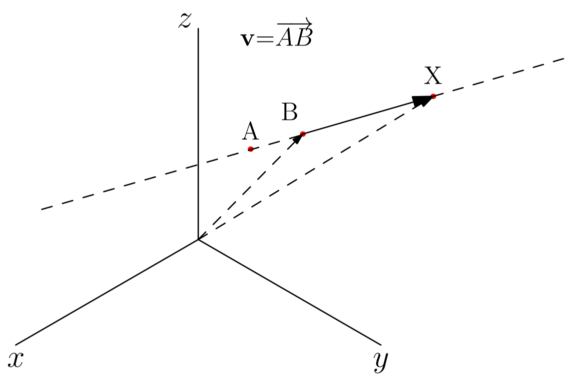
3 RETAS E PLANOS

Dando continuidade ao nosso estudo sobre lugares geométricos e suas equações, vamos nos concentrar agora no estudo de dois elementos geométricos fundamentais da geometria as retas e os planos.

Ressaltamos, que em todo este capítulo utilizaremos um sistema de coordenadas cartesiano $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, O)$.

3.1 EQUAÇÕES DA RETA



Um dos postulados da geometria Euclidiana nos diz que, dados dois pontos no espaço existe uma única reta contendo estes pontos. Isso nos leva ao seguinte problema dados dois pontos A e B, determinar a equação da reta r que passa por estes dois pontos.

Para isto, observe que dado um ponto X em r, o vetor $\overrightarrow{AX}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{AB}$, e portanto existe um escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB}$. Assim, temos que

$$X = A + \overrightarrow{AX} = A + t\overrightarrow{AB},$$

e considerando $A : (a, b, c)$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, vemos que um ponto $X : (x, y, z)$ pertence a reta r se e somente se $\overrightarrow{AX} = \mathbf{v}t$, ou ainda

$$r : X = A + \mathbf{v}t. \tag{3.1}$$

Expandindo obtemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} t, \tag{3.2}$$

ou de forma mais simplificada:

$$r : \begin{cases} x &= a + v_1 t \\ y &= b + v_2 t \\ z &= c + v_3 t \end{cases} \tag{3.3}$$

A equação 3.1 é conhecida como **equação vetorial da reta** r, e nestas condições o ponto A é chamado **ponto inicial** e o vetor $\mathbf{v}$ é dito **vetor diretor** da reta reta r. As equações em 3.3 são chamadas as **equações paramétricas da reta** r.

Heuristicamente, pensando no parâmetro t como tempo, podemos entender esta equação como a trajetória de um ponto que se move no espaço tendo o ponto A como o ponto inicial e o vetor $\mathbf{v}$ como a velocidade, e assim para cada valor de t obtemos um ponto no espaço.

Outra forma de representar a reta r pode ser obtida ao isolarmos o parâmetro t nas equações paramétricas. Assim, se em 3.3 tivermos $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$, podemos eliminar o parâmetro t e obter

$$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3},$$

chamadas de **equações da reta** r **na forma simétrica**.

É importante observar que a equação de uma reta, em qualquer uma de suas formas, não é única. De fato, as equações dependem fundamentalmente da escolha do ponto inicial e do vetor diretor, gerando assim uma infinidade de equações para representar um mesma reta. Para entender esta afirmativa, consideremos uma reta $r : X = A + \mathbf{v}t$. Escolhendo um ponto B em r, podemos trocar o ponto inicial por B e assim representar r por $r : X = B + \mathbf{v}t$. Do mesmo modo, trocando o vetor diretor $\mathbf{v}$ por outro vetor $\mathbf{v}'$ paralelo, obtemos que $X = A + \mathbf{v}'t$ é também uma equação vetorial para r (veja exercício **??**).

Exemplo 3.1 Encontre as equações da reta que passa pelos pontos $A : (0,1,1)$ e $B : (1,3,0)$.

Solução: Escolhendo $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} : (1,2,-1)$ como vetor diretor e A como ponto inicial obtemos a equação vetorial

$$r : X = A + \mathbf{v}t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t$$

As equações paramétricas ficam então $x = t, y = 1 + 2t, z = 1 - t$.

