Geometry*, Gradiva 2003.
- [7] LEHMANN, C.; *Geometria Analítica*, Editora Globo 1985;
- [8] MELLO, D, A.; WATANABE, R. G.; *Vetores e uma iniciação à Geometria Analítica*; Editora Livraria da Física.
- [9] LEITE, O.; *Geometria analítica espacial*, Edicoes Loyola, 1996
- [10] SANTOS, R.; *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*, Imprensa Universitária da UFMG, 2004.

**[11] WEXLER C.; *Analytic Geometry: A vector approach*,  
Addison-Wesley Publ., 1961.**

# Índice Remissivo

**amplitude focal**

**elipse, 15**

**centro**

**elipse, 13**

**corda**

**elipse, 14**

**coroa fundamental**

**elipse, 16**

**cônicas, 2**

**distância focal**

**elipse, 12**

**eixo focal**

**elipse, 13**

**eixo maior**

**elipse, 13**

**eixo menor**

**elipse, 14**

**eixo não focal**

**elipse, 14**

**elipse, 5**

**focos**

**elipse, 11**

**forma canônica**

**elipse, 10**

**hipérbole, 6**

**latus rectum, 15**

**parábola, 8**

**reta focal**

**elipse, 12**

**reta não focal**

**elipse, 13**

**retângulo fundamental**

**elipse, 15**

**segmento focal**

**elipse, 12**

**vértices**

**elipse, 12, 14**