Lista 1 - Probabilidade

Revisão

Espaço Amostral

1 — Um dado é lançado sucessivas vezes até aparecer um 6 na face virada para cima. Neste instante o experimento finaliza. Qual é o espaço amostral deste experimento? Seja E_n o evento em que n lançamentos são necessários para completar o experimento. Que evento representa $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$?

2 — (Distribuição de objetos em cubículos.) Considere a estrutura do espaço amostral decorrente de alocar k objetos (bolas, etc.) em n cubículos (caixas, etc.) enumerados de 1 a n. Esta classe de problemas aparece, por exemplo, na Física Estatística quando é estudada a distribuição de k partículas (prótons, elétrons, etc.) entre n estados (que podem ser níveis de energia). Na física estatística dizemos que:

- as partículas distinguíveis e que não estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli (no máximo uma partícula por sítio) obedecem as estatísticas de Maxwell-Boltzmann
- as partículas distinguíveis e que estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli (no máximo uma partícula por sítio) obedecem as estatísticas de Bose-Einstein.
- as partículas distinguíveis e que estão sujeitas ao princípio de exclusão, dizemos que obedecem as estatísticas de Fermi-Dirac.

Descreva o espaço amostral para estes modelos de alocação de partículas.

3 — (Passeio Aleatório I) Considere o experimento aleatório que consiste em observar os primeiros n movimentos de uma partícula que se desloca aleatoriamente no conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ dos números inteiros. A partícula começa sua trajetória na origem no instante 0 e a cada instante de tempo $1, 2, 3, \ldots$ a partícula se move aleatoriamente para a direita ou para a esquerda. Descreva o espaço amostral deste experimento.

4 — (Passeio Aleatório II) Descreva o espaço amostral quando o experimento consiste em observar a trajetória completa do passeio aleatório. Isto é, se observarmos seus movimentos em todos instante de tempo $n, n \in \mathbb{N}$.

Probabilidade

5 — (Inclusão-exclusão) Prove o príncipio de inclusão-exclusão. Dados $A_1, \ldots, A_n$ eventos num espaço de probabilidade (Ω, F, P), prove que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \cdots \quad (1)$$

$$\cdots + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \quad (2)$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right). \quad (3)$$

6 — (Urna de Polya) Uma urna contém inicialmente uma bola branca e uma bola negra. Em cada etapa do experimento, uma bola é retirada aleatoriamente da urna, essa bola é colocada de volta na urna e outra bola da mesma cor é adicionada. Prove que o número de bolas brancas que estão na urna depois de N etapas é um número aleatório uniforme em $\{1, 2, ..., N + 1\}$. Ou seja, o evento em que o número de bolas brancas após o passo N é igual a k tem probabilidade $\frac{1}{N+1}$ para cada todo $1 \leq k \leq N + 1$.

7 — (Passeio Aleatório) Suponha que que uma partícula está inicialmente na origem e se move para a esquerda ou para a direita um passo de cada vez, aleatoriamente, com a probabilidade p de ir para a esquerda e q de ir para a direita (com $p+q = 1$). Deixe S_n denotar a A posição do passeio aleatório após n passos.

a) Determine a probabilidade da partícula estar na posição x após n etapas.
b) Calcule $\mathbf{E}(S_n)$
c) Calcule $\mathbf{Var}(S_n)$
d) Analise detalhadamenteo caso $p = q = 1/2$.

8 — (Coordenação aleatória) Um cluster de N computadores precisa se comunicar com um servidor central. Em qualquer momento $t = 0, 1, 2, \ldots$ cada computador pode decidir transmitir ou não transmitir um pacote de dados para o servidor. No entanto, o servidor possui uma capacidade de computação muito limitada: pode processar os dados, se e somente se, precisamente um computador enviar um pacote. Caso nenhum dado seja enviado, ou se mais de um computador enviar um pacote, os dados (e o tempo gasto) estão perdido.

Os computadores não podem comunicar diretamente entre si para coordenar a ordem em que eles devem enviar seus pacotes. Mostre que eles podem, no entanto, adotar o seguinte estratégia para assegurar uma taxa relativamente efetiva de transferência de dados: para algum valor $0 < p < 1$, no momento de tempo t cada computador lança uma moeda com probabilidade p de aparecer cara, independentemente de todos os outros computadores, e envia seu pacote se aparecer cara. Encontre o valor de p (como função de N) que levaria à taxa máxima de sucesso e encontre essa taxa de sucesso como uma função de N e analise o que ocorre no limite quando N tende a infinito.

9 — Deixe Z ser uma variável aleatória com a distribuição de Poisson $\mathrm{Po}(\lambda)$. Por exemplo, Z poderia representar o número de espécimes de sapo observados por um biólogo num trecho da selva num determinado dia, onde o parâmetro λ corresponde ao número médio de sapos vistos num dia. Suponha que os eventos contados por Z sejam divididos em dois tipos, onde a separação ocorre independentemente de forma aleatória para cada evento; por exemplo, os sapos poderiam ser classificado como pertencente a uma das duas espécies.

Formalmente, deixe $X_1, X_2, X_3, \ldots$ denotar uma sequência infinita de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $\mathrm{Be}(p)$ (isto é,

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_n = 0) = p),$$

onde $0 < p < 1$ é um parâmetro.
Defina

$$W_1 = \sum_{i=1}^{Z} X_n$$

$$W_2 = \sum_{i=1}^{Z} (1 - X_n)$$

de modo que $Z = W_1 + W_2$, e no exemplo W_1 representaria o número de sapos pertencentes a primeira espécie e W_2 o número de sapos da segunda espécie. (Assim, p parâmetro p é a fração de sapos pertencentes à primeira espécie). Prove que as variáveis aleatórias W_1, W_2 também são variáveis aleatórias de Poisson com distribuições $W1 \sim \mathrm{Po}(\lambda p), W_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda(1-p))$, e elas são independentes entre si.

Teoria da Medida

10 — Mostre que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é gerado pelos conjuntos da forma $[-\infty, a]$ para $-\infty < a < \infty$, e também pelos conjuntos da forma $[-\infty, a)$ para $-\infty < a < \infty$.

11 — Prove que

a) Se $A_n \nearrow$, então A_n converge, e

$$\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

b) Se $A_n \searrow$, então A_n converge, e

$$\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = B.$$

12 — (Conjunto de Vitali) Suponha uma medida μ não nula, sigma aditiva e invariante por translações nos reais. Prove detalhadamente que existe um subconjunto do intervalo $[0, 1]$ que não é μ mensurável.

13 — Explique por que esse exemplo leva a necessidade de σ-álgebra na definição de espaço de medida.

14 — (Conjunto de Cantor) Mostre que o conjunto de Cantor é não enumerável em $\mathcal{B}((0, 1])$ (uma boa maneira de ver que ele é não enumerável é trabalhar com uma caracterização do conjunto de Cantor na base 3).

15 — Calcule a integral

$$\int_C x^2 d\mu$$

onde C é o conjunto de Cantor.

16 — (σ-álgebra induzida) Suponha que $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra em Ω e seja Ω_0 um subconjunto de Ω (não necessariamente em $\mathcal{F}$). Prove que $\mathcal{F} \cap \Omega_0 := \{F \cap \Omega_0 : F \in \mathcal{F}\}$ é σ-álgebra em Ω_0.

17 — Use o teorema da convergência dominada para provar que a função

$$U(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x) \cos(xt) dx$$

é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$

18 — Dado $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida. Sejam $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. então

$$\mu\left(\bigcup_{N} \bigcap_{n=N}^{\infty} A_n\right) \leq \liminf \mu(A_n)$$