Lista 2 - Probabilidade

Medidas e Probabilidade

Álgebras, σ-álgebras. etc.

1 — Prove o Princípio dos Bons Conjuntos:
Dado $\mathcal{C}$ e $\mathcal{G}$ duas coleção de subconjuntos de Ω. Se

- $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$;
- $\mathcal{G}$ é uma σ-álgebra

Então $\sigma\langle\mathcal{C}\rangle \subset \mathcal{G}$.

2 — Prove o Teorema da Classe Monótona de Halmos

3 — Para qualquer família não vazia $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$, se

$\mathcal{C} :=$ *a coleção de conjuntos de* $\mathcal{A}$ *e seus complementos*
$\mathcal{I} :=$ *a coleção de intersecções finitas de* $\mathcal{C}$
$\mathcal{U} :=$ *a coleção de uniões finitas de* $\mathcal{I}$.

então $f\langle\mathcal{A}\rangle = \mathcal{U}$.

4 — Usando o resultado anterior mostre que um subconjunto da álgebra de Borel de $[0, 1]$ pode ser escrito como união finita de intervalos

Borelianos

5 — O conjunto de números normais e anormais está em $\mathcal{B}((0, 1])$.

6 — Todos os subconjuntos contáveis, co-contáveis (i.e. complementos de conjuntos contáveis) e perfeitos de $(0, 1]$ estão em $\mathcal{B}((0, 1])$. Em particular, o conjunto dos números irracionais em $(0, 1]$ é um conjunto de Borel.

7 — Dado $\Omega = \mathbb{R}$ e $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}) := f\langle(-\infty, a] : -\infty < a < \infty\rangle$ a álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Deixe P uma probabilidade finitamente aditiva em $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$. Mostre que P é uma medida de probabilidade em $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ se e somente se a função definida por $F(x) := P((-\infty, x])$ é não decrescente, continua a direita e satisfaz $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Probabilidade

8 — **(sub-additividade enumerável)** Mostre que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

9 — Prove que a continuidade da medida de probabilidade. Dados $A_1, A_2, \dots$ eventos, então

a) Se $A_n \nearrow A$, então $\mathbf{P}(A_n) \nearrow \mathbf{P}(A)$ quando $n \to \infty$.

b) Se $A_n \searrow A$, então $\mathbf{P}(A_n) \searrow \mathbf{P}(A)$ quando $n \to \infty$.

c) $\mathbf{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbf{P}(A_n) \leq \limsup \mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}(\limsup A_n)$.

d) $A_n \to A$ implica que $\mathbf{P}(A_n) \to \mathbf{P}(A)$ as $n \to \infty$.

10 — Considere um modelo probabilístico cujo espaço amostral é a reta real. Mostre que

a) $\mathbf{P}([0,\infty)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}([0,n])$

b) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}([n,\infty)) = 0$.

11 — (Uma condição insuficiente) Deixe $\Omega = \{1,2,3,4\}$, e deixe $A = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$.

a) Mostre que a σ-algebra $\mathcal{F}$ gerada por A é o conjunto das partes 2^Ω.

b) Mostre que existem duas medidas de probabilidade P_1 e P_2 em $(\Omega,\mathcal{F})$, tal que $P_1(E) = P_2(E)$ para qualquer $E \in A$, mas $P_1 \neq P_2$. Este problema mostra que o fato de que duas medidas de probabilidade coincidem com uma família geradora de uma σ-álgebra não garante que elas sejam iguais. No entanto, isso é verdade se adicionarmos a suposição de que a família geradora A é fechada sob interseções finitas.

12 — Desigualdade de Bonferroni
Definindo

$$S_1 := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i),$$

e

$$S_2 := \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j),$$

bem como

$$S_k := \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

para todos os números inteiros de k em $\{3,\dots,n\}$. Então, para k ímpar

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} S_j$$

e para $k > 2$ par

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} S_j.$$

(Se tiver com muita preguiça prove apenas para $k = 2,3$.)

13 — Problema do Pareamento
No final de um dia agitado, os pais chegam ao jardim de infância para pegar seus filhos. Cada pai escolhe uma criança para levar a casa uniformemente ao acaso. Use o fórmula de inclusão-exclusão para mostrar que a probabilidade de pelo menos um pai escolhe seu próprio filho é igual a

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

E que essa probabilidade converge a $1 - 1/e$ quando $n \to \infty$

14 — Qual é a probabilidade de que um ponto escolhido aleatoriamente no interior de um triângulo equilátero esteja mais perto do centro do que de suas bordas?

15 — Agulhas de Buffon
Deixe um plano horizontal ser dividido em faixa por uma série de linhas paralelas a distância fixa d, como as tábuas do chão.
Deixe uma agulha, cujo comprimento seja igual à distância entre as linhas paralelas, ser jogada no plano aleatoriamente.

a) Defina precisamente o espaço de Probabilidade.

b) Prove que a probabilidade da agulha não interceptar uma das linhas paralelas é $\frac{2}{\pi}$.

16 — Para todo número $\omega \in (0, 1]$, deixe $d_k(\omega)$ denotar o k-ésimo digito da representação de ω. Seja $z_k(\omega) := 2d_k(\omega) - 1$ e

$$s_n(\omega) := \sum_{k=1}^{n} z_k(\omega) \equiv \text{excesso de 1s nos n primeiros dígitos.}$$

Mostre que

$$M(t) := \int_0^1 e^{ts_n(\omega)}\, d\omega = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n \qquad (1)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Diferenciando com respeito à t, mostre que $\int_0^1 s_n(\omega)\, d\omega = M'(0) = 0$ e $\int_0^1 s_n^2(\omega)\, d\omega = M''(0) = n$.

A ideia é dividir a integral $\int_0^1$ nos intervalos diádicos da forma $(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$

17 — Mostre que

$$P\left[|s_n/n| \geq \epsilon\right] \leq 2e^{-n\epsilon^2/2}$$

para todo $\epsilon > 0$.

Dica : Use (1) e a desigualdade $(e^x + e^{-x})/2 \leq \exp(x^2/2)$ que é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$.