As equações simétricas para essa reta são obtidas isolando o parâmetro t nas equações anteriores, ou seja,

$$x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

$\square$

Exemplo 3.2 Dada a reta r de equação paramétricas $r : X = (1,3,2) + (1,1,2)t$.

1. Encontre três pontos pertencentes a essa reta.
2. Encontre um conjunto de equações vetoriais para essa reta na qual o ponto inicial seja distinto.
3. Encontre um conjunto de equações vetoriais para essa reta na qual o vetor diretor seja distinto

Solução:

1. Claramente o ponto $(1,3,2)$ pertence a essa reta. Para obter outros pontos desta reta bastam que escolhamos valores distintos para o parâmetro t. Assim, se $t = 1$ temos que $(1,3,2) + (1,1,2) = (2,4,4)$ pertence a reta. Tomando $t = -2$ temos que $(1,3,2) - 2(1,1,2) = (-1,1,-2)$ pertence a reta.
2. Substituindo o ponto inicial por outro ponto pertencente a reta obtemos equações com as propriedades exigidas. Escolhendo, por exemplo, o ponto $(-1,1,-2)$ obtemos a equação vetorial

$$r : X = (-1,1,-2) + (1,1,2)t.$$

3. Substituindo o vetor diretor por um de seus múltiplos não nulos obtemos equações com as propriedades exigidas. Se, por exemplo, multiplicarmos o vetor diretor por $\frac{1}{2}$ encontramos a equação vetorial

$$r : X = (-1,1,-2) + (\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)t.$$

$\square$

Exemplo 3.3 Verifique se os pontos $A : (4,1,5)$ e $B : (0,0,0)$ pertencem a reta $r : (1,1,2) +$

$(1,0,1)t$.

Solução: Para que o ponto A pertença a reta r é necessário que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(4,1,5) = (1,1,2) + (1,0,1)t$$

Ou seja, deve existir t tal que o sistema de equações

$$\begin{cases} 4 = 1 + t \\ 1 = 1 + 0t \\ 5 = 2 + t \end{cases}$$

tenha solução.

O sistema acima possui solução, $t = 3$, e logo o ponto A pertence à reta r.

De modo análogo, para que o ponto B pertença a reta r é necessário que exista $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(0,0,0) = (1,1,2) + (1,0,1)t,$$

ou seja, deve existir t tal que o sistema de equações

$$\begin{cases} 0 = 1 + t \\ 0 = 1 + 0t \\ 0 = 2 + t \end{cases}$$

tenha solução.

Como sistema acima não possui solução, o ponto B não pertence à reta r.

$\square$

Exemplo 3.4 Identifique o lugar geométrico dado pelas equações

$$\frac{2-3x}{7} = \frac{2y-2}{3} = \frac{5z-1}{2}$$

Solução: Dividindo os numeradores e os denominadores de cada fração pelo coeficiente das variáveis, obtemos

$$\frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{y-1}{\frac{3}{2}} = \frac{z - \frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}.$$

Esta são as equações na forma simétrica de uma reta. E portanto o lugar geométrico é uma reta passando pelo ponto $(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{5})$ com vetor diretor $(\frac{7}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{5})$. $\square$

Exemplo 3.5 Verifique se as retas $r : X = (1,1,1) + (1,0,1)t$ e $s : X = (0,4,3) + (-1,1,0)t$

se interceptam.

Solução: Para que um ponto P pertença simultaneamente as retas r e s, devem existir números reais t_1 e t_2 tais que

$$P = (1,1,1) + (1,0,1)t_1 \quad \text{e} \quad P = (0,4,3) + (-1,1,0)t_2.$$

De onde encontramos que

$$(1,1,1) + (1,0,1)t_1 = (0,4,3) + (-1,1,0)t_2$$

Resolvendo o sistema acima encontramos $t_1 = 2, t_2 = -3$. Como o sistema possui solução, concluímos que as retas r e s se interceptam.

Para determinar o ponto de intersecção substituímos $t \to t_1$ na equação $P = (1,1,1) + (1,0,1)t_1$ e obtemos

$$P : ((3,1,3)).$$

É importante observar que para determinarmos se as retas interceptam, usamos parâmetros distintos para cada reta. Isso é fundamental, pois o ponto P apesar de pertencer a ambas as retas, é descrito em cada conjunto de equações por um valor distinto de t. □

Exercícios

Ex. 1.1 — Dados $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ vetores não nulos paralelos, ou seja, $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}'$. Mostre que $r : X = A + \mathbf{v}t$ e $s : X = A + \mathbf{v}'t$ são equações vetoriais para a mesma reta, isto é mostre que se $P \in r$ ($P = A + \mathbf{v}t_0$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$) então $P \in s$ (existe $t_0' \in \mathbb{R}$ tal que $P = A + \mathbf{v}'t_0'$).

Ex. 1.2 — Determine as equações na forma paramétrica e na forma simétricas das seguintes retas:

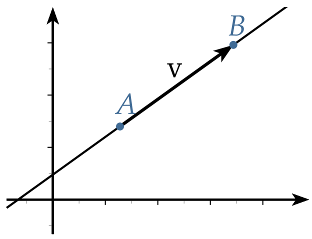
a) A reta que passa pelos pontos $A : (1,4,-2)$ e $B : (0,1,1)$
b) A reta que passa pelos pontos $A : (1,0,-2)$ e $B : (3,1,1)$
c) As retas que determinam os eixos x, y, z
d) A reta paralela ao eixo z que passa pelo ponto $(1,2,1)$
e) A reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(1,2,1)$
f) A reta paralela a reta $\dfrac{1-2x}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{2z+1}{4}$ que passa pelo ponto $(2,1,0)$

g) A reta paralela a reta

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 5t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

que passa pelo ponto $(2, 1, 0)$

3.1.1 Equações da reta no plano



No caso bidimensional, as equações que descrevem as linhas retas podem ser descritas de modo mais simplificado. Começamos observando que, de modo análogo ao caso tridimensional, escolhidos um ponto inicial A e um vetor diretor $\mathbf{v}$, esta reta pode ser descrita vetorialmente como:

$$r : X = A + \mathbf{v}t \tag{3.4}$$

Nesse caso a expressão em coordenadas fica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} t \tag{3.5}$$

Se $v_1, v_2 \neq 0$ podemos escrever a forma simétrica das equações da reta no plano

$$\frac{x - a}{v_1} = \frac{y - b}{v_2},$$

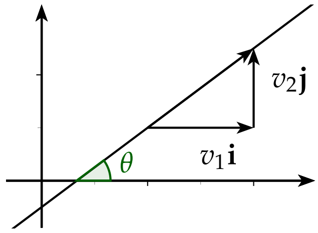
ou ainda,

$$y - b = \frac{v_2}{v_1}(x - a).$$

O número real $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ é denominado **coeficiente angular** da reta r, e admite uma interpretação geométrica muito simples: o coeficiente angular é a tangente do ângulo angulo entre a reta e o eixo x. Com essa definição é fácil ver que, para as retas não paralelas ao eixo y, podemos escolher o vetor diretor como $\mathbf{i} + m\mathbf{j}$, e assim obter **equação afim** ou **reduzida** da reta bidimensional

$$y = mx + n,$$

onde $n = b - ma$.



As retas paralelas aos eixos coordenados ($v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$) são especiais. Para as retas paralelas ao eixo y, ou seja, retas com vetor diretor $\mathbf{j}$, o coeficiente angular não está definido já que $m = \dfrac{v_2}{v_1}$. Para obter uma equação para este tipo de reta, basta observar que todos os pontos possuem a primeira coordenada (coordenada x) iguais. Ou seja, se a reta passa pelo ponto $A : (a, b)$ então todo ponto (x, y) em r é do tipo (a, y), e portanto sua equação será dada por $x = a$.

Do mesmo modo, se a reta é paralela ao eixo x e passa por um ponto $A : (a, b)$, então sua equação é dada por $y = b$.

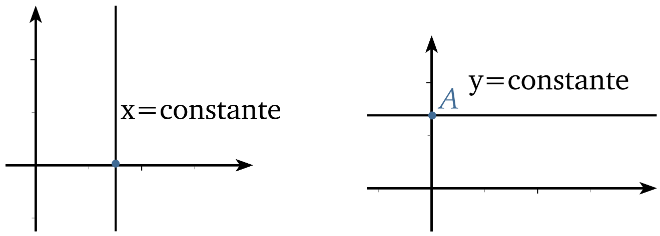


Figure 3.1: Retas paralelas aos eixos coordenados

Observação 3.6 *É fácil ver que a equação de toda reta no plano pode ser escrita na forma:*

$$ax + by + c = 0,$$

*com a, b, c constantes reais. Tal forma é conhecida como **forma canônica** ou **equação cartesiana** da reta no plano.*

A equação na forma canônica é única a menos de uma constante multiplicativa, isto é $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ representam uma mesma reta se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $a = \lambda a'$, $b = \lambda b'$ e $c = \lambda c'$ (Por quê?).

Exemplo 3.7 Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(1, 1)$ e que faz ângulo de 60^o com o eixo x.

Exemplo 3.8 Seja r a reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Mostre que o coeficiente angular da reta r é:

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Solução: O vetor diretor dessa reta é:

$$(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$

E consequentemente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. □

Exemplo 3.9 Mostre que a equação da reta passando pelos pontos $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$, pode ser escrita como:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Solução: Seja $P : (x, y)$ um ponto qualquer. O ponto P pertence a reta determinada pelos pontos A e B se e somente se A, B, P forem colineares, e o resultado segue do critério da proposição 2.28. □

Exercícios

Ex. 1.3 — Desenhe a reta que passa por $(-1, 3)$ e $(3, 0)$. Determine sua equação e onde ela intercepta os eixos.

Ex. 1.4 — Determine as equações paramétricas e na forma canônica das retas que passam pelos pontos A e B.

a) $A = (3, 5)$ e $B = (-2, 3)$
b) $A = (0, 1)$ e $B = (1, 0)$

Ex. 1.5 — Determine as equações paramétricas e na forma simétrica (se existirem) das retas que passam pelos pontos A e B.

a) $A = (3, 5, 1)$ e $B = (-2, 3, 2)$
b) $A = (0, 1, 0)$ e $B = (1, 0, 0)$
c) $A = (0, 1, 1)$ e $B = (0, 0, 0)$

d) $A = (3, 2, 1)$ e $B = (6, 1, 4)$

Ex. 1.6 — Escreva as equações do movimento do ponto $P : (x, y, z)$ que começa em $(3, -1, -5)$ e que se move retilineamente e uniformemente na direção do vetor $(-2, 6, 3)$ com velocidade $v = 14$.

Ex. 1.7 — Escreva as equações do movimento do ponto $P : (x, y, z)$ que se move retilineamente e uniformemente e percorreu a distância distância entre os pontos $(-7, 12, 5$ e $(9, -4, -3)$ no intervalo de tempo $t_1 = 1$ e $t_2 = 4$.

Ex. 1.8 — Duas partículas P_1 e P_2 se movem retilineamente e uniformemente. A primeira partícula inicia seu movimento em $A : (-5, 4, -5)$ e se move com velocidade $v = 14$ na direção do vetor $(3, -6, 3)$, a segunda partícula começa no ponto $B : (-5, 16, -6)$ e se move com velocidade $v = 13$ na direção oposta ao vetor $(-4, 12, -3)$.

a) Escreva as equações de movimento para cada partícula.

b) Mostre que suas trajetórias se interceptam e ache o ponto P de intersecção.

c) Determine o tempo que a primeira partícula gasta para ir de A até P.

d) Determine o tempo que a segunda partícula gasta para ir de B até P.

Ex. 1.9 — Dados $A = (1, 2, 3)$ e $B = (4, 5, 6)$ determine a equação paramétrica da reta que passa por A e B. Determine também os pontos onde essa reta corta os planos coordenados XY, XZ e YZ.

Ex. 1.10 — Os lados de um triângulo estão sobre as retas $y = 2x + 1$, $y = 3x - 2$ e $y = 1 - x$. Determine os vértices desse triângulo.

Ex. 1.11 — Dado $A : (1, 2)$. Determine o ponto B tal que o triângulo OAB seja equilátero.

Ex. 1.12 — Determine a equação das três medianas de um triângulo com vértices $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(0, c)$.

Ex. 1.13 — Os pontos $A = (2, 5)$ e $B = (14, 1)$ são simétricos em relação a uma reta. Determine a equação padrão e paramétrica dessa reta.

Ex. 1.14 — Chama -se baricentro de um triângulo o ponto de encontro das três medianas. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo ABC nos seguintes casos.

a) $A = (1,5)\,, B = (3,2)\; C = (2,4)$

b) $A = (x_1, y_1)\,, B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$

Ex. 1.15 — Determine as coordenadas do ponto de trissecção de uma mediana (o ponto que está a $\frac{2}{3}$ do caminho do vértice ao ponto médio do lado oposto) e prove que não somente ele satisfaz a equação das outras duas medianas, mas que também ele é o ponto de trissecção das outras duas medianas. Conclua que as três medianas são concorrentes, i.e, elas passam pelo mesmo ponto.
[**Dica:** *Para triângulo genérico as coordenadas podem ser escolhidas de modo que os vértices sejam* $(0,0)\,, (0,a)$ *e* (b,c)]

Ex. 1.16 — O ponto em que duas retas não paralelas se encontram deve satisfazer ambas equações. Determine o ponto de intersecção de $3x - 4y = 1$ e $4x + 6y = 14$.

Ex. 1.17 — Determine a inclinação, o ponto de intersecção com o eixo y e desenhe. Quando a inclinação ou o ponto de intersecção não existir, diga.

a) $3x - 4y = 6$

b) $2x + 3y = 6$

c) $7y + 9 = 0$

d) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

e) $y = mx + b$

f) $bx + ay = 0$

g) $4x^2 = 9$

h) $xy(2x - 3y + 4) = 0$

i) $x\cos(\alpha) + y\,\mathrm{sen}(\alpha) = h$ (indique h e α em sua figura).

j) $x = 3 + 2t, y = -1 - 3t$

Nos próximos exercícios ache a equação da reta e desenhe uma figura de cada.

Ex. 1.18 — A linha que passa por $(-5,7)$ perpendicular a $4x - 5y = 10$.

Ex. 1.19 — Duas retas por $(-2,3)$, uma paralela e outra perpendicular a $3x + 2y + 5 = 0$

Ex. 1.20 — A reta que passa por $(a, 0)$ perpendicular a $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Ex. 1.21 — No triângulos de vértice $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(0, c)$:

a) ache as equações das três alturas;
b) ache as equações das três medianas;
c) prove que as três alturas se encontram num ponto H chamado ortocentro do triângulo.
d) prove que as três medianas se encontram num ponto O', chamado circuncentro do triângulo.

Ex. 1.22 — Encontre duas linhas retas de inclinação $\frac{2}{3}$ que fazem com os eixos coordenados um triângulo de área $\frac{4}{3}$

Ex. 1.23 — Mostre que para quaisquer valores de s e t as retas $(2s + 3t)\, x + (3s - 2t)\, y = 5s + 4t$ passam pelo mesmo ponto. Determine esse ponto e mostre também que toda reta que passa por esse ponto é representada por uma equação da forma acima para uma escolha conveniente de s e t.

Ex. 1.24 — Determine a e b de modo que as equações $x = at + 1$ e $y = bt + 5$ sejam uma representação paramétrica da reta $y = 2x + 3$.

Ex. 1.25 — Identifique a linha cujas equações são $2x - 1 = 4y + 8 = 3z - 5$. Determine o vetor diretor e três pontos que pertençam a essa reta.

Ex. 1.26 — Faça o mesmo para a reta $2x = 3$ e $4y = 5$.

Ex. 1.27 — Determine a equação padrão da reta $3x - 2y + 5z = 6$, $2x + y - 3z = 0$. Escreva a equação da reta na forma paramétrica.

Ex. 1.28 — Encontre a equação da reta perpendicular ao plano que passa pelos pontos $(3, 4, 2)$, $(-1, 5, 3)$, $(2, 1, 4)$ e que passe pela origem.

Ex. 1.29 — Sejam $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, 1, 1)$. Em cada um dos casos a seguir ache um ponto C da reta PQ tal que a área do triângulo ABC seja $\frac{1}{2}$.

a) $A = (1, 2, 1), B = (1, 2, 3)$.

b) $A = (1, 3, 2), B = (2, 2, 2)$.

c) $A = (3, 0, 2), B = (2, 1, 2)$.

d) $A = (3, -2, 1), B = (0, 0, 1)$.

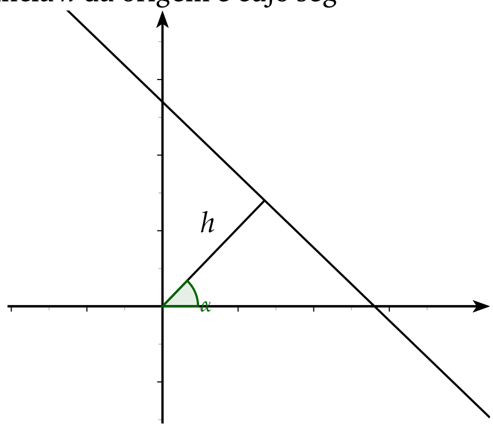
Ex. 1.30 — A reta que intercepta o eixo x no ponto $(a, 0)$ e o eixo y no ponto $(0, b)$ sendo ambos os pontos distintos da origem. Mostre que a equação dessa reta pode ser escrita como:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ex. 1.31 — a) Considere uma reta r contida no plano de equação $ax + by + c = 0$. Mostre que o vetor $\mathbf{n} = (a, b)$ é normal a todo vetor diretor de r.

b) Mostre que toda reta r contida no plano normal ao vetor $\mathbf{n} = (a, b)$ tem uma equação na forma $ax + by + c = 0$ para algum $c \in \mathbb{R}$.

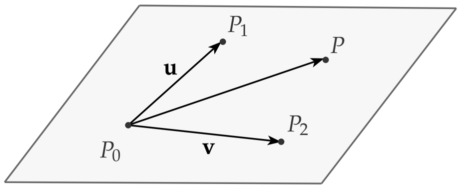
Ex. 1.32 — Determine a equação da reta que passa a uma distância h da origem e cujo segmento de tamanho h forma um ângulo α como o eixo x (veja **??**)



[**Dica:** *Determine os pontos onde a reta intercepta o eixo x e o eixo y em termos de h, α e use o resultado do item a.*]

3.2 EQUAÇÕES DO PLANO

3.2.1 Equações Paramétricas e Vetoriais do Plano



Passemos agora a um novo problema: determinar uma equação (ou conjunto de equações) que representem um dado plano no espaço euclidiano. Primeiro, lembremos que dados três pontos P_0, P_1 e P_2 não colineares existe um único plano π passando por esses pontos.

Seguindo então as mesmas ideias utilizadas no caso da reta, para determinar as equações de π utilizaremos um ponto inicial (por exemplo P_0) em conjunto com vetores $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1}$, determinados pelos pontos escolhidos. Tome agora um ponto P qualquer deste plano, e observe que o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo ao plano π, e portanto coplanar aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Como os pontos P_0, P_1 e P_2 são não colineares, concluímos que os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente independentes, e assim, pelo Teorema da Base, podemos escrever o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ como combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, isto é, existem escalares $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{u}s + \mathbf{v}t,$$

e portanto

$$P = P_0 + \mathbf{u}s + \mathbf{v}t. \tag{3.6}$$

Assim como no caso das retas, a equação (3.6) é chamada de **equação vetorial do plano**.

Escrevendo $P : (x, y, z)$, $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{u} : (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathbf{v} : (v_1, v_2, v_3)$ obtemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u_1 s + v_1 t \\ y &= y_0 + u_2 s + v_2 t \\ z &= z_0 + u_3 s + v_3 t, \end{aligned}$$

encontrando assim **equações paramétricas do plano**. Vale comentar que, assim como no caso das retas, as equações apresentadas acima não são únicas pois dependem do ponto e dos vetores considerados.

Exemplo 3.10 Encontre as equações vetorial e paramétricas do plano π determinado pelos pontos $P_0 : (1,0,1)$, $P_1 : (-1,2,3)$ e $P_2 : (3,1,0)$. **Solução:** Definindo $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} : (-2,2,2)$ e $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_2} : (2,1,-1)$, a equação vetorial de π fica

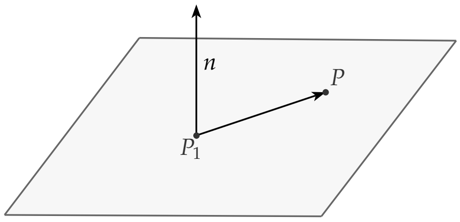
$$\pi : P = (1,0,1) + (-2,2,2)s + (2,1,-1)t.$$

A forma paramétrica é encontrada ao olharmos coordenada por coordenada, ou seja,

$$x = 1 - 2s + 2t$$
$$y = 2s + t$$
$$z = 1 + 2s - t.$$

□

3.2.2 Equação Geral de um Plano



Na seção anterior vimos como encontrar a equação de um plano a partir das coordenadas de três pontos não colineares neste plano. Mas a geometria Euclidiana nos dá uma outra forma de encontrarmos a equação de um plano. Para isso vamos primeiro lembrar que, dada uma reta e um ponto P_1 podemos encontrar um único plano π que contenha o ponto P_1 e que seja ortogonal a reta dada. Observe que, neste resultado, a reta serve apenas para determinar uma direção. Isso nos permite portanto substituir esta reta por um vetor paralelo a ela. Neste sentido, dado um plano π, dizemos que um vetor $\mathbf{n}$ não nulo é normal a π se $\mathbf{n}$ é ortogonal a todos os vetores paralelos a π. É fundamental notar que todo plano possui uma infinidade de vetores normais (veja o exercício 2.3).

Sejam dois pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P = (x, y, z)$ no plano π. Como o vetor $\overrightarrow{P_1P}$ é perpendicular a $\mathbf{n} : (a, b, c)$, calculando o produto interno, obtemos que

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

e assim

$$ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1$$

e assim, definindo $d = ax_1 + by_1 + cz_1$, encontramos que $ax + by + cz = d$ para qualquer ponto $P : (x, y, z)$ pertencente ao plano. Em resumo, determinamos que se um ponto $P = (x, y, z)$ pertence ao plano π, então suas coordenadas satisfazem $ax + by + cz = d$.

Reciprocamente, se as coordenadas do ponto $P = (x, y, z)$ satisfazem a relação $ax + by + cz = d$ tomando $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ teremos, pela definição de d, que $d = ax_1 + by_1 + cz_1$ e subtraindo obtemos que

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Ou seja o vetor $\overrightarrow{P_1P}$ é ortogonal ao vetor $\mathbf{n}$ e consequentemente paralelo a π.

Observe que, para que o plano fique bem determinado, o vetor $\mathbf{n} : (a, b, c)$ deve ser não nulo, ou seja, é necessário que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

A equação $ax + by + cz = d$ é chamada de **equação geral do plano**, e dada esta equação é fácil recuperarmos um vetor normal ao plano. Mais precisamente teremos $\mathbf{n} : (a, b, c)$.

Exemplo 3.11 Encontre a equação geral do plano passando pelos pontos $A : (2, 1, 0), B : (3, 3, 2)$ e $C : (1, 2, 4)$.

Solução: Como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são paralelos ao plano que queremos, um possível vetor normal a esse plano é dado por $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Calculando obtemos

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

e logo

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6, -6, 3).$$

Segue daí que a equação geral do plano é da forma $6x - 6y + 3z = d$. Para determinar d basta notar que o ponto $A : (2, 1, 0)$ pertence ao plano, e logo deve satisfazer esta equação. Assim obtemos

$$6 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = d$$

e logo a equação geral do plano é $6x - 6y + 3z = 6$. □

Exemplo 3.12 Encontre a equação geral do plano com equação vetorial

$$P = (0, 1, 2) + (3, 1, 2)t + (1, 2, 1)s.$$

Solução: O vetor normal ao plano nesse caso é

$$n = (3, 1, 2) \times (1, 2, 1) = (-3, -1, 5)$$

e logo a equação do plano é da forma $-3x - y + 5z = d$. Como $(0,1,2)$ pertence a esse plano, temos que

$$-3 \cdot 0 - 1 + 5 \cdot 2 = d$$

e a equação geral do plano fica $-3x - y + 5z = 9$ □

Exemplo 3.13 Encontre equações paramétricas para o plano cuja equação geral é $2x + 3y + z = 1$.

Solução: Apresentaremos duas soluções possíveis para este problema.

Solução 1: O primeiro modo é encontrar três pontos não colineares do plano. Podemos, por exemplo, fazer $x = 0$ e $y = 0$. Substituindo na equação geral encontramos $z = 1$, e portanto o ponto $A = (0,0,1)$ pertence ao plano. De modo análogo, fazendo $x = 0$ e $y = 1$ e depois $x = 2$ e $y = -1$, encontramos que $B = (0,1,-2)$ e $C = (2,-1,0)$ pertencem ao plano.

Como $\overrightarrow{AB} = (0,1,-3)$ e $\overrightarrow{AC} = (2,-1,-1)$ são LI, os pontos A, B, C não são colineares e assim um conjunto possível de equações paramétricas para π é

$$\begin{cases} x = 0 + 2s \\ y = 0 + t - s \\ z = 1 - 3t - s \end{cases}$$

Solução 2: Outro modo, mais eficiente, é o que chamamos de "isolar os parâmetros". Para isso fazemos $x = t$ e $y = s$, e substituindo em $2x + 3y + z = 1$, obtemos que $z = 1 - 3s - 2t$. Assim outro conjunto possível de equações paramétricas para este plano é dada por $(x,y,z) = (t,s,1-3s-2t)$. □

Exercícios

Ex. 2.1 — Determine as equações paramétricas do plano:

a) passando pelos pontos $(4,3,1)$, $(-3,0,4)$ e $(0,0,3)$

b) pelo ponto $(2,1,3)$ e contendo a reta

$$\frac{z-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{5}$$

c) passando pelos pontos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ e $(0,0,c)$.

Ex. 2.2 — Mostre que os pontos $(-1,2,3), (-3,1,2), (-5,4,6)$ e $(9,-1,-2)$ são colineares.

Ex. 2.3 — Seja π passando pelos pontos A, B, C não colineares.

a) Mostre que para qualquer escalar λ o vetor $\lambda\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ é um vetor normal a π

b) Mostre que todos os vetores normais a π são da forma $\lambda\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Ex. 2.4 — Mostre que a equação $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + d = 0$ representa um plano perpendicular ao vetor $\mathbf{n}$.

Ex. 2.5 — Determine a equação geral do plano:

a) passando pelos pontos $(4,3,1)$, $(-3,0,4)$ e $(0,0,3)$

b) passando pelo ponto $(1,0,1)$ e de vetor normal $(3,4,5)$;

c) passando pelos pontos $A : (4,0,1)$, $B : (3,2,0)$ e $C : (-1,2,3)$;

d) pelo ponto $(2,1,3)$ e contendo a reta

$$\frac{z-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{5}.$$

e) passando pelos pontos $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ e $(0,0,c)$.

f) por $(1,1,5)$ e contendo a reta:

$$\begin{cases} 1x + 3y + 2z = 2 \\ -2x - y + z = 4 \end{cases}$$

g) de equação paramétrica: $X = (1,2,1) + (1,0,1)t + (3,4,2)s$

h) de equação paramétrica: $X = (-1,3,2) + (2,-2,1)t + (5,-1,2)s$

Ex. 2.6 — Dado um plano $ax + by + cz = d$. Mostre que

a) $a \neq 0$, então uma equação paramétrica do plano é:

$$(x,y,z) = \left(-\frac{b}{a}t - \frac{c}{a}s + \frac{d}{a}, t, s\right)$$

b) $b \neq 0$, então uma equação paramétrica do plano é:

$$(x,y,z) = \left(t, -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b}s + \frac{d}{b}, s\right)$$

c) $c \neq 0$, então uma equação paramétrica do plano é:

$$(x, y, z) = \left(t, s, -\frac{a}{c}t - \frac{b}{c}s + \frac{d}{c}\right)$